



Princípios de Teoria Quântica de Campos  
e o Momento Magnético Anômalo do Múon

---

**Aluno:** Vinícius Zilio Rocca

---

**Orientador:** André Paniago Lessa

**Trabalho de Conclusão de Curso**

*Santo André*  
*20/11/2023*

# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>3</b>
<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>1 Uma introdução à Teoria Quântica de Campos</b>	<b>6</b>
1.1 Mecânica Quântica Relativística . . . . .	6
1.1.1 Teoria de uma partícula livre, de massa $\mu$ e desprovida de spin . . . . .	6
1.1.2 A simples teoria de várias partículas livres . . . . .	9
1.2 Construindo um campo escalar quântico . . . . .	12
1.2.1 A forma explícita do campo escalar quântico . . . . .	13
1.3 A quantização canônica . . . . .	16
1.3.1 A quantização do campo escalar clássico livre . . . . .	18
<b>2 Campo de Dirac</b>	<b>21</b>
2.1 As representações do grupo de Lorentz . . . . .	21
2.2 Representação Espinorial . . . . .	23
2.3 A Lagrangiana de Dirac . . . . .	25
2.4 Soluções livres da equação de Dirac . . . . .	26
2.5 Quantização do campo de Dirac . . . . .	29
<b>3 Campo vetorial</b>	<b>32</b>
3.1 Campo vetorial livre e sem massa . . . . .	33
3.1.1 Quantização do campo vetorial sem massa . . . . .	34
<b>4 Teoria de Espalhamento</b>	<b>36</b>
4.1 Seção de Choque . . . . .	36
4.2 A matriz de espalhamento $S$ e sua relação com a seção de choque . . . . .	38
4.2.1 Fórmula de redução de LSZ para campos escalares . . . . .	40
<b>5 Diagramas de Feynman</b>	<b>42</b>
5.1 O estado de vácuo em um sistema com interação . . . . .	42
5.2 Produtos temporalmente ordenados e o teorema de Wick . . . . .	43
5.3 Diagramas de Feynman no espaço de posição . . . . .	45
5.3.1 Bolhas de vácuo . . . . .	46
5.4 Amplitude de espalhamento e diagramas de Feynman no espaço de momentos . . . . .	47
5.4.1 Diagramas desconexos . . . . .	50
5.5 Regras de Feynman para QED . . . . .	50
<b>6 O momento magnético de Férmions</b>	<b>53</b>
6.1 A amplitude de espalhamento de um férmion por um campo eletromagnético externo ao nível de árvore . . . . .	53
6.2 O momento magnético de um férmion a nível de árvore . . . . .	54
6.3 Correções radiativas para o espalhamento de um férmion por um campo eletromagnético externo . . . . .	56
6.4 O Valor experimental de $a_\mu$ . . . . .	59
<b>7 Uma extensão para o Modelo Padrão e sua contribuição para <math>a_\mu</math></b>	<b>61</b>
7.1 A Hamiltoniana de interação do modelo simplificado de nova física e suas regras de Feynman	61
7.2 Correções radiativas para o espalhamento de um férmion do Modelo Padrão por um campo eletromagnético externo associadas ao Modelo R . . . . .	62

<b>Conclusão</b>	<b>66</b>
<b>A Os comutadores do campo escalar quântico livre</b>	<b>69</b>
<b>B O cálculo dos termos que compõe a Hamiltoniana do campo escalar quântico livre</b>	<b>71</b>
<b>C O operador de evolução temporal</b>	<b>73</b>
C.1 O operador de evolução temporal . . . . .	73
C.2 As representações na Mecânica Quântica . . . . .	75
<b>D Cálculo da relação entre seção de choque e amplitude de espalhamento</b>	<b>78</b>
D.0.1 O caso de $n = 2$ . . . . .	80
<b>E A identidade algébrica associada a fórmula de redução de LSZ</b>	<b>83</b>
<b>F Derivação de algumas regras de Feynman</b>	<b>85</b>
F.1 O propagador de Feynman do campo escalar . . . . .	85
F.2 O propagador de Feynman de Férmions . . . . .	86
F.3 O propagador de Feynman do fóton . . . . .	87
<b>G Cálculo das correções radiativas</b>	<b>88</b>
G.0.1 Cálculo da correção $\delta g$ . . . . .	92
<b>H Cálculo das correções radiativas além do Modelo Padrão</b>	<b>94</b>
H.1 Cálculo da contribuição $\delta g_{NP}$ . . . . .	98

# Resumo

Ao longo das últimas décadas, o Modelo Padrão tem apresentado uma notável consistência e sucesso na descrição de fenômenos observados experimentalmente, graças ao uso do formalismo da Teoria Quântica de Campos (TQC) para descrever as interações fundamentais da natureza. No entanto, existem evidências de que essa teoria não é completa, como é o caso da divergência entre o valor previsto teoricamente e o valor experimentalmente medido para o momento magnético anômalo do múon ( $a_\mu$ ). Diante deste cenário, diversos modelos de nova física têm sido propostos a fim de explicar o valor experimental. Deste modo, este projeto tem como objetivo estudar conceitos básicos de TQC e aplicá-los no cálculo do momento magnético anômalo do múon em primeira ordem de correção radiativa, tanto dentro do Modelo Padrão quanto em um modelo de nova física que o estende, incorporando um novo férmion carregado e um escalar. Adicionalmente, será conduzida uma análise sobre os vínculos que os parâmetros desse modelo de nova física devem obedecer para fornecer uma explicação consistente com o valor experimental de  $a_\mu$ .

# Introdução

Após a descoberta do Bóson de Higgs em 2012 no *Large Hadron Collider*, o Modelo Padrão (MP) ficou completo, uma vez que todas as partículas fundamentais previstas pelo modelo foram observadas. Além disto, o MP tem demonstrado grande sucesso na descrição de fenômenos observados experimentalmente. Esses êxitos fundamentam-se profundamente no formalismo da Teoria Quântica de Campos, que se revelou uma ferramenta imprescindível para explorar as interações fundamentais da natureza. Portanto, uma compreensão aprofundada dessa teoria é crucial para a condução de pesquisas no campo da física de altas energias.

Apesar do grande sucesso do Modelo Padrão, existem algumas evidências de que ele não seja uma teoria definitiva. Um exemplo disto é a discrepância entre as medidas experimentais do momento magnético anômalo do Múon ( $a_\mu$ ) em comparação com as previsões do MP [1, 2]. Diante desse cenário, diversos modelos de nova física têm sido propostos com o objetivo de explicar o valor experimental[3]. Nestas abordagens, novas partículas são introduzidas para fornecer contribuições adicionais ao momento magnético anômalo do múon, resultando assim em previsões teóricas concordantes com os valores medidos experimentalmente.

Neste contexto, este projeto tem como principal objetivo estudar conceitos básicos de Teoria Quântica de Campos. Isso inclui tópicos como Teoria Clássica de Campos, quantização canônica em campos clássicos, a compreensão das regras de Feynman e a habilidade de calcular amplitudes de espalhamento. Estes conceitos serão posteriormente aplicados de maneira prática no cálculo teórico do momento magnético anômalo do múon. Inicialmente, esse cálculo será realizado para o Modelo Padrão e, em seguida, estenderemos a análise para incorporar, em primeira ordem de correção radiativa, a contribuição resultante da inclusão de um férmion carregado e um campo escalar ao MP.

No primeiro capítulo deste trabalho, abordaremos as falhas da teoria de uma partícula livre e sem spin ao formular uma versão relativística da mecânica quântica, o que levou a uma nova teoria, onde é permitida a criação e aniquilação de partículas. Para lidar com esta nova abordagem, será desenvolvido um formalismo de operadores de criação e aniquilação estabelecendo um paralelo com um sistema de infinitos osciladores harmônicos desacoplados. Unindo os conceitos desenvolvidos e impondo a causalidade relativística sobre qualquer observável, construiremos uma expressão para o campo quântico escalar. Por fim, será apresentado o método de quantização canônica, o qual nos permite fazer a transição da Teoria Clássica de Campos para a Teoria Quântica de Campos.

Nos capítulos dois e três, abordaremos os campos clássicos de Dirac e vetorial, explorando suas propriedades e quantizando-os por meio do método de quantização canônica. Já no quarto capítulo, faremos uma breve discussão sobre a teoria de espalhamento, com o objetivo de definir a amplitude de espalhamento e sua conexão com a série de Dyson. O quinto capítulo introduzirá um método diagramático chamado regras de Feynman, que permitirá o cálculo intuitivo e acessível de amplitudes de espalhamento, especialmente em cenários complexos de interação de partículas. Em particular, abordaremos as regras de Feynman para a eletrodinâmica quântica (QED), pois as utilizaremos nos capítulos seguintes.

No sexto capítulo, abordaremos o espalhamento de um férmion carregado por um campo eletromagnético externo, utilizando os conceitos estudados para calcular a amplitude de forma perturbativa. Considerando o limite não relativístico do resultado encontrado e comparando-o com a aproximação de Born, determinaremos o potencial de interação do férmion com o campo externo. Isso nos permitirá calcular o momento magnético do múon no Modelo Padrão, em uma ordem inferior (nível de árvore), e também a contribuição proveniente da correção radiativa de primeira ordem. Além disso, discutiremos brevemente o resultado experimental de  $a_\mu$  e sua diferença em relação ao valor previsto pelo Modelo Padrão.

O sétimo capítulo introduzirá um modelo simplificado de nova física, que expande o Modelo Padrão mediante a inclusão de um férmion carregado e um campo escalar. Por meio da Hamiltoniana de interação, derivaremos as regras de Feynman específicas para este modelo. Essas regras serão então aplicadas para calcular a contribuição adicional, em primeira ordem de correção radiativa, ao momento magnético anômalo do múon. Esta nova contribuição é resultado da interação do múon com as novas partículas e seu cálculo segue o procedimento análogo ao realizado no capítulo anterior. Após obtermos essa contribuição exclusiva do modelo de nova física, exploraremos as restrições impostas aos parâmetros do modelo para

que ele explique a diferença entre o valor experimental de  $a_\mu$  e a previsão do Modelo Padrão com uma significância de até  $1\sigma$ . Por fim, no oitavo capítulo apresentaremos as conclusões referentes aos resultados obtidos neste trabalho.

# Capítulo 1

## Uma introdução à Teoria Quântica de Campos

### 1.1 Mecânica Quântica Relativística

Nesta seção discutiremos dois tópicos pertencentes a Mecânica Quântica Relativística. A primeira parte será voltada a abordar a teoria de uma partícula livre e sem spin, de modo que possamos explorar seus possíveis estados, construir uma medida invariante para diferentes referenciais inerciais e calcular a probabilidade desta partícula viajar com velocidade maior do que a da luz. Por último, discutiremos uma teoria simples para sistemas onde o número de partículas livres não é fixo e construiremos um formalismo para ela inspirados no de osciladores harmônicos desacoplados.

Na Mecânica Quântica e na Relatividade Especial, as constantes  $\hbar$  e  $c$  aparecem frequentemente. Portanto, para evitarmos poluição visual nas expressões presentes ao longo das próximas seções, utilizaremos as unidades naturais, onde  $\hbar = c = 1$ . Além disto, utilizaremos a métrica de Minkowski com assinatura  $(+ - - -)$ , de modo que  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .

#### 1.1.1 Teoria de uma partícula livre, de massa $\mu$ e desprovida de spin

Uma partícula livre sem spin tem seu estado  $|\psi\rangle$  completamente especificado por seu momento, de modo que os autoestados de momento  $|\mathbf{p}\rangle$  formam um conjunto completo de estados, ou seja, uma base. Consequentemente, podemos decompor  $|\psi\rangle$  da seguinte forma:

$$|\psi\rangle = \int d^3\mathbf{p} \psi(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\rangle, \quad \psi(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p} | \psi \rangle \quad (1.1.1)$$

O primeiro postulado da Relatividade Especial nos diz que as leis da física devem ser as mesmas em todos os referenciais inerciais, o que implica diretamente que as probabilidades associadas a um sistema devem ser as mesmas independentemente do referencial. Portanto, se temos um estado  $|\psi\rangle$  e seu correspondente  $|\psi'\rangle$  em outro referencial, eles devem satisfazer a seguinte relação:

$$|\langle \psi | \psi \rangle|^2 = |\langle \psi' | \psi' \rangle|^2 \implies \langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi' | \psi' \rangle \quad (1.1.2)$$

Seja  $U(\Lambda)$  o operador responsável pelas transformações de Lorentz, então  $|\psi'\rangle = U(\Lambda) |\psi\rangle$ . Portanto, a equação acima pode ser escrita como:

$$\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | U^\dagger(\Lambda) U(\Lambda) | \psi \rangle \implies U^\dagger(\Lambda) U(\Lambda) = \mathbf{I} \quad (1.1.3)$$

Com este resultado, vemos que o primeiro postulado da Relatividade Especial implica que o operador  $U(\Lambda)$  deve ser unitário. Consequentemente, esperamos que:

$$U(\Lambda) \mathbf{I} U^\dagger(\Lambda) = \mathbf{I} = \int d^3\mathbf{p}' |\mathbf{p}'\rangle \langle \mathbf{p}'| \quad (1.1.4)$$

Onde utilizamos a relação de completeza da base  $\{|\mathbf{p}\rangle\}$ . No entanto, isto não ocorre, pois se calcularmos o termo da esquerda explicitamente utilizando que a transformação de Lorentz do estado  $|\mathbf{p}\rangle$  é  $U(\Lambda) |\mathbf{p}\rangle = |\mathbf{p}'\rangle$ , obteremos que:

$$U(\Lambda)\mathbf{I}U^\dagger(\Lambda) = U(\Lambda) \left[ \int d^3\mathbf{p} |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| \right] U^\dagger(\Lambda) = \int d^3\mathbf{p} U(\Lambda) |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| U^\dagger(\Lambda) = \int d^3\mathbf{p} |\mathbf{p}'\rangle \langle \mathbf{p}'| \quad (1.1.5)$$

Tal resultado não corresponde identidade, visto que a medida  $d^3$  não é um invariante de Lorentz e consequentemente  $\int d^3\mathbf{p} |\mathbf{p}'\rangle \langle \mathbf{p}'|$  não é a relação de completeza da base em outro referencial inercial. Portanto, para que encontremos o resultado que esperávamos, teremos de normalizar os kets utilizando a medida infinitesimal  $d^4p$ , a qual é invariante por Lorentz. Além disto, devemos lembrar que como temos uma partícula de massa  $\mu$ , os valores de energia ( $p^0 = \omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + \mu^2}$ ) e o momento tridimensional ( $\mathbf{p}$ ) devem estar contidos no hiperboloide  $p^2 = (p^0)^2 - |\mathbf{p}|^2 = \mu^2$ , o que pode ser garantido através da utilização da medida  $d^4p\delta(p^2 - \mu^2)\theta(p^0)$ . Como  $d^4p = dp^0 d^3\mathbf{p}$ , podemos integrar apenas em  $p_0$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp^0 [d^3\mathbf{p}\delta(p^2 - \mu^2)\theta(p^0)] = \int_{-\infty}^{\infty} dp^0 [d^3\mathbf{p}\delta((p^0)^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2)\theta(p^0)]$$

Utilizando a identidade  $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-a_i)}{|f'(a_i)|}$  [4], onde  $\{a_i\}$  são as raízes de  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dp^0 [d^3\mathbf{p}\delta(p^2 - \mu^2)\theta(p^0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} dp^0 d^3\mathbf{p}\theta(p^0) \left( \frac{\delta(p^0 - \omega_{\mathbf{p}})}{2\omega_{\mathbf{p}}} + \frac{\delta(p^0 + \omega_{\mathbf{p}})}{2\omega_{\mathbf{p}}} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp^0 d^3\mathbf{p}\theta(p^0) \frac{\delta(p^0 - \omega_{\mathbf{p}})}{2\omega_{\mathbf{p}}} \\ \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dp^0 [d^3\mathbf{p}\delta(p^2 - \mu^2)\theta(p^0)] &= \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Portanto, vemos que  $\frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}}$  é uma medida invariante por Lorentz. No entanto, será conveniente introduzir um fator de  $(2\pi)^3$ , de modo que temos a seguinte invariância por transformações de Lorentz:

$$\int \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} d^3\mathbf{p} |p\rangle \langle p| = \int \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}'}} d^3\mathbf{p}' |p'\rangle \langle p'| \quad (1.1.7)$$

Onde  $p'$  se refere ao quadrimomento em outro referencial e os kets  $|p\rangle$  são normalizados como  $|p\rangle = \sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} |\mathbf{p}\rangle$ .

Agora que resolvemos o problema da medida invariante de Lorentz, devemos discutir brevemente sobre a energia de uma partícula livre dentro da Relatividade Especial. Na Mecânica Quântica não relativística, nós sabemos que o Hamiltoniano  $H$  tem uma importância muito grande, pois além de ser o gerador da evolução temporal dos estados, seus autovalores são as possíveis energias do sistema. No entanto, como estamos em uma teoria relativística, o Hamiltoniano de uma partícula livre, sem spin e de massa  $\mu$  não pode ser mais  $H = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2\mu}$ , visto que na Relatividade especial a energia de uma partícula livre é  $E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + \mu^2}$ . Portanto, a partir de agora devemos considerar o seguinte Hamiltoniano:

$$H |\mathbf{p}\rangle = \omega_{\mathbf{p}} |\mathbf{p}\rangle, \quad \omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + \mu^2} \quad (1.1.8)$$

Uma das consequências dos postulados da relatividade especial é nada pode se mover mais rápido que a luz no vácuo[5]. A fim de verificarmos se a probabilidade da partícula estar fora do cone de luz é não nula, precisamos encontrar a expressão do operador de posição  $X$  para nosso sistema. Esperamos que este operador obedeça algumas propriedades:

1. Seja hermitiano:  $X = X^\dagger$
2. Sob translações:  $U^\dagger(\mathbf{a})XU(\mathbf{a}) = e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}}Xe^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}} = X + \mathbf{a}$
3. Sob rotações:  $U^\dagger(R)XU(R) = RX$

Ao propormos que ele é Hermitiano estamos assumindo que se trata de observável. A terceira condição é que ele se transforma como um 3-vetor sob rotações. Note que se derivarmos a segunda equação em relação a  $a_i$ :

$$\frac{\partial}{\partial a_i} (e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}} X_j e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}}) = \frac{\partial}{\partial a_i} (X_j + \mathbf{a}) \quad (1.1.9)$$

$$ie^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}} P_i X_j e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}} - ie^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}} X_j P_i e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{a}} = \delta_{ij} \quad (1.1.10)$$

Calculando em  $a_i = 0$ :

$$iP_i X_j - iX_j P_i = \delta_{ij} \quad (1.1.11)$$

$$i[P_i, X_j] = \delta_{ij} \quad (1.1.12)$$

Que é exatamente o comutador canônico. Com esse comutador pode-se mostrar que o operador de posição tem as mesmas propriedades da Mecânica Quântica não relativística, ou seja:

$$X^i = i \frac{\partial}{\partial p_i} \quad (1.1.13)$$

O fato de termos encontrado um operador de posição bem definido e que é hermitiano implica que a posição da partícula é um observável e consequentemente somos capazes de medi-la. Além disto, as possíveis posições da partícula serão os autovalores deste operador e seus autovetores formarão a base de posição  $\{|\mathbf{x}\rangle\}$ . Tais fatos abrem a possibilidade para constatar se a partícula pode viajar mais rápido que a luz, visto que podemos medir sua posição e consequentemente calcular se a probabilidade dela estar fora do cone de luz é não nula. Para realizar tal verificação, vamos considerar que inicialmente ( $t = 0$ ) nossa partícula está em um estado  $|\psi(0)\rangle$  localizado precisamente na origem do sistema de coordenadas, ou seja,  $\langle\mathbf{x}|\psi(0)\rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{x})$ . Após um tempo  $t > 0$  o estado dessa partícula será  $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle$  [6, 4], uma vez que a Hamiltoniana de uma partícula livre não depende do tempo. Portanto, a amplitude de probabilidade de encontrarmos a partícula em uma posição  $\mathbf{x}$  em um instante  $t$  é:

$$\langle\mathbf{x}|\psi(t)\rangle = \langle\mathbf{x}| e^{-iHt} |\psi(0)\rangle \quad (1.1.14)$$

Utilizando a relação de completeza da base:

$$\langle\mathbf{x}|\psi(t)\rangle = \langle\mathbf{x}| e^{-iHt} \left[ \int \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\mathbf{p}}} d^3\mathbf{p} |p\rangle \langle p| \right] |\psi(0)\rangle \quad (1.1.15)$$

Como definimos a normalização dos nossos kets como  $|p\rangle = \sqrt{(2\pi)^3} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} |\mathbf{p}\rangle$ , então:

$$\langle\mathbf{x}|\psi(t)\rangle = \int d^3\mathbf{p} \langle\mathbf{x}| e^{-iHt} |\mathbf{p}\rangle \langle\mathbf{p}|\psi(0)\rangle \quad (1.1.16)$$

Nós sabemos que  $|\mathbf{p}\rangle$  é um autoestado de  $H$  com autovalor  $\omega_{\mathbf{p}}$ , consequentemente teremos que  $e^{-iHt} |\mathbf{p}\rangle = e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t} |\mathbf{p}\rangle$ . Portanto:

$$\langle\mathbf{x}|\psi(t)\rangle = \int d^3\mathbf{p} e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t} \langle\mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle \langle\mathbf{p}|\psi(0)\rangle \quad (1.1.17)$$

Visto que  $X^i$  é o mesmo operador do caso não relativístico, temos que  $\langle\mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$  [4], Logo:

$$\langle\mathbf{x}|\psi(t)\rangle = \int d^3\mathbf{p} e^{-i\omega_{\mathbf{p}}t} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \langle\mathbf{p}|\psi(0)\rangle \quad (1.1.18)$$

No entanto, note que:

$$\langle\mathbf{p}|\psi(0)\rangle = \int d^3\mathbf{x} \langle\mathbf{p}|\mathbf{x}\rangle \langle\mathbf{x}|\psi(0)\rangle = \int d^3\mathbf{x} \langle\mathbf{p}|\mathbf{x}\rangle \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \quad (1.1.19)$$

Onde utilizamos a relação de completeza da base de posição,  $\langle\mathbf{x}|\psi(0)\rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{x})$  e  $\langle\mathbf{p}|\mathbf{x}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$ . Portanto:

$$\langle \mathbf{p} | \psi(0) \rangle = \int d^3 \mathbf{x} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.1.20)$$

Substituindo este resultado na equação 3.1.9:

$$\langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{p} e^{-i\omega_{\mathbf{p}} t} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \quad (1.1.21)$$

Esta integral não é trivial e demanda diversos passos. Consequentemente, utilizaremos diretamente seu resultado e sua resolução em detalhes pode ser encontrada na referência [4].

$$\langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle = \frac{i}{2\pi^2 r} \int_{\mu}^{\infty} y dy e^{-ry} \sinh \sqrt{y^2 - \mu^2} t, \quad r > t \quad (1.1.22)$$

Onde  $r$  é a distância da origem e  $\mu$  é a massa da partícula. Note que esta solução é válida para  $r > t$ , que consiste na região fora do cone de luz. Deste modo, essa expressão nos fornece a amplitude de probabilidade da partícula viajar mais rápido que a luz. Analisando a equação acima, vemos que como  $e^{-ry} > 0$  e  $\sinh \sqrt{y^2 - \mu^2} t > 0$  para  $t > 0$ , então o integrando é estritamente positivo, o que implica que a integral não é nula. Portanto, se a amplitude de probabilidade é não nula, então existe a possibilidade de que a partícula viaje mais rápido que a luz, violando assim o segundo postulado da Relatividade Especial. Apesar de esta integral não possuir solução analítica, podemos superestimar seu resultado pegando apenas a parte da exponencial crescente do seno hiérbólico e fazendo  $\sqrt{y^2 - \mu^2} \approx y$ . Como estamos superestimando:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle &< \frac{i}{2\pi^2 r} \int_{\mu}^{\infty} y dy e^{-ry} e^{yt} \\ \langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle &< \frac{i}{2\pi^2 r} \int_{\mu}^{\infty} y dy e^{-ry+yt} \\ \langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle &< \frac{i}{2\pi^2 r} \int_{\mu}^{\infty} y dy e^{-y(r-t)} \end{aligned} \quad (1.1.23)$$

Calculando esta integral:

$$\langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle < e^{-(r-t)\mu} \left( \frac{1}{(r-t)^2} + \frac{\mu}{(r-t)} \right) \quad (1.1.24)$$

$$\langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle < e^{-(r-t)\mu} \left( \frac{1}{(r-t)^2} + \frac{\mu}{(r-t)} \right) \quad (1.1.25)$$

Note que este resultado, além de confirmar que a integral é não anula, ele mostra que a amplitude cai exponencialmente ao nos afastarmos da origem. No entanto, próximo a origem ainda temos uma probabilidade não nula de a partícula viajar mais rápido que a luz. Consequentemente, podemos ver que a teoria quântica de uma partícula é incompatível com a causalidade imposta pela Relatividade Especial. Deste modo, a próxima parte desta seção será dedicada a construção de uma nova teoria quântica compatível com os princípios da Relatividade.

### 1.1.2 A simples teoria de várias partículas livres

Na teoria da Relatividade Especial, a equivalência entre massa e energia permite que existam processos onde ocorra a criação ou aniquilação de partículas, ou seja, processos em que o número de partículas varie. Podemos citar como exemplo que, dependendo da energia do fóton, existe a possibilidade de este venha a criar um par partícula e antipartícula quando ele está nas vizinhanças de um átomo. Tendo em vista a variação do número de partículas ao longo de um processo, iremos desenvolver uma teoria que descarta a hipótese de manter o número de partículas fixo.

Nesta teoria de várias partículas, lidaremos com sistemas que possuem um número arbitrário de partículas livres, cujos estados pertencem ao espaço de **Fock**[4, 7]. Um estado que descreve duas partículas independentes é identificado por seus momentos, os quais chamaremos de  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$  (qualquer 3-vetor).

Vamos assumir que nossas partículas sem spin são bósons idênticos e conseqüentemente obedecem a estatística de Bose, de modo que o estado  $|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle$  é igual a  $|\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1\rangle$ . Estes estados serão normalizados da seguinte forma:

$$\langle \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 | \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_2) + \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_2) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1) \quad (1.1.26)$$

Tais estados são ortogonais, a não ser que os dois momentos envolvidos sejam iguais. Além disto, eles são autovetores da hamiltoniana e sua energia é a soma da energia associada a cada partícula, o mesmo vale para o momento. Portanto:

$$H |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle = (\omega_{\mathbf{p}_1} + \omega_{\mathbf{p}_2}) |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle, \quad \mathbf{p} |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle \quad (1.1.27)$$

Para mais partículas o procedimento é análogo. No entanto, quando não temos nenhuma partícula devemos considerar um único estado  $|0\rangle$  para que possamos ter uma base completa. A este estado damos o nome de **estado de vácuo**<sup>1</sup>. Tal estado será um autoestado da energia e do momento com autovalor igual a zero, ou seja:

$$H |0\rangle = 0, \quad \mathbf{p} |0\rangle = 0 \quad (1.1.28)$$

Para qualquer observador, o estado sem partículas deve ser o mesmo, ou seja, ele deve ser invariante sob as transformações de Lorentz ( $U(\Lambda) |0\rangle = |0\rangle$ ). Além disto normalizaremos este estado da seguinte maneira:

$$\langle 0 | 0 \rangle = 1 \quad (1.1.29)$$

Agora temos todos os estados que precisamos para formar uma base para o espaço de Fock. Um estado geral  $|\Psi\rangle$ , pertencente ao espaço de Fock, será a combinação linear desses vetores:

$$|\Psi\rangle = \psi_0 |0\rangle + \int \psi_1(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\rangle d^3\mathbf{p} + \frac{1}{2!} \int \psi_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2 + \dots \quad (1.1.30)$$

$$+ \frac{1}{n!} \int \psi_n(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n) |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\rangle d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2 \dots d^3\mathbf{p}_n \quad (1.1.31)$$

Como a ordem dos momentos dentro do ket não importam e a função de bósons idênticos é simétrica, então introduzimos o fator  $\frac{1}{n!}$  na frente das integrais para evitar a contagem de um estado mais de uma vez. Note que trabalhar com esses estados gerais nos leva a expressões longas e torna as contas trabalhosas, o que nos leva a buscar outro método que facilite todo o processo, veremos mais sobre essa outra abordagem na próxima seção.

## Representação pelo número de ocupação

Para lidarmos com estados normalizáveis, vamos aprisionar nosso sistema dentro de um cubo de dimensão  $L$ . Como consequência disto, teremos valores discretos de momento:

$$\mathbf{p} = \left( \frac{2\pi n_x}{L}, \frac{2\pi n_y}{L}, \frac{2\pi n_z}{L} \right) \quad (1.1.32)$$

onde os números  $n_x$ ,  $n_y$  e  $n_z$  são inteiros para que as condições de contorno sejam satisfeitas. Conseqüentemente, por termos momentos discretos, os estados também serão discretos e serão normalizados da seguinte forma:

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \quad (1.1.33)$$

Nomear os estados pelo momento de cada partícula que o compõe é complicado, pois temos que lidar com todas as permutações simétricas dos momentos. Para contornarmos tal problema, podemos utilizar o conceito de números de ocupação  $N(\mathbf{p})$ , o qual nos diz quantas partículas do sistema possuem um momento  $\mathbf{p}$ , com a condição de que o número de partículas seja sempre finito. Como consequência dessa redefinição da nossa base, o Hamiltoniano e o momento do sistema assumem expressões simples<sup>[4]</sup>:

<sup>1</sup>É importante ressaltar que o estado de vácuo não é a mesma coisa que o designado pelo 3-momento nulo ( $|\mathbf{0}\rangle \neq |0\rangle$ ).

$$H = \sum_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}} N(\mathbf{p}), \quad \mathbf{p} = \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} N(\mathbf{p}) \quad (1.1.34)$$

Note que essas relações são muito parecidas com um sistema de infinitos osciladores harmônicos desacoplados[8], com a diferença de que a menor energia do oscilador harmônico é  $\frac{1}{2}\omega$  e aqui a menor energia é 0. Portanto, iremos considerar que nosso sistema é um conjunto de infinitos objetos análogos a osciladores harmônicos, um para cada ponto no espaço de momento. O análogo ao número de excitação do oscilador é o número de ocupação. Tendo em vista essa semelhança entre os sistemas, também podemos definir operadores escada para nosso sistema. No entanto, teremos um par desses operadores para cada ponto no espaço de momentos, ou seja, teremos  $a_{\mathbf{p}}$  e  $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$ . Estes operadores possuem as mesmas propriedades que os do oscilador harmônico[8]:

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}] = 0 \quad (1.1.35)$$

$$[a_{\mathbf{p}}^{\dagger}, a_{\mathbf{p}'}^{\dagger}] = 0 \quad (1.1.36)$$

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^{\dagger}] = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \quad (1.1.37)$$

O Hamiltoniano do nosso sistema de partículas livres poderá ser escritos como:

$$H = \sum_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}} \quad (1.1.38)$$

No oscilador harmônico os operadores escada aumentam ou diminuem o nível de excitação. Portanto, de maneira análoga, os operadores  $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$  e  $a_{\mathbf{p}}$  aumentam ou diminuem o número de ocupação para um determinado momento linear  $\mathbf{p}$ , ou seja, fisicamente eles criam ou aniquilam partículas. Deste modo, os chamaremos de **operadores de criação e aniquilação**. Para criarmos um estado de  $n$  partículas livres e idênticas com momentos  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ , basta aplicarmos os operadores de criação  $a_{\mathbf{p}_1}^{\dagger}, a_{\mathbf{p}_2}^{\dagger}, \dots, a_{\mathbf{p}_n}^{\dagger}$  no estado de vácuo:

$$|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\rangle = a_{\mathbf{p}_1}^{\dagger} a_{\mathbf{p}_2}^{\dagger} \dots a_{\mathbf{p}_n}^{\dagger} |0\rangle \quad (1.1.39)$$

Agora podemos considerar o caso sem condições de contorno, ou seja, o limite  $L \rightarrow \infty$ . Tal passo nos levará do discreto ao contínuo, de modo que tenhamos de trocar os deltas de Kronecker por deltas de Dirac e substituir as somatórias por integrais. As relações que eram discretas passam a ser contínuas:

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^{\dagger}] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (1.1.40)$$

$$H = \int d^3\mathbf{p} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} a_{\mathbf{p}} = \int d^3\mathbf{p} \omega_{\mathbf{p}} N(\mathbf{p}) \quad (1.1.41)$$

$$\langle \mathbf{p}' | \mathbf{p} \rangle = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (1.1.42)$$

Sabendo a álgebra desses operadores, podemos agora estudar como eles são afetados pelas transformações de Lorentz. Para isto, é necessário normalizá-los relativisticamente, de maneira análoga ao que já fizemos com os estados. Relativisticamente, os operadores de criação e aniquilação serão  $\alpha^{\dagger}(p)$  e  $\alpha(p)$ :

$$\alpha^{\dagger}(p) = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} \quad (1.1.43)$$

$$\alpha(p) = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}} \quad (1.1.44)$$

Onde  $p$  representa o quadrimomento da partícula criada ou aniquilada. Operando no estado de vácuo esses operadores fazem a mesma coisa que  $a_{\mathbf{p}}^{\dagger}$  e  $a_{\mathbf{p}}$ , porém com a normalização relativística:

$$\alpha^{\dagger}(p) |0\rangle = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} |0\rangle = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} |\mathbf{p}\rangle = |p\rangle \quad (1.1.45)$$

Podemos determinar suas propriedades de transformação utilizando o que já sabemos sobre as transformações dos kets. Primeiramente, vamos considerar o estado de vácuo, o qual é o mesmo para qualquer observador:

$$U(\Lambda) |0\rangle = |0\rangle \quad (1.1.46)$$

Para o estado de uma única partícula  $|p\rangle$ :

$$U(\Lambda) |p\rangle = |\Lambda p\rangle \quad (1.1.47)$$

Consequentemente, para  $n$  partículas teremos:

$$U(\Lambda) |p_1, p_2, \dots, p_n\rangle = |\Lambda p_1, \Lambda p_2, \dots, \Lambda p_n\rangle \quad (1.1.48)$$

Utilizando essas propriedades vemos que:

$$\begin{aligned} |\Lambda p\rangle &= U(\Lambda) |p\rangle \\ |\Lambda p\rangle &= U(\Lambda) \alpha^\dagger(p) |0\rangle \\ |\Lambda p\rangle &= U(\Lambda) \alpha^\dagger(p) U^\dagger(\Lambda) U(\Lambda) |0\rangle \\ |\Lambda p\rangle &= U(\Lambda) \alpha^\dagger(p) U^\dagger(\Lambda) |0\rangle \end{aligned}$$

Onde usamos que  $U^\dagger(\Lambda) = U^{-1}(\Lambda)$ . Como  $|\Lambda p\rangle = \alpha^\dagger(\Lambda p) |0\rangle$ :

$$\alpha^\dagger(\Lambda p) |0\rangle = U(\Lambda) \alpha^\dagger(p) U^\dagger(\Lambda) |0\rangle \implies \alpha^\dagger(\Lambda p) = U(\Lambda) \alpha^\dagger(p) U^\dagger(\Lambda) \quad (1.1.49)$$

Para o operador  $\alpha(p)$  basta tomar o conjugado hermitiano:

$$\alpha(\Lambda p) = U(\Lambda) \alpha(p) U^\dagger(\Lambda) \quad (1.1.50)$$

Nós sabemos que o operador unitário de translações pode ser escrito como  $U(a) = e^{iP^\mu a_\mu}$  e que ele possui as seguintes propriedades:

$$P^\mu |0\rangle = 0, \quad P^\mu |p_1, p_2, \dots, p_n\rangle = (p_1^\mu + p_2^\mu + \dots + p_n^\mu) |p_1, p_2, \dots, p_n\rangle \quad (1.1.51)$$

Consequentemente teremos que:

$$U(a) |0\rangle = |0\rangle \quad (1.1.52)$$

E também:

$$U(a) |p_1, p_2, \dots, p_n\rangle = e^{ia_\mu (p_1^\mu + p_2^\mu + \dots + p_n^\mu)} |p_1, p_2, \dots, p_n\rangle \quad (1.1.53)$$

Fazendo o análogo ao que fizemos para as transformações de Lorentz, temos que, para as translações:

$$e^{iP^\mu x_\mu} \alpha^\dagger(p) e^{-iP^\mu x_\mu} = e^{ip^\mu x_\mu} \alpha^\dagger \quad (1.1.54)$$

$$e^{iP^\mu x_\mu} \alpha(p) e^{-iP^\mu x_\mu} = e^{-ip^\mu x_\mu} \alpha \quad (1.1.55)$$

## 1.2 Construindo um campo escalar quântico

Na teoria quântica não relativística, sabemos que cada operador hermitiano é um observável, o qual pode ser medido por qualquer observador. Quando realizamos uma medida de um observável  $\hat{A}$  em um sistema, nós só podemos obter os autovalores  $a_i$  desse observável. Supondo que nossa medida resultou em  $a_0$ , o estado do sistema será projetado no subespaço de autovetores que possuem o autovalor  $a_0$ . Consequentemente, se realizarmos uma nova medida de  $\hat{A}$ , obteremos novamente  $a_0$ . Agora vamos supor que alguém meça um observável  $\hat{B}$  antes realizarmos uma segunda medida de  $\hat{A}$ , então existirão dois casos possíveis:

1. Se  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  comutam, então o estado do sistema não é alterado, visto que eles possuem os mesmos autoestados e a medida de  $\hat{B}$  será seu autovalor  $b_i$  associado aos autovetores que possuem  $a_0$  como autovalor. Desta forma, a segunda medida de  $\hat{A}$  resultará em  $a_0$ .
2. Se  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  não comutam, então a medida de  $\hat{B}$  alterará o sistema, o qual não será mais um autoestado de  $\hat{A}$  e conseqüentemente a segunda medida poderá resultar em valores diferentes de  $a_0$ .

Com isto, vemos que, dado um sistema, existem observáveis compatíveis uns com os outros. Se dissermos que um observador pode medir todos os observáveis desse sistema, então encontraremos problemas na teoria relativística. Voltemos ao exemplo das medidas dos observáveis  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , agora vamos supor que eu estou na Terra e quem realiza a medida de  $\hat{B}$  está na galáxia de Andrômeda, que fica a 2.5 milhões de anos luz da Terra. Supondo que eu tenha um período finito de tempo (vida) e que  $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ , então quando eu realizar a segunda medida de  $\hat{A}$  verei que meu sistema foi alterado. No entanto, para que isso realmente aconteça, a informação da medida de  $\hat{B}$  teria que viajar até mim com velocidade superior a da luz, violando a relatividade. Portanto, vemos aqui que um observador não pode medir todos os observáveis, existem coisas que eu posso medir e outras coisas que outro observador pode medir e todas essas coisas devem comutar para que não violemos a causalidade relativística.

Suponhamos que temos duas regiões no espaço-tempo,  $R_1$  e  $R_2$ , onde nenhuma informação pode ir de  $R_1$  para  $R_2$  sem viajar mais rápido que a luz. Matematicamente teremos que o intervalo entre os pontos  $x_1 \in R_1$  e  $x_2 \in R_2$  é sempre tipo-espaço, ou seja:

$$(x_2 - x_1)^2 < 0 \quad (1.2.1)$$

Seja  $O_1$  qualquer observável que pode ser medido em  $R_1$  e  $O_2$  qualquer observável que pode ser medido em  $R_2$ . Para que nossa teoria seja compatível com a causalidade:

$$[O_1, O_2] = 0, \quad \text{se } (x_2 - x_1)^2 < 0 \quad (1.2.2)$$

Portanto, todo operador hermitiano que pode ser medido em  $R_1$  deve comutar com todos os mensuráveis em  $R_2$ . Tal fato nos mostra que os operadores dependem da sua localização no espaço-tempo, ou seja, são objetos locais. Na eletrodinâmica clássica, temos algo análogo, pois as soluções das equações de Maxwell nos fornecem os campos elétricos e magnéticos, os quais são objetos locais que respeitam a causalidade relativística. Tal exemplo nos leva a interpretar esses operadores locais como o análogo quântico dos campos clássicos relativísticos. Portanto, temos que construir um campo quântico  $\phi(x)$  ou um conjunto  $\{\phi^a(x)\}$  como funções do espaço e do tempo, de modo que os observáveis que podemos medir na região  $R_1$  são obtidos a partir deles. Com isso, vemos que a imposição da causalidade relativística na Mecânica Quântica nos leva naturalmente aos campos quânticos.

### 1.2.1 A forma explícita do campo escalar quântico

Aqui iremos construir nossos observáveis a partir de um conjunto de  $N$  campos quânticos  $\phi^a(x)$  ( $a = 1, \dots, N$ ), onde cada campo é um operador que é função dos pontos  $x^\mu$  no espaço-tempo. Para que os campos nos forneçam uma definição de localidade, vamos impor um conjunto de condições que eles devem satisfazer. Tais condições são:

1. Para garantir que os observáveis em regiões com separação tipo-espaço comutem:  $[\phi^a(x), \phi^b(y)] = 0$ , se  $(x - y)^2 < 0$  (tipo-espaço).
2. Os campos devem ser Hermitianos, para que os operadores sejam observáveis:  $\phi^a(x) = \phi^a(x)^\dagger$ .
3. Os campos se transformam sob translações como:  $e^{-iP_\mu y^\mu} \phi^a(x) e^{iP_\mu y^\mu} = \phi^a(x - y)$ .
4. Os campos se transformam sob transformações de Lorentz como:  $U(\Lambda)^\dagger \phi^a(x) U(\Lambda) = \phi^a(\Lambda^{-1}x)$ .
5. Os campos são combinações lineares dos operadores de criação e aniquilação:  

$$\phi^a(x) = \int d^3\mathbf{p} [F_{\mathbf{p}}^a(x) a_{\mathbf{p}} + G_{\mathbf{p}}^a(x) a_{\mathbf{p}}^\dagger]$$

Como vimos na seção anterior, os operadores de criação e aniquilação simplificam a operação na teoria de várias partículas livres e também pudemos utilizá-los para escrever a Hamiltoniana, que é um observável. Portanto, inspirados nisto, propusemos a condição 5 como forma de simplificar o formalismo dos campos escalares quânticos utilizando as propriedades de  $a_{\mathbf{p}}$  e  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$  que vimos anteriormente. Devido a quarta condição, podemos construir o campo em qualquer ponto do espaço-tempo a partir do campo na origem:

$$\phi(x) = e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}\phi(0)e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} \quad (1.2.3)$$

Aqui será conveniente escrever os campos como uma combinação dos operadores  $\alpha(p)$  e  $\alpha^\dagger(p)$  e utilizarmos o elemento de volume invariante por Lorentz que discutimos na primeira seção deste capítulo:

$$\phi(0) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})} [f_p\alpha(p) + g_p\alpha^\dagger(p)] \quad (1.2.4)$$

Onde  $f_p$  e  $g_p$  são funções que dependem do 3-momento. Aplicando as transformações de Lorentz:

$$U(\Lambda)\phi(0)U^\dagger(\Lambda) = U(\Lambda) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})} [f_p\alpha(p) + g_p\alpha^\dagger(p)] U^\dagger(\Lambda) \quad (1.2.5)$$

Como  $\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})}$  é um escalar:

$$U(\Lambda)\phi(0)U^\dagger(\Lambda) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})} [f_pU(\Lambda)\alpha(p)U^\dagger(\Lambda) + g_pU(\Lambda)\alpha^\dagger(p)U^\dagger(\Lambda)] \quad (1.2.6)$$

Nós sabemos que  $U(\Lambda)\phi(0)U^\dagger(\Lambda) = \phi(\Lambda^{-1}0) = \phi(0)$  e que  $U(\Lambda)\alpha^\dagger(p)U^\dagger(\Lambda) = \alpha^\dagger(\Lambda p)$ . Portanto:

$$\phi(0) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})} [f_p\alpha(\Lambda p) + g_p\alpha^\dagger(\Lambda p)] \quad (1.2.7)$$

Definindo  $p' = \Lambda p$ , utilizando que  $\frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})} = \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}'})}$  e que  $f_p \rightarrow f_{\Lambda^{-1}p'}$  e  $g_p \rightarrow g_{\Lambda^{-1}p'}$ :

$$\phi(0) = \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}'})} [f_{\Lambda^{-1}p'}\alpha(p') + g_{\Lambda^{-1}p'}\alpha^\dagger(p')] \quad (1.2.8)$$

Comparando com a equação 1.2.4:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})} [f_{\Lambda^{-1}p}\alpha(p) + g_{\Lambda^{-1}p}\alpha^\dagger(p)] &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})} [f_p\alpha(p) + g_p\alpha^\dagger(p)] \\ \implies f_{\Lambda^{-1}p}\alpha(p) + g_{\Lambda^{-1}p}\alpha^\dagger(p) &= f_p\alpha(p) + g_p\alpha^\dagger(p) \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Como os operadores  $\alpha(p)$  e  $\alpha^\dagger(p)$  são linearmente independentes, temos que os coeficientes devem ser iguais para que a equação seja satisfeita. Logo:

$$f_p = f_{\Lambda^{-1}p} \quad \text{e} \quad g_p = g_{\Lambda^{-1}p} \quad (1.2.10)$$

Para qualquer valor de  $p$  ou  $\Lambda$ . Como o quadrimomento de uma partícula está restrito ao hiperboloide de massa invariante ( $p^2 = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = \mu^2$ ) e podemos ir para qualquer ponto do hiperboloide através das transformações de Lorentz então  $f_p$  e  $g_p$  devem ser constantes, as quais ainda chamaremos apenas de  $f$  e  $g$ .

Realizando agora uma translação do campo na origem para um ponto arbitrário:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} \left[ \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})} [f\alpha(p) + g\alpha^\dagger(p)] \right] e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} \\ \phi(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})} [f e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}\alpha(p)e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} + g e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}\alpha^\dagger(p)e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}] \end{aligned}$$

Mas vimos que  $e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}}\alpha(p)e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} = e^{-ip\cdot x}\alpha(p)$  e o análogo para seu complexo conjugado transposto. Logo:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})} [f e^{-ip\cdot x}\alpha(p) + g e^{ip\cdot x}\alpha^\dagger(p)] \\ \phi(x) &= f \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})} e^{-ip\cdot x}\alpha(p) + g \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})} e^{ip\cdot x}\alpha^\dagger(p) \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Aqui temos o campo em um ponto qualquer e é interessante notar que ele continua dependendo apenas de duas constantes arbitrárias. Note que, na verdade, nosso campo é escrito como a soma de dois campos independentes  $\phi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})} e^{-ip \cdot x} \alpha(p)$  e  $\phi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})} e^{ip \cdot x} \alpha^\dagger(p)$ :

$$\phi(x) = f \phi^{(+)}(x) + g \phi^{(-)}(x) \quad (1.2.12)$$

Lembrando que  $\alpha(p) = (2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}$ , temos:

$$\phi^{(+)}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} e^{-ip \cdot x} a_{\mathbf{p}} \quad \text{e} \quad \phi^{(-)}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} e^{ip \cdot x} a_{\mathbf{p}}^\dagger \quad (1.2.13)$$

Nós sabemos que nosso campo deve ser hermitiano, ou seja,  $\phi(x) = \phi(x)^\dagger$ . Logo, pela equação 4.1.5:

$$f \phi^{(+)}(x) + g \phi^{(-)}(x) = f^\dagger (\phi^{(+)}(x))^\dagger + g^\dagger (\phi^{(-)}(x))^\dagger \quad (1.2.14)$$

Note que  $(\phi^{(+)}(x))^\dagger = \phi^{(-)}(x)$ , pois  $(e^{-ip \cdot x})^\dagger = e^{ip \cdot x}$ . Portanto:

$$f \phi^{(+)}(x) + g \phi^{(-)}(x) = \phi(x) = f^\dagger \phi^{(-)}(x) + g^\dagger \phi^{(+)}(x) \quad (1.2.15)$$

Os campos  $\phi^{(+)}(x)$  e  $\phi^{(-)}(x)$  são independentes, visto  $a_{\mathbf{p}}$  e  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$  são independentes, os quais são ortogonais. Consequentemente, para que a igualdade seja satisfeita temos que:

$$f = g^\dagger \quad \text{e} \quad g = f^\dagger \quad (1.2.16)$$

A solução mais geral para essas condições é  $f = e^{i\theta}$  e  $g = e^{-i\theta}$  [4], onde  $\theta$  é um número pertencente aos reais. Substituindo este resultado na equação 4.1.5:

$$\phi(x) = e^{i\theta} \phi^{(+)}(x) + e^{-i\theta} \phi^{(-)}(x) \quad (1.2.17)$$

Para simplificarmos a expressão, podemos absorver as fases  $e^{\pm i\theta}$  nos operadores de criação e aniquilação de tal forma que:

$$\phi(x) = \phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x) \quad (1.2.18)$$

Além de hermitiano, este campo deve preservar a causalidade que discutimos anteriormente, ou seja,  $[\phi(x), \phi(y)] = 0$  para intervalos  $(x-y)^2$  tipo-espaço. Vamos calcular este comutador utilizando a expressão que acabamos de encontrar para o campo escalar livre:

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= [\phi^{(+)}(x) + \phi^{(-)}(x), \phi^{(+)}(y) + \phi^{(-)}(y)] \\ [\phi(x), \phi(y)] &= [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] - [\phi^{(+)}(y), \phi^{(-)}(x)] \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

onde usamos  $[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = 0$ . Utilizando as definições de  $\phi^{(+)}(x)$  e  $\phi^{(-)}(y)$ :

$$\begin{aligned} [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] &= \left[ \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} e^{-ip \cdot x} a_{\mathbf{p}}, \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}} e^{ip' \cdot y} a_{\mathbf{p}'}^\dagger \right] \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} e^{-ip \cdot x} \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}} e^{ip' \cdot y} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] \end{aligned}$$

Como  $[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ :

$$\begin{aligned} [\phi^{(+)}(x), \phi^{(-)}(y)] &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} e^{-ip \cdot x} \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}} e^{ip' \cdot y} \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})} e^{-ip \cdot (x-y)} \equiv \Delta_+(x-y; \mu^2) \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

Onde  $\Delta_+(x-y; \mu)$  é uma função de Neumann que depende do intervalo  $(x-y)$  e do quadrado da massa. Substituindo este resultado na equação 4.1.6:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \Delta_+(x-y; \mu^2) - \Delta_+(y-x; \mu^2) \equiv i\Delta(x-y) \quad (1.2.21)$$

Onde  $i\Delta(x-y)$  é uma nova função invariante por Lorentz. De maneira análoga a  $\Delta_+(x-y)$ , ela também depende do quadrado da massa, mas aqui como estamos tratando de apenas um tipo de partícula podemos omitir essa dependência. Como os vetores tipo-espaço encontram-se fora do cone de luz, então é possível levar um quadrivetor  $x$  em seu inverso  $-x$  através de transformações de Lorentz, conseqüentemente  $\Delta_+(x-y) = \Delta_+(y-x)$ , visto que a função é invariante por Lorentz. Desta forma:

$$\Delta_+(x-y) = \Delta_+(y-x), (x-y)^2 < 0 \implies [\phi(x), \phi(y)] = \Delta_+(x-y) - \Delta_+(x-y) = 0, (x-y)^2 < 0 \quad (1.2.22)$$

Portanto, vemos que a solução com  $f = e^{i\theta}$  e  $g = e^{-i\theta}$  satisfaz a condição de comutação para separações tipo-espaço. Conseqüentemente, chegamos que nosso campo é da forma:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} [e^{-ip \cdot x} a_{\mathbf{p}} + e^{ip \cdot x} a_{\mathbf{p}}^\dagger] \quad (1.2.23)$$

### 1.3 A quantização canônica

Na seção anterior, vimos que a imposição da causalidade na teoria quântica nos levou a necessidade de definir operadores locais no espaço-tempo e a construção do campo escalar quântico. Através das similaridades dos campos elétrico e magnético provenientes da eletrodinâmica clássica, notamos que esses operadores locais são o análogo quântico dos campos clássicos. Tendo isso em vista, esta seção tem como objetivo discutir um método geral de chegarmos em uma teoria quântica consistente com a Relatividade Especial utilizando como base as Teorias Clássicas de Campos relativísticas que já conhecemos, visto que elas nos garante a causalidade e a invariância sobre as transformações de Lorentz.

Na mecânica clássica nós possuímos três formalismos, sendo eles: o Newtoniano, o Lagrangiano e o Hamiltoniano. Todas essas formulações devem nos fornecer as mesmas equações de movimento para um determinado sistema, porém cada uma delas consiste em um método diferente. Neste estudo iremos nos ater apenas a mecânica Lagrangiana e Hamiltoniana, uma vez que a Newtoniana se torna muito complicada para sistemas com um grau de complexidade maior. O formalismo Lagrangiano parte do princípio de Hamilton[9, 10], o qual diz que de todos os caminhos que um sistema pode percorrer para sair de um ponto e ir para outro, ele irá por aquele que extremiza a ação  $S$ , a qual é definida como:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^i, \dot{q}^i, t), \quad i \in [1, N] \quad (1.3.1)$$

onde  $L(q^i, \dot{q}^i, t)$  é a diferença entre a energia cinética e a potencial do sistema[9], tal função é chamada de Lagrangiana. As variáveis dinâmicas  $q^i(t)$  são chamadas de coordenadas generalizadas e  $\dot{q}^i(t)$  são suas derivadas temporais, onde  $i$  é um índice que vai de 1 até o número de graus de liberdade  $N$  do sistema. Nos casos mais simples,  $q^i(t)$  podem ser as coordenadas espaciais das partículas que compõe o sistema. Utilizando cálculo variacional combinado ao princípio de Hamilton é possível obter as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L(q^i, \dot{q}^i, t)}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q^i, \dot{q}^i, t)}{\partial \dot{q}^i} = 0 \quad (1.3.2)$$

Definindo o momento canônico conjugado de  $q^i$  como  $p_i(q^i, \dot{q}^i, t) = \frac{\partial L(q^i, \dot{q}^i, t)}{\partial \dot{q}^i}$ :

$$\frac{\partial L(q^i, \dot{q}^i, t)}{\partial q^i} - \frac{dp_i(q^i, \dot{q}^i, t)}{dt} = 0 \quad (1.3.3)$$

Nós podemos definir uma nova função  $H(q^i(t), p_i(t), t)$  fazendo uma transformação de Legendre na nossa Lagrangiana:

$$H(q^i(t), p_i(t), t) \equiv p_i \dot{q}^i - L \quad (1.3.4)$$

onde  $H(q^i(t), p_i(t), t)$  é chamada de Hamiltoniana. De maneira análoga ao que acontece com a Lagrangiana, temos as equações de Hamilton[9] (equação de 1.3.5), as quais nos fornecem as equações de movimento do sistema a partir de sua Hamiltoniana.

$$-\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q^i} \quad \text{e} \quad \dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (1.3.5)$$

Além de nos fornecer as equações de movimento, a Hamiltoniana é igual à energia total do sistema caso a Lagrangiana não dependa explicitamente do tempo. Tal propriedade é importante, pois a energia do sistema é uma quantidade conservada quando  $L$  possui uma invariância sob translações temporais.

A mecânica clássica possui uma limitação, visto que ela aborda apenas sistemas com um número finito de graus de liberdade. No entanto, existem áreas da física como o eletromagnetismo de Maxwell ou gases clássicos onde precisamos de infinitos graus de liberdade para tratar o sistema. Deste modo, discutiremos a seguir uma extensão da mecânica clássica de partículas para sistemas que possuem um contínuo infinito de graus de liberdade, dando origem ao que chamaremos de Teoria Clássica de Campos[11]. Ao invés de representarmos o sistema pelas variáveis dinâmicas  $q^i(t)$  que evoluem no tempo, utilizaremos um conjunto  $\phi^i(\mathbf{x}, t)$  de funções definidas em cada ponto  $\mathbf{x}$  do espaço, as quais são os campos. Note que, além do índice discreto que já tínhamos na mecânica clássica, a Teoria Clássica de Campos nos traz um outro que é contínuo ( $\mathbf{x}$ ), fornecendo assim os infinitos graus de liberdade necessários para descrever certos sistemas.

Na mecânica clássica, as coordenadas da posição  $\mathbf{x}$  de uma partícula são utilizadas como variáveis dinâmicas do sistema e o tempo é apenas um parâmetro. No entanto, ao passarmos para a Teoria Clássica de Campos, os campos se tornam essas variáveis e a posição é apenas um parâmetro deles, assim como o tempo era na mecânica clássica. Portanto, se na mecânica clássica a ação  $S$  é a integral de uma função local parametrizada pelo tempo, então na Teoria Clássica de Campos ela deve ser uma integral de uma função local no espaço e no tempo, visto que ambos são apenas parâmetros. Além disto, o integrando além de envolver as derivadas de primeira ordem no tempo devem também contar com derivadas de primeira ordem espaciais, ou seja,  $\dot{q}^i(t)$  é trocado por  $\partial_\mu \phi^i(\mathbf{x}, t)$ . Logo, podemos definir uma lagrangiana como

$$L = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}(\phi^i(\mathbf{x}, t), \partial_\mu \phi^i(\mathbf{x}, t)) \quad (1.3.6)$$

onde  $\mathcal{L}(\phi^i(\mathbf{x}, t), \partial_\mu \phi^i(\mathbf{x}, t))$  é chamada de densidade de Lagrangiana. Com esta definição a ação da Teoria Clássica de Campos fica definida como:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi^i(\mathbf{x}, t), \partial_\mu \phi^i(\mathbf{x}, t)) \quad (1.3.7)$$

De maneira análoga a mecânica clássica, ao impormos o princípio de Hamilton e extremizarmos a ação obtemos<sup>2</sup>[11, 12]:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} = 0 \quad (1.3.8)$$

Aqui também podemos definir um momento conjugado ao campo como  $\pi_i^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)}$ , de tal forma que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \partial_\mu \pi_i^\mu = 0 \quad (1.3.9)$$

Ou seja, re-obtemos as mesmas equações de Euler-Lagrange para  $\mathcal{L}$ . Fazendo novamente um paralelo com a mecânica clássica, ao realizarmos uma transformação de Legendre na Lagrangiana nós obtemos [4]:

$$H = \left( \int d^3\mathbf{x} \pi_i^0 \dot{\phi}^i \right) - L \implies H = \int d^3\mathbf{x} \left( \pi_i^0 \dot{\phi}^i - \mathcal{L} \right) \quad (1.3.10)$$

<sup>2</sup>Para evitar uma notação sobrecarregada, omitimos a dependência de  $\mathcal{L}$  em  $\phi^i(\mathbf{x}, t)$ ,  $\partial_\mu \phi^i(\mathbf{x}, t)$  e de  $\phi^i$  em  $\mathbf{x}$  e  $t$ .

Definindo a densidade de Hamiltoniana  $\mathcal{H}$  como  $\pi_i^0 \dot{\phi}^i - \mathcal{L}$ :

$$H = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H} \quad (1.3.11)$$

Como objetivo final, desejamos construir um método que nos leva da Teoria Clássica de campos para a Teoria Quântica de Campos, a qual trata sistemas quânticos com infinitos graus de liberdade. Para isto, iremos utilizar um mecanismo chamado de quantização canônica. Na mecânica clássica, variáveis dinâmicas  $q^i(t)$  e  $p_i(t)$ , que representam o sistema, formam um conjunto que satisfaz os colchetes de Poisson canônicos[13]:

$$\{q^i(t), q^j(t)\} = 0 = \{p_i(t), p_j(t)\} \quad \text{e} \quad \{q^i(t), p_j(t)\} = \delta_j^i \quad (1.3.12)$$

O princípio de quantização canônica estabelece que os operadores quânticos satisfazem relações de comutação análogas aos colchetes de Poisson clássicos:

$$[\hat{q}^i(t), \hat{q}^j(t)] = 0 = [\hat{p}_i(t), \hat{p}_j(t)] \quad \text{e} \quad [\hat{q}^i(t), \hat{p}_j(t)] = i\delta_j^i \quad (1.3.13)$$

O Hamiltoniano do sistema quântico é o mesmo do caso clássico, com a diferença que agora ele é escrito como função dos operadores  $\hat{q}^i(t)$  e  $\hat{p}_i(t)$ :

$$\hat{H} = \hat{H}(\hat{q}^i(t), \hat{p}_i(t)) \quad (1.3.14)$$

Podemos estender o princípio de quantização canônica para sistemas com infinitos graus de liberdade, ou seja, para a Teoria Clássica de Campos. Portanto, devemos substituir os campos  $\phi^i(\mathbf{x}, t)$  e seu momento conjugado  $\pi_i^0(\mathbf{x}, t)$  por operadores  $\hat{\phi}^i(\mathbf{x}, t)$  e  $\hat{\pi}_i^0(\mathbf{x}, t)$  que satisfazem as seguintes relações de comutação[4]:

$$[\hat{\phi}^i(\mathbf{x}, t), \hat{\phi}^j(\mathbf{y}, t)] = 0 = [\hat{\pi}_i^0(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}_j^0(\mathbf{y}, t)] \quad \text{e} \quad [\hat{\phi}^i(\mathbf{x}, t), \hat{\pi}_j^0(\mathbf{y}, t)] = i\delta_j^i \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (1.3.15)$$

Analogamente, a Hamiltoniana e sua densidade serão funções de  $\hat{\phi}^i(\mathbf{x}, t)$  e  $\hat{\pi}_i^0(\mathbf{x}, t)$ . A quantização da Teoria Clássica de Campos resulta na Teoria Quântica de Campos.

### 1.3.1 A quantização do campo escalar clássico livre

Na teoria clássica de campos, a Lagrangiana e a Hamiltoniana de um campo livre são[11, 4]:

$$L = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} (\partial_\mu \phi(\mathbf{x}, t) \partial^\mu \phi(\mathbf{x}, t) - \mu^2 \phi(\mathbf{x}, t)^2) \quad (1.3.16)$$

$$H = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left( (\pi^0(\mathbf{x}, t))^2 + |\nabla \phi(\mathbf{x}, t)|^2 + \mu^2 \phi(\mathbf{x}, t)^2 \right) \quad (1.3.17)$$

A partir de  $\mathbf{L}$  podemos calcular o momento conjugado:

$$\begin{aligned} \pi^\mu(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi(\mathbf{x}, t) \partial^\nu \phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} 2\partial^\nu \phi(\mathbf{x}, t) \delta_\nu^\mu \\ \implies \pi^\mu(\mathbf{x}, t) &= \partial^\mu \phi(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

Devido à métrica de Minkowski ser  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ , temos que  $\partial^0 = g^{0\alpha} \partial_\alpha = \partial_0$ . Logo:

$$\pi^0(\mathbf{x}, t) = \partial_0 \phi(\mathbf{x}, t) = \dot{\phi}(\mathbf{x}, t) \quad (1.3.18)$$

Substituindo este resultado na densidade de Hamiltoniana (equação 1.3.17):

$$H = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left( \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)^2 + |\nabla \phi(\mathbf{x}, t)|^2 + \mu^2 \phi(\mathbf{x}, t)^2 \right) \quad (1.3.19)$$

Segundo o mecanismo de quantização canônica que discutimos anteriormente, para chegarmos na Hamiltoniana do campo escalar quântico, basta promovermos  $\phi(\mathbf{x}, t)$  e  $\pi^0(\mathbf{x}, t) = \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)$  a operadores, obrigando-os a obedecer as seguintes relações de comutação<sup>3</sup>:

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (1.3.20)$$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad (1.3.21)$$

$$[\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad (1.3.22)$$

A expressão da Hamiltoniana permanece a mesma da equação 1.3.19, com a diferença de que agora  $\phi(\mathbf{x}, t)$  e  $\dot{\phi}(\mathbf{x}, t)$  são operadores:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left( \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)^2 + |\nabla\phi(\mathbf{x}, t)|^2 + \mu^2\phi(\mathbf{x}, t)^2 \right) \quad (1.3.23)$$

Na segunda parte deste capítulo, nós construímos uma expressão para o campo escalar quântico livre utilizando os operadores de criação e aniquilação (equação 1.2.23). Tal expressão obedece as relações de comutação canônicas, como demonstrado no apêndice A. Consequentemente, podemos utilizar este campo para calcularmos a Hamiltoniana em função de  $a_{\mathbf{p}}$  e  $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ . Os termos presentes na Hamiltoniana podem ser escritos como:

$$\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)^2 = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} \left[ -\omega_{\mathbf{p}}^2 \left( e^{-2i\omega_{\mathbf{p}}t} a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} + e^{2i\omega_{\mathbf{p}}t} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger \right) + \omega_{\mathbf{p}}^2 \left( a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \right) \right] \quad (1.3.24)$$

$$\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} |\nabla\phi(\mathbf{x}, t)|^2 = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} |\mathbf{p}|^2 \left[ a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'}^\dagger + e^{-2i\omega_{\mathbf{p}}t} a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} + e^{2i\omega_{\mathbf{p}}t} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'} \right] \quad (1.3.25)$$

$$\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mu^2 \phi(\mathbf{x}, t)^2 = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} \mu^2 \left[ e^{-2i\omega_{\mathbf{p}}t} a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + e^{2i\omega_{\mathbf{p}}t} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger \right] \quad (1.3.26)$$

O cálculo detalhado dessas expressões pode ser encontrado no apêndice B. Somando esses termos:

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} \left[ \left( -\omega_{\mathbf{p}}^2 + |\mathbf{p}|^2 + \mu^2 \right) \left( e^{-2i\omega_{\mathbf{p}}t} a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} + e^{2i\omega_{\mathbf{p}}t} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger \right) \left( \omega_{\mathbf{p}}^2 + |\mathbf{p}|^2 + \mu^2 \right) \left( a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \right) \right] \quad (1.3.27)$$

Por definição,  $\omega_{\mathbf{p}}^2 = |\mathbf{p}|^2 + \mu^2$ , logo  $-\omega_{\mathbf{p}}^2 + |\mathbf{p}|^2 + \mu^2 = 0$  e  $\omega_{\mathbf{p}}^2 + |\mathbf{p}|^2 + \mu^2 = 2\omega_{\mathbf{p}}^2$ . Portanto:

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} \left[ 2\omega_{\mathbf{p}}^2 \left( a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \right) \right] = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{p} \omega_{\mathbf{p}} \left( a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \right) \quad (1.3.28)$$

Como  $a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger = a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}}^\dagger] = a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + \delta^3(0)$ :

$$H = \int d^3\mathbf{p} \omega_{\mathbf{p}} \left( \frac{1}{2} \delta^3(0) + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \right)$$

Note que esta é quase a expressão que esperávamos, visto que o segundo termo consiste na Hamiltoniana que discutimos quando abordamos o espaço de Fock. No entanto, ela difere da equação 1.1.41 por uma constante  $\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{p} \omega_{\mathbf{p}} \delta^3(0)$ , a qual é infinita. Tal infinito não é um grande problema, uma vez que só podemos medir diferenças de energia e a Hamiltoniana está diretamente ligada a energia do sistema.

Se voltarmos à equação 1.3.28, podemos ver que a soma consiste no mesmo termo porém com ordenamentos diferentes. Portanto, uma maneira de interpretar a causa do problema da constante infinita é dizer que o mecanismo de quantização canônica nos leva a resposta certa, porém ele também traz uma ambiguidade na ordem dos operadores. Deste modo, podemos propor como solução um jeito padrão de se ordenar os operadores, o qual chamaremos de **ordenação normal**[4]. Tal método consiste em sempre ordenar um produto de modo que todos os operadores de criação fiquem a esquerda e os de aniquilação fiquem a direita. Além disto, denotaremos a utilização da ordenação normal de um produto de campos escalares da seguinte forma:

<sup>3</sup>A fim de não sobrecarregar as notações, daqui em diante faremos  $\hat{\phi}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \phi(\mathbf{x}, t)$  e  $\hat{\pi}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \pi(\mathbf{x}, t)$ .

$$: \phi^1 \phi^2 \dots \phi^n : \quad (1.3.29)$$

Portanto, nosso problema com a constante infinita pode ser resolvido simplesmente aplicando a ordenação normal a nossa Hamiltoniana inicial (equação 1.3.23):

$$H =: \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x} \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)^2 + \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x} |\nabla \phi(\mathbf{x}, t)|^2 + \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x} \mu^2 \phi(\mathbf{x}, t)^2 : \quad (1.3.30)$$

Fazendo exatamente os mesmo passos, chegaremos na equação 1.3.28, porém com a indicação de que devemos reordenar os operadores de criação e aniquilação. Aplicando a ordenação normal aos operadores temos:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{p} \omega_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger) = \int d^3 \mathbf{p} \omega_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \quad (1.3.31)$$

Note que, com a ordenação normal obtivemos exatamente o resultado que esperávamos.

# Capítulo 2

## Campo de Dirac

No capítulo anterior estudamos campos escalares, os quais, sob transformações de Lorentz, se transformam da seguinte maneira:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) \quad (2.0.1)$$

onde  $\Lambda$  é a matriz das transformações de Lorentz. Além disto, também vimos que quando quantizados, esses campos descrevem a partículas de spin 0. No entanto, para que possamos calcular o momento magnético anômalo do múon, precisamos de campos relacionados à partículas com momento angular intrínseco. Portanto, esta seção será dedicada ao estudo deste tipo de campo, mais especificamente o campo de Dirac, o qual descreve férmions de spin 1/2.

Na Teoria Quântica de Campos, partículas que possuem spin aparecem naturalmente quando consideramos campos que não se transformam de maneira trivial sob transformações de Lorentz, como os escalares. De maneira geral, consideraremos campos que se transformam da seguinte maneira:

$$\phi^a(x) \rightarrow \varphi'^a(x) = D(\Lambda)^a_b \phi^b(\Lambda^{-1}x) \quad (2.0.2)$$

onde  $D(\Lambda)$  são matrizes que formam uma representação do grupo de Lorentz, o qual é composto por *boosts* e rotações. Portanto, para estudarmos o campo de Dirac, temos que discutir primeiramente como encontrar as representações do grupo de Lorentz.

### 2.1 As representações do grupo de Lorentz

Uma das propriedades que define um grupo  $G$  é a multiplicação de seus elementos ser fechada[14], ou seja, o produto de dois elementos do grupo também deve pertencer ao grupo. Consequentemente, qualquer representação do grupo deve refletir essa propriedade. Portanto, se  $D(\Lambda)$  formam representações do grupo de Lorentz, essas matrizes devem satisfazer:

$$D(\Lambda_1)D(\Lambda_2) = D(\Lambda_1\Lambda_2) \quad (2.1.1)$$

onde  $\Lambda_1$  e  $\Lambda_2$  são quaisquer dois elementos do grupo de Lorentz. Tal propriedade impõe uma restrição sob as matrizes  $D(\Lambda)$ . Como os elementos do grupo de Lorentz estão continuamente conectados à identidade e podem ser descritos por seis parâmetros contínuos independentes, sendo três deles de *boost* ( $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ ) e três de rotação ( $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ), então ele é um grupo de Lie. Consequentemente, para parâmetros infinitesimais próximos da identidade, as matrizes  $D(\Lambda)$  podem ser escritas como[15]:

$$D(\delta\Lambda) = I + i(\delta\theta_m J^m + \delta\zeta_m K^m) + \dots \quad (2.1.2)$$

onde  $J^m$  e  $K^m$  são os geradores das rotações e dos *boosts* tridimensionais, respectivamente<sup>1</sup>. Como a transformação é infinitesimal, podemos desprezar os termos de segunda ordem nos parâmetros, de modo que:

$$D(\delta\Lambda) = I + i(\delta\theta_m J^m + \delta\zeta_m K^m) \quad (2.1.3)$$

---

<sup>1</sup>Em 2.1.2 e nas expressões seguintes adotamos a convenção de Einstein de soma implícita sobre índices repetidos.

Tendo em vista a propriedade 2.1.1, para obtermos uma expressão para transformações finitas, podemos dividir os parâmetros  $\theta_m$  e  $\zeta_m$  em  $k$  intervalos pequenos de tamanho  $\delta\theta_m$  e  $\delta\zeta_m$  e então fazer uma composição de  $k$  transformações infinitesimais:

$$D(\Lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ 1 + i \left( \frac{\delta\theta_m}{k} J^m + \frac{\delta\zeta_m}{k} K^m \right) \right]^k = e^{i(\theta_m J^m + \zeta_m K^m)} \quad (2.1.4)$$

Através deste resultado, vemos que a representação do grupo de Lorentz é obtida via matrizes que representam os geradores do grupo. Tais geradores devem obedecer um conjunto de relações de comutação chamado de álgebra de Lie do grupo, as quais independem da representação escolhida. Para encontrarmos essas relações de comutação para o grupo de Lorentz, iremos partir das transformações infinitesimais na representação quadrivetorial ( $D(\Lambda)^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu$ ), onde uma transformação de Lorentz qualquer é dada por  $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ . Uma transformação infinitesimal,  $\Lambda^\mu{}_\nu$  pode ser escrita como:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \quad (2.1.5)$$

onde  $\omega$  é uma matriz de elementos infinitesimais.

Sabemos que a métrica de Minkowski,  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ , é um invariante de Lorentz, ou seja,  $\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta g^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}$ . Substituindo a forma infinitesimal nesta condição e mantendo apenas os termos de primeira ordem, obtemos:

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= (\delta^\mu{}_\alpha + \omega^\mu{}_\alpha)(\delta^\nu{}_\beta + \omega^\nu{}_\beta)g^{\alpha\beta} \\ g^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} + \omega^{\mu\nu} + \omega^{\nu\mu} \implies \omega^{\mu\nu} + \omega^{\nu\mu} = 0 \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Portanto,  $\omega^{\mu\nu}$  é uma matriz antissimétrica. Note que uma matriz 4x4 antissimétrica possui apenas seis componentes independentes, o que está de acordo com o número de parâmetros do grupo de Lorentz. Desta forma, definimos  $\omega_{ij} = e_{ij}{}^k \delta\theta_k$  e  $\omega_{0i} = \delta\zeta_i$ :

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \delta\zeta_1 & \delta\zeta_2 & \delta\zeta_3 \\ -\delta\zeta_1 & 0 & -\delta\theta_3 & \delta\theta_2 \\ -\delta\zeta_2 & \delta\theta_3 & 0 & -\delta\theta_1 \\ -\delta\zeta_3 & -\delta\theta_2 & \delta\theta_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1.7)$$

Agora vamos retornar à nossa transformação infinitesimal para encontrarmos os geradores do grupo nesta representação:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}(g^{\alpha\mu}\delta^\beta{}_\nu - g^{\beta\mu}\delta^\alpha{}_\nu) \quad (2.1.8)$$

Definindo  $(\mathcal{J}^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = -i(g^{\alpha\mu}\delta^\beta{}_\nu - g^{\beta\mu}\delta^\alpha{}_\nu)$ :

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(\mathcal{J}^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu \quad (2.1.9)$$

Utilizando que  $\omega_{ij} = e_{ij}{}^k \delta\theta_k$ ,  $\omega_{0i} = \delta\zeta_i$  e que  $(\mathcal{J}^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu$  é antissimétrica por definição, chegamos na seguinte expressão:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + i\delta\zeta_m(\mathcal{J}^{0m})^\mu{}_\nu + i\delta\theta_n \frac{1}{2}\varepsilon_{ml}{}^n(\mathcal{J}^{ml})^\mu{}_\nu \quad (2.1.10)$$

Comparando com a equação 2.1.3, nós vemos que as seis componentes independentes da matriz  $(\mathcal{J}^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu$  são os geradores do grupo de Lorentz:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J}^{0m} = K^m \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{ml}{}^n \mathcal{J}^{ml} = J^n \implies \mathcal{J}^{ml} = \varepsilon_{mln} J^n, \quad m, l \in \{1, 2, 3\} \end{array} \right. \quad (2.1.11)$$

Dado que sabemos que  $\mathcal{J}^{\alpha\beta}$  são os geradores do grupo de Lorentz e que temos uma expressão para eles na representação quadrivetorial, somos capazes de calcular as relações de comutação:

$$\begin{aligned}
[\mathcal{J}^{\mu\nu}, \mathcal{J}^{\alpha\beta}]^\sigma{}_\rho &= (\mathcal{J}^{\mu\nu})^\sigma{}_\tau (\mathcal{J}^{\alpha\beta})^\tau{}_\rho - (\mathcal{J}^{\alpha\beta})^\sigma{}_\tau (\mathcal{J}^{\mu\nu})^\tau{}_\rho \\
&= -(g^{\mu\sigma} \delta^\nu{}_\tau - g^{\nu\sigma} \delta^\mu{}_\tau)(g^{\alpha\tau} \delta^\beta{}_\rho - g^{\beta\tau} \delta^\alpha{}_\rho) + (g^{\alpha\sigma} \delta^\beta{}_\tau - g^{\beta\sigma} \delta^\alpha{}_\tau)(g^{\mu\tau} \delta^\nu{}_\rho - g^{\nu\tau} \delta^\mu{}_\rho)
\end{aligned}$$

Realizando a multiplicação e utilizando que o tensor métrico é simétrico, podemos agrupar os termos da seguinte forma:

$$[\mathcal{J}^{\mu\nu}, \mathcal{J}^{\alpha\beta}] = i(g^{\nu\alpha} \mathcal{J}^{\beta\mu} - g^{\mu\alpha} \mathcal{J}^{\beta\nu} + g^{\mu\beta} \mathcal{J}^{\alpha\nu} - g^{\nu\beta} \mathcal{J}^{\alpha\mu}) \quad (2.1.12)$$

Esta é a álgebra de Lie dos geradores do grupo de Lorentz, a qual independe da representação escolhida. Portanto, como vimos anteriormente, se encontramos matrizes  $\mathcal{J}^{\mu\nu}$  que satisfaçam estas relações de comutação, então elas nos fornecerão uma representação para o grupo de Lorentz via equação 2.1.4.

## 2.2 Representação Espinorial

Tendo em vista a construção do campo de Dirac para descrever férmions de spin 1/2, a representação do grupo de Lorentz que nos interessa é a representação espinorial. Para construirmos esta representação, iremos apresentar a álgebra de Clifford e como ela pode ser usada para satisfazer a álgebra do grupo de Lorentz (equação 2.1.12). A álgebra de Clifford consiste em um conjunto de matrizes  $\gamma^\mu$  de dimensão  $d$ , com  $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$ , que satisfazem a seguinte relação[16]:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I_{d \times d} \quad (2.2.1)$$

onde  $I_{d \times d}$  é a identidade. Através do comutador das matrizes  $\gamma^\mu$  e da álgebra de Clifford, nós podemos construir o seguinte tensor antissimétrico[17]:

$$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{i}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu - \frac{i}{2}g^{\mu\nu} \quad (2.2.2)$$

Tal objeto satisfaz a álgebra de Lie dos geradores do grupo de Lorentz (equação 2.1.12), conseqüentemente ele fornece uma representação  $d$ -dimensional do grupo, a qual chamaremos de representação de espinor.

A menor e mais simples representação da álgebra de Clifford é dada por matrizes  $4 \times 4$ . Apesar de existirem vários exemplos de matrizes  $4 \times 4$  que satisfazem a relação 2.2.1, a mais comum é a representação de Weyl ou Quiral:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (2.2.3)$$

onde  $\sigma^i$  são as matrizes de Pauli. Utilizando a definição de  $S^{\mu\nu}$ , os geradores do grupo de Lorentz, nesta representação, serão dados por:

- **Boosts:**

$$S^{0i} = \frac{i}{2}\gamma^0\gamma^i = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & I_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} \quad (2.2.4)$$

- **Rotações:**

$$S^{ij} = \frac{i}{2}\gamma^i\gamma^j = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma^i\sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^i\sigma^j \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}, \quad i \neq j \quad (2.2.5)$$

Onde utilizamos que  $\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk}\sigma^k$ .

Como discutimos na seção anterior, uma vez que temos as matrizes dos geradores, nós podemos encontrar a representação de espinor do grupo de Lorentz,  $D(\Lambda) \equiv S(\Lambda)$ , fazendo o processo análogo ao da equação 2.1.4, porém com a transformação infinitesimal 2.1.9. Assim, obteremos que:

$$S(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}} = e^{i(\omega_{0j}S^{0j} + \frac{1}{2}\omega_{jl}S^{jl})} \quad (2.2.6)$$

Utilizando que  $\omega_{0j} = \theta_j$ ,  $\omega_{jl} = \varepsilon_{jlm}\zeta_m$  e as expressões de  $S^{0j}$  e  $S^{jl}$  na representação de Weyl, chegaremos que os elementos do grupo de Lorentz na representação de espinor podem ser escritos como:

$$S(\Lambda) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\sigma}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\sigma}} \end{pmatrix} \quad (2.2.7)$$

onde  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ ,  $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$  e  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ . Note que  $S(\Lambda)$  é bloco-diagonal, o que implica que a representação de espinor é redutível. Como temos dois blocos bidimensionais, então podemos decompor a representação de espinor do grupo de Lorentz em duas representações irredutíveis bidimensionais.

A forma que as matrizes  $\gamma^\mu$  se transformam na representação de espinor do grupo de Lorentz é uma propriedade importante e será utilizada mais adiante para a construção de bilineares. Podemos derivar essa transformação da seguinte maneira:

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}}\gamma^\mu e^{\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}} \quad (2.2.8)$$

$$\begin{aligned} S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) &= \left(1 - \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}\right)\gamma^\mu \left(1 + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}\right) \\ &= \gamma^\mu + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}[S^{\alpha\beta}, \gamma^\mu] \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Como  $[S^{\alpha\beta}, \gamma^\mu] = (\mathcal{J}^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu \gamma^\nu$  [17]:

$$\begin{aligned} S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) &= \gamma^\mu + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(S^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu \gamma^\nu \\ &= \left(\delta^\mu{}_\nu + \frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}(S^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu\right)\gamma^\nu \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Comparando o termo que multiplica  $\gamma^\nu$  pela esquerda com a equação 2.1.9, nós vemos que:

$$S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \quad (2.2.11)$$

Este resultado nos mostra que  $\gamma^\mu$  se transforma como um quadrivetor.

## O espinor de Dirac

O campo que se transforma segundo a representação de espinor do grupo de Lorentz (equação 2.2.12) é chamado de campo espinor de Dirac, o qual consiste em um objeto complexo de quatro componentes.

$$\psi^\alpha(x) \rightarrow \psi'^\alpha(x) = S(\Lambda)^\alpha{}_\beta \psi^\beta(\Lambda^{-1}x) \quad (2.2.12)$$

Como esta representação do grupo de Lorentz pode ser decomposta em duas representações irredutíveis bidimensionais, então o espinor de Dirac pode ser escrito como um bi-espinor:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \quad (2.2.13)$$

onde  $\psi_A$  e  $\psi_B$  são espinores bidimensionais. Quando utilizamos a representação de Weyl para as matrizes  $\gamma^\mu$ , a componente  $\psi_A$  é o espinor de Weyl de mão esquerda ( $\psi_L$ ) e  $\psi_B$  é a de mão direita ( $\psi_R$ ), ou seja:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (2.2.14)$$

Aplicando a transformação 2.2.7 em  $\psi$ , nós vemos que:

$$\psi_L \rightarrow \psi'_L = e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\sigma}}\psi_L, \quad \psi_R \rightarrow \psi'_R = e^{\frac{i}{2}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\zeta}\cdot\boldsymbol{\sigma}}\psi_R \quad (2.2.15)$$

Ou seja, sob rotações ( $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$ ), os espinores de Weyl se transformam da mesma forma, enquanto que sob *boosts* ( $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$ ) eles se transformam de maneira oposta.

## 2.3 A Lagrangiana de Dirac

Dado o espinor de Dirac, desejamos encontrar uma equação de movimento que seja invariante por Lorentz. Tendo isto em vista, iremos construir a lagrangiana para a teoria de Dirac que se transforme como um escalar sob o grupo de Lorentz e fazer o uso das equações de Euler-Lagrange. O primeiro passo para escrevermos uma densidade de lagrangiana de Dirac, é encontrar uma maneira de multiplicar os espinores de Dirac para formar um escalar de Lorentz. Intuitivamente, poderíamos considerar  $\psi^\dagger\psi$ , porém a representação de espinor não é unitária<sup>2</sup>, ou seja,  $S^\dagger(\Lambda)S(\Lambda) \neq I$ , e conseqüentemente  $\psi^\dagger S^\dagger(\Lambda)S(\Lambda)\psi \neq \psi^\dagger\psi$ . A solução para isto é definir o adjunto de Dirac:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 \quad (2.3.1)$$

Visto que ele se transforma sob o grupo de Lorentz da seguinte forma:

$$\bar{\psi}' = \psi'^\dagger\gamma^0 = \psi^\dagger S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \psi^\dagger\gamma^0 S^{-1}(\Lambda)\gamma^0\gamma^0 = \bar{\psi}S^{-1}(\Lambda) \quad (2.3.2)$$

Onde utilizamos que  $S^\dagger(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}(S^{\mu\nu})^\dagger} = \gamma^0 S^{-1}(\Lambda)\gamma^0$ , pois na representação de Weyl,  $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ , implicando que  $(S^{\mu\nu})^\dagger = \gamma^0 S^{\mu\nu}\gamma^0$ . Conseqüentemente, o produto:

$$\bar{\psi}'\psi' = \bar{\psi}S^{-1}(\Lambda)S(\Lambda)\psi = \bar{\psi}\psi \quad (2.3.3)$$

é um escalar de Lorentz. De maneira similar, podemos mostrar que  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  se transforma como um quadrivetor, pois  $S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$ . Utilizando esses dois bilineares e a invariância do produto escalar de quadrivetores, podemos construir uma densidade de lagrangiana de Dirac que se transforme como um escalar e que seja real:

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad (2.3.4)$$

onde o primeiro termo é o cinético e  $m\bar{\psi}\psi$  é o termo de massa do campo. Para encontrarmos a equação de movimento do campo de Dirac, iremos utilizar das equações de Euler-Lagrange para  $\bar{\psi}$ :

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{Dirac}}{\partial\bar{\psi}^j} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_{Dirac}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi}^j)} = 0, \quad \psi^j = \bar{\psi}, \psi \implies \begin{cases} (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \\ i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \end{cases} \quad (2.3.5)$$

A primeira equação de movimento é chamada de equação de Dirac e a segunda é apenas seu adjunto de Dirac. É importante notar que, além de ser invariante por Lorentz, a equação de Dirac envolve apenas derivadas de primeira ordem sob o espinor, algo que não conseguimos fazer para o campo escalar<sup>3</sup>.

A densidade de Hamiltoniana de Dirac pode ser obtida através da seguinte transformação de Legendre da densidade de Lagrangiana que encontramos:

$$\mathcal{H}_{Dirac} = \pi^0\partial_0\psi + \bar{\pi}^0\partial_0\bar{\psi} - \mathcal{L}_{Dirac} \quad (2.3.6)$$

Os momentos conjugados dos espinores  $\psi(x)$  e  $\bar{\psi}(x)$  são  $\pi^0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)} = i\bar{\psi}\gamma^0 = i\psi^\dagger$  e  $\bar{\pi}^0 = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\bar{\psi})} = 0$ . Substituindo na expressão de  $\mathcal{H}_{Dirac}$ :

$$\mathcal{H}_{Dirac} = \bar{\psi}(-i\gamma^j\partial_j + m)\psi = \psi^\dagger(-i\gamma^0\gamma^j\partial_j + m)\psi \quad (2.3.7)$$

Como a Hamiltoniana é a integral espacial da densidade de Hamiltoniana:

$$H_{Dirac} = \int d^3x\mathcal{H}_{Dirac} = \int d^3x\bar{\psi}(-i\gamma^j\partial_j + m)\psi \quad (2.3.8)$$

Esta é a Hamiltoniana do campo de Dirac livre. Tal expressão é importante para o processo de quantização canônica que utilizaremos mais adiante.

<sup>2</sup>Como o grupo de Lorentz não é compacto, não conseguimos encontrar uma representação finita e unitária para este grupo[18].

<sup>3</sup>Para escrevermos uma equação de primeira ordem para o campo escalar que fosse invariante por Lorentz, precisaríamos contrair a derivada do termo cinético com um quadrivetor, ou seja,  $v^\mu\partial_\mu\phi$ . No entanto, isso necessariamente implicaria em um quadrivetor privilegiado no espaço-tempo, o que contradiz a invariância por Lorentz.

## Interação eletromagnética

A Lagrangiana de Dirac que acabamos de ver descreve um espinor de Dirac livre, visto que só temos o termo cinético e de massa. No entanto, gostaríamos de encontrar uma lagrangiana que incluisse a interação de  $\psi$  com o campo eletromagnético, o qual é dado pelo quadripotencial  $A^\mu$ . Para isto, devemos adicionar o termo  $qA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  e também a lagrangiana do campo eletromagnético  $\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ [11]. Desta forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{Dirac} + qA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + \mathcal{L}_{Maxwell} \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + qA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\end{aligned}\tag{2.3.9}$$

onde  $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$  é a derivada covariante e  $q$  é a constante de acoplamento entre o espinor de Dirac e o campo eletromagnético, ou seja, a carga elétrica. Veremos mais adiante que, após a quantização dos campos, essa será a lagrangiana da eletrodinâmica quântica. Para encontrarmos a equação de movimento de  $\psi$  na presença do campo eletromagnético, podemos utilizar a equação de Euler-Lagrange para  $\bar{\psi}$ :

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = [i\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu) - m]\psi = 0\tag{2.3.10}$$

Esta é a equação de Dirac para um espinor na presença do campo eletromagnético.

## 2.4 Soluções livres da equação de Dirac

Agora que sabemos qual é a equação de movimento de um espinor de Dirac livre, iremos discutir quais são as expressões de  $\psi$  que a obedecem. Além da equação de Dirac, cada componente do espinor também obedece à equação de Klein-Gordon, uma vez que se aplicarmos  $(i\gamma^\nu\partial_\nu + m)$  pela esquerda na equação de Dirac, obtemos:

$$(i\gamma^\nu\partial_\nu + m)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = (\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu + m^2)\psi = 0\tag{2.4.1}$$

Utilizando que  $\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu = \frac{1}{2}\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\}\partial_\nu\partial_\mu = \partial_\mu\partial^\mu$ :

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\psi = 0\tag{2.4.2}$$

Consequentemente, as soluções podem ser escritas como uma combinação linear de ondas planas. Tais ondas planas podem ter frequência positiva ou negativa, ou seja, temos que dividir o problema em dois casos. Primeiramente iremos abordar o caso de frequência positiva, no qual a solução pode ser escrita como[17]:

$$\psi(x) = u(p)e^{-ip\cdot x}\tag{2.4.3}$$

onde  $u(p)$  é um bi-espinor,  $p^0 = E > 0$  e  $p$  obedece o vínculo  $p^2 = m^2$ . Substituindo esta solução na equação de Dirac:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0\tag{2.4.4}$$

Por conveniência, podemos solucionar esta equação no referencial do centro de massa e depois realizar um *boost* genérico nela. No centro de massa, o quadrimomento é  $p = (p_0 = m, \mathbf{0})$ . Logo:

$$m(\gamma^0 - I)u(p_0) = m\begin{pmatrix} -I & I \\ I & -I \end{pmatrix}u(p_0) = 0 \implies u(p_0) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}\tag{2.4.5}$$

onde  $\xi$  é um espinor numérico qualquer de duas componentes, tal que  $\xi\xi^\dagger = 1$ . O fator  $\sqrt{m}$  que aparece e a normalização de  $\xi$  são escolhidos para uma futura conveniência. Além disto, fisicamente,  $\xi$  é a direção do spin de um férmion de spin 1/2. Para obtermos uma solução válida em qualquer referencial, iremos realizar um *boost* na direção de  $x^3$  e então extrapolaremos seu resultado para um *boost* qualquer:

$$u(p) = e^{i\zeta S^{03}} u(p_0) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\zeta \begin{pmatrix} -\sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix}\right\} \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \quad (2.4.6)$$

Utilizando a série exponencial,  $(\sigma^3)^{2n} = I$  e  $(\sigma^3)^{2n+1} = \sigma^3$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$ :

$$\begin{aligned} u(p) &= \left[ \cosh\left(\frac{1}{2}\zeta\right) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \sinh\left(\frac{1}{2}\zeta\right) \begin{pmatrix} -\sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \right] \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\frac{\zeta}{2}} \left(\frac{I-\sigma^3}{2}\right) + e^{-\frac{\zeta}{2}} \left(\frac{I+\sigma^3}{2}\right) & 0 \\ 0 & e^{\frac{\zeta}{2}} \left(\frac{I+\sigma^3}{2}\right) + e^{-\frac{\zeta}{2}} \left(\frac{I-\sigma^3}{2}\right) \end{pmatrix} \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pela definição de *rapidity*, temos que  $e^{\pm\frac{\zeta}{2}} = \frac{\sqrt{E \pm |\mathbf{p}|}}{\sqrt{m}}$ . Como temos um *boost* apenas em  $x^3$ , então  $|\mathbf{p}| = p^3$  e  $e^{\pm\frac{\zeta}{2}} = \frac{\sqrt{E \pm p^3}}{\sqrt{m}}$ . Portanto:

$$\begin{aligned} u(p) &= \begin{pmatrix} \sqrt{E+p^3} \left(\frac{I-\sigma^3}{2}\right) + \sqrt{E-p^3} \left(\frac{I+\sigma^3}{2}\right) & 0 \\ 0 & \sqrt{E+p^3} \left(\frac{I+\sigma^3}{2}\right) + \sqrt{E-p^3} \left(\frac{I-\sigma^3}{2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \\ u(p) &= \begin{pmatrix} \left( \begin{matrix} \sqrt{E-p^3} & 0 \\ 0 & \sqrt{E+p^3} \end{matrix} \right) \xi \\ \left( \begin{matrix} \sqrt{E+p^3} & 0 \\ 0 & \sqrt{E-p^3} \end{matrix} \right) \xi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Note que se definirmos  $\sigma^\mu = (I, \boldsymbol{\sigma})$  e  $\bar{\sigma}^\mu = (I, -\boldsymbol{\sigma})$ , então teremos que:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{E-p^3} & 0 \\ 0 & \sqrt{E+p^3} \end{pmatrix} = \sqrt{EI - p_3 \sigma^3} = \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \quad (2.4.7)$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{E+p^3} & 0 \\ 0 & \sqrt{E-p^3} \end{pmatrix} = \sqrt{EI + p_3 \sigma^3} = \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \quad (2.4.8)$$

Substituindo essa simplificação na equação de  $u(p)$ :

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \xi \\ \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi \end{pmatrix} \quad (2.4.9)$$

Como  $\xi$  é um espinor bidimensional, podemos escolher dois espinores linearmente independentes,  $\xi^1$  e  $\xi^2$ , para formar uma base para todas as soluções. Deste modo, as duas soluções linearmente independentes serão:

$$u^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \xi^s \\ \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi^s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2 \quad (2.4.10)$$

Apesar de esta solução ser derivada através de um *boost* na direção de  $x^3$ , esta expressão vale pra qualquer direção arbitrária de  $\mathbf{p}$  que escolhermos. Portanto, esta é a solução geral da equação 2.4.4. Para que cheguemos na relação de normalização do espinor  $u(p)$  devemos calcular seu produto interno, o qual pode ser dado por  $u^\dagger u(p)$  ou  $\bar{u}(p)u(p)$ . No entanto, como vimos anteriormente, apenas  $\bar{u}(p)u(p)$  é um invariante sob transformações do grupo de Lorentz. Deste modo, vamos calcular  $\bar{u}(p)u(p)$ :

$$\begin{aligned} \bar{u}^s(p)u^r(p) &= u^{s\dagger}(p)\gamma^0 u^r(p) \\ &= (\xi^{s\dagger} \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \quad \xi^{s\dagger} \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu}) \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu \sigma^\mu} \xi^r \\ \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu} \xi^r \end{pmatrix} \\ &= \xi^{s\dagger} \sqrt{(p_\mu \bar{\sigma}^\mu)(p_\mu \sigma^\mu)} \xi^r + \xi^{s\dagger} \sqrt{(p_\mu \sigma^\mu)(p_\mu \bar{\sigma}^\mu)} \xi^r \end{aligned}$$

Note que  $(p_\mu \sigma^\mu)(p_\mu \bar{\sigma}^\mu) = (p_0 - p_i \sigma^i)(p_0 + p_i \sigma^i) = p_0^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2$ , o que também vale para  $(p_\mu \bar{\sigma}^\mu)(p_\mu \sigma^\mu)$ . Portanto:

$$\bar{u}^s(p)u^r(p) = 2m\xi^{s\dagger}\xi^r \quad (2.4.11)$$

Como já comentamos, é conveniente que  $\xi^\dagger\xi = 1$ , ou equivalentemente,  $\xi^{s\dagger}\xi^r = \delta^{sr}$ . Logo:

$$\bar{u}^s(p)u^r(p) = 2m\delta^{sr} \quad (2.4.12)$$

Note que, apesar de a normalização ser invariante por Lorentz, ela é proporcional a massa e consequentemente se torna nula para campos sem massa. Portanto, no caso de  $m = 0$ , adotaremos a normalização dada pelo produto interno  $u^{s\dagger}(p)u^r(p)$ , a qual é dada por:

$$\begin{aligned} u^{s\dagger}(p)u^r(p) &= (\xi^{s\dagger}\sqrt{p_\mu\sigma^\mu} \quad \xi^{s\dagger}\sqrt{p_\mu\bar{\sigma}^\mu}) \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu\sigma^\mu}\xi^r \\ \sqrt{p_\mu\bar{\sigma}^\mu}\xi^r \end{pmatrix} \\ &= \xi^{s\dagger}p_\mu\sigma^\mu\xi^r + \xi^{s\dagger}p_\mu\bar{\sigma}^\mu\xi^r \\ &= 2E\xi^{s\dagger}\xi^r \\ &= 2E\delta^{sr} \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Esta será a normalização que utilizaremos para um campo  $\psi$  desprovido de massa. Agora que encontramos as soluções de frequência positiva e sua normalização, podemos prosseguir a solução de ondas planas com frequência negativa, a qual é dada pela seguinte expressão:

$$\psi(x) = v(p)e^{ip_\mu x^\mu} \quad (2.4.14)$$

onde  $p^2 = m^2$  e  $p^0 = E > 0$ . Substituindo esta expressão na equação de Dirac:

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)v(p) = 0 \quad (2.4.15)$$

Fazendo o processo análogo ao de  $u^s(p)$ , encontraremos que:

$$v^s(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu\sigma^\mu}\eta^s \\ -\sqrt{p_\mu\bar{\sigma}^\mu}\eta^s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2 \quad (2.4.16)$$

Aqui  $\eta^s$  também é uma base de espinores bidimensionais. Similarmente ao caso de frequência positiva, a normalização será:

$$\bar{v}^s(p)v(p) = -2m\delta^{sr}, \quad \text{para } m \neq 0 \quad (2.4.17)$$

$$v^{r\dagger}(p)v^s(p) = 2E\delta^{sr}, \quad \text{para } m = 0 \quad (2.4.18)$$

É importante notar que os bi-espinores  $u^s(p)$  e  $v^r(p)$  são ortogonais, pois:

$$\begin{aligned} \bar{u}^s(p)v^r(p) &= u^{s\dagger}(p)\gamma^0 v^r(p) \\ &= (\xi^{s\dagger}\sqrt{p_\mu\sigma^\mu} \quad \xi^{s\dagger}\sqrt{p_\mu\bar{\sigma}^\mu}) \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu\sigma^\mu}\eta^r \\ -\sqrt{p_\mu\bar{\sigma}^\mu}\eta^r \end{pmatrix} \\ &= \xi^{s\dagger}\sqrt{p_\mu\bar{\sigma}^\mu}\sqrt{p_\mu\sigma^\mu}\eta^r - \xi^{s\dagger}\sqrt{p_\mu\sigma^\mu}\sqrt{p_\mu\bar{\sigma}^\mu}\eta^r \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

e analogamente,  $\bar{v}^s(p)u^r(p) = 0$ . Além do produto interno dos bi-espinores  $u^s(p)$  e  $v^r(p)$ , devemos encontrar uma expressão para seu produto externo, uma vez que ele nos fornecerá uma relação de completude muito utilizada no cálculo de amplitudes via regras de Feynman. Tal produto é dado por:

$$\begin{aligned} u^s(p)\bar{u}^s(p) &= u^s(p)u^{s\dagger}(p)\gamma^0 \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu\sigma^\mu}\xi^s \\ \sqrt{p_\mu\bar{\sigma}^\mu}\xi^s \end{pmatrix} (\xi^{s\dagger}\sqrt{p_\mu\sigma^\mu} \quad \xi^{s\dagger}\sqrt{p_\mu\bar{\sigma}^\mu}) \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu\sigma^\mu}\xi^s\xi^{s\dagger}\sqrt{p_\mu\bar{\sigma}^\mu} & \sqrt{p_\mu\sigma^\mu}\xi^s\xi^{s\dagger}\sqrt{p_\mu\sigma^\mu} \\ \sqrt{p_\mu\bar{\sigma}^\mu}\xi^s\xi^{s\dagger}\sqrt{p_\mu\sigma^\mu} & \sqrt{p_\mu\bar{\sigma}^\mu}\xi^s\xi^{s\dagger}\sqrt{p_\mu\bar{\sigma}^\mu} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como  $\xi^s$  forma uma base, então  $\sum_{s=1,2} \xi^s \xi^{s\dagger} = I$ . Logo:

$$\begin{aligned} u^s(p) \bar{u}^s(p) &= \begin{pmatrix} m & p_\mu \sigma^\mu \\ p_\mu \bar{\sigma}^\mu & m \end{pmatrix} \\ &= p_\mu \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= p_\mu \gamma^\mu + m \end{aligned}$$

Ao longo desta monografia, nos depararemos diversas vezes com a contração das matrizes  $\gamma^\mu$  com um quadrvetor. Tendo isto em vista, nós introduziremos a notação  $p_\mu \gamma^\mu = \not{p}$ . Deste modo:

$$\sum_{s=1,2} u^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{p} + m \quad (2.4.20)$$

De maneira análoga:

$$\sum_{s=1,2} v^s(p) \bar{v}^s(p) = \not{p} - m \quad (2.4.21)$$

Dadas as soluções da equação de Dirac livre e suas propriedades, estamos prontos para começar a abordagem quântica da teoria de Dirac.

## 2.5 Quantização do campo de Dirac

Até este ponto nós abordamos a Teoria de Dirac de maneira clássica, conseqüentemente, nosso próximo passo é quantizá-la. Para isto, iremos utilizar o método da quantização canônica, o qual foi discutido no capítulo anterior. Segundo este método, o campo  $\psi(x)$  e seu momento conjugado  $\pi^0 = i\psi^\dagger(x)$  devem ser promovidos a operadores, de modo que, para um mesmo instante de tempo, eles satisfaçam as seguintes relações canônicas[16, 17]:

$$\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(y)\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \text{e} \quad \{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(y)\} = \{\psi_\alpha^\dagger(x), \psi_\beta^\dagger(y)\} = 0 \quad (2.5.1)$$

Note que diferentemente do capítulo anterior, nós utilizamos anticomutadores ao invés de comutadores para descrevermos as relações canônicas. Isto acontece devido ao fato de o espinor de Dirac descrever férmions de spin 1/2. Segundo o teorema spin-estatística[19, 20], partículas de spin semi-inteiro (férmions) obedecem a estatística de Fermi-Dirac, ou seja, estados de  $n$  férmions idênticos devem ser antissimétricos mediante um número ímpar de permutações entre seus números quânticos. Matematicamente, a estatística de Fermi-Dirac implica que os operadores de criação e aniquilação de férmions devem obedecer relações de anticomutação ao invés de comutação, como as que derivamos no capítulo anterior ao discutirmos o espaço de Fock para partículas sem spin.

O operador campo de Dirac pode ser escrito como uma combinação linear das soluções livres da equação de Dirac que encontramos na seção anterior, onde seus coeficientes são operadores de criação e aniquilação, de maneira análoga ao que fizemos para o campo escalar. Logo:

$$\psi(x) = \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{|\mathbf{p}|}}} \left[ b_{\mathbf{p}}^s u^s(p) e^{-ip_\mu x^\mu} + d_{\mathbf{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ip_\mu x^\mu} \right] \quad (2.5.2)$$

$$\psi^\dagger(x) = \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{|\mathbf{p}|}}} \left[ b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} u^{s\dagger}(p) e^{ip_\mu x^\mu} + d_{\mathbf{p}}^s v^{s\dagger}(p) e^{-ip_\mu x^\mu} \right] \quad (2.5.3)$$

Onde os operadores  $b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$  criam férmions associados ao espinor  $u^s(p)$ , enquanto  $d_{\mathbf{p}}^{s\dagger}$  cria férmions referente a  $v^s(p)$ . Além disto, como discutimos, os operadores de criação e aniquilação de férmions devem obedecer relações de anticomutação, as quais são:

$$\{b_{\mathbf{p}}^s, b_{\mathbf{p}'}^r\} = \{d_{\mathbf{p}}^s, d_{\mathbf{p}'}^r\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta^{sr} \quad (2.5.4)$$

$$\{b_{\mathbf{p}}^s, b_{\mathbf{p}'}^r\} = \{b_{\mathbf{p}}^{s\dagger}, b_{\mathbf{p}'}^r\} = \{d_{\mathbf{p}}^s, d_{\mathbf{p}'}^r\} = \{d_{\mathbf{p}}^{s\dagger}, d_{\mathbf{p}'}^r\} = 0 \quad (2.5.5)$$

Para verificarmos se estas expressões de  $\psi(x)$  e  $\psi^\dagger(x)$  obedecem as relações canônicas, iremos calcular os anticomutadores fazendo uso das mesmas:

$$\{\psi(x), \psi^\dagger(y)\} = \sum_{s=r=1}^2 \int \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{|\mathbf{p}|}}} \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{|\mathbf{p}'|}}} \left[ \{b_{\mathbf{p}}^s, b_{\mathbf{p}'}^{r,\dagger}\} u^s(p) u^{r\dagger}(p) e^{-i(p_\mu x^\mu - p'_\mu y^\mu)} + \{d_{\mathbf{p}}^{s\dagger}, d_{\mathbf{p}'}^r\} v^s(p) v^{r\dagger}(p) e^{i(p_\mu x^\mu - p'_\mu y^\mu)} \right] \quad (2.5.6)$$

$$\begin{aligned} \{\psi(x), \psi^\dagger(y)\} &= \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 (2E_{|\mathbf{p}|})} \left[ u^s(p) u^{s\dagger}(p) e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} + v^s(p) v^{s\dagger}(p) e^{ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} \right] \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 (2E_{|\mathbf{p}|})} \left[ \sum_{s=1}^2 u^s(p) \bar{u}^s(p) \gamma^0 e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} + \sum_{s=1}^2 v^s(p) \bar{v}^s(p) \gamma^0 e^{ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} \right] \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Utilizando a expressão do produto externo que encontramos anteriormente:

$$\begin{aligned} \{\psi(x), \psi^\dagger(y)\} &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 (2E_{|\mathbf{p}|})} \left[ (\not{p} + m) \gamma^0 e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} + (\not{p} - m) \gamma^0 e^{ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} \right] \\ &= (i\not{\partial}_x + m) \gamma^0 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 (2E_{|\mathbf{p}|})} \left[ e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} + e^{ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} \right] \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

e utilizando a definição:  $i\Delta(x - y) \equiv \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 (2E_{|\mathbf{p}|})} [e^{-ip_\mu(x^\mu - y^\mu)} + e^{ip_\mu(x^\mu - y^\mu)}]$ , obtemos:

$$\{\psi(x), \psi^\dagger(y)\} = (i\not{\partial}_x + m) \gamma^0 i\Delta(x - y) \quad (2.5.9)$$

No capítulo anterior, vimos que  $i\Delta(x - y)$  é uma função invariante por Lorentz que se anula para intervalos tipo espaço ( $(x - y)^2 < 0$ ). Consequentemente, nossos campos anticomutam para intervalos tipo espaço. Esta condição é suficiente para garantir a causalidade relativística, uma vez que os observáveis serão construídos através dos bilineares do campo de Dirac e teremos que  $[\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2] = 0$  para  $(x - y)^2 < 0$  [17, 19]. Para calcularmos este anticomutador no mesmo instante de tempo, basta fazermos  $x = (t, \mathbf{x})$  e  $y = (t, \mathbf{y})$  na equação 2.5.8:

$$\begin{aligned} \{\psi(t, \mathbf{x}), \psi^\dagger(t, \mathbf{y})\} &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 (2E_{|\mathbf{p}|})} \left[ (\not{p} + m) \gamma^0 e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} + (\not{p} - m) \gamma^0 e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right] \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 (2E_{|\mathbf{p}|})} \left[ (p_0 \gamma^0 - p_i \gamma^i + m) \gamma^0 e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} + (p_0 \gamma^0 + p_i \gamma^i - m) \gamma^0 e^{-i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right] \end{aligned}$$

Onde fizemos  $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$  no segundo termo e utilizamos que a integral é simétrica sob essa troca. Como  $p_0 = E_{\mathbf{p}}$ :

$$\{\psi(t, \mathbf{x}), \psi^\dagger(t, \mathbf{y})\} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.5.10)$$

De maneira similar, podemos mostrar que  $\{\psi(x), \psi(y)\} = \{\psi^\dagger(x), \psi^\dagger(y)\} = 0$ . Portanto, vemos que  $\psi(x)$  e  $\psi^\dagger(x)$  de fato obedecem as relações canônicas de anticomutação para o mesmo instante de tempo.

Nosso próximo passo para quantizar a teoria de Dirac é encontrar a Hamiltoniana para o campo  $\psi(x)$ . Para isto, o método de quantização canônica nos diz que devemos considerar a mesma Hamiltoniana da Teoria Clássica de Campos, porém substituindo os campos clássicos pelos operadores quânticos que satisfazem as relações canônicas que discutimos acima. Substituindo o campo quântico de Dirac (equação 2.5.2) na Hamiltoniana clássica que encontramos anteriormente (equação 2.3.8):

$$H_{Dirac} = \int d^3x \bar{\psi} \left[ \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{|\mathbf{p}|}}} \left[ b_{\mathbf{p}}^s e^{-ip_\mu x^\mu} (\gamma^j p_j + m) u^s(p) + d_{\mathbf{p}}^{s\dagger} e^{ip_\mu x^\mu} (-\gamma^j p_j + m) v^s(p) \right] \right] \quad (2.5.11)$$

Pelas equações de Dirac para os espinores  $u^s(p)$  e  $v^s(p)$  (2.4.4 e 2.4.15), temos que:

$$(\gamma^j p_j + m)u^s(p) = \gamma^0 p_0 u^s(p) \quad \text{e} \quad (-\gamma^j p_j + m)v^s(p) = -\gamma^0 p_0 v^s(p) \quad (2.5.12)$$

Portanto:

$$H_{Dirac} = \int d^3x \psi^\dagger \left[ \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{|\mathbf{p}|}}} \sqrt{\frac{E_{|\mathbf{p}|}}{2}} \left[ b_{\mathbf{p}}^s e^{-ip_\mu x^\mu} u^s(p) - d_{\mathbf{p}}^{s\dagger} e^{ip_\mu x^\mu} v^s(p) \right] \right] \quad (2.5.13)$$

Substituindo a expressão do conjugado hermitiano do campo de Dirac (equação 2.5.3):

$$H_{Dirac} = \sum_{s=r=1}^2 \int \int \int \frac{d^3x d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}'}{2(2\pi)^6} \sqrt{\frac{E_{|\mathbf{p}|}}{E_{|\mathbf{p}'|}}} \left[ b_{\mathbf{p}'}^{r\dagger} u^{r\dagger}(p') e^{ip'_\mu x^\mu} + d_{\mathbf{p}'}^r v^{s\dagger}(p') e^{-ip'_\mu x^\mu} \right] \left[ b_{\mathbf{p}}^s e^{-ip_\mu x^\mu} u^s(p) - d_{\mathbf{p}}^{s\dagger} e^{ip_\mu x^\mu} v^s(p) \right] \quad (2.5.14)$$

$$H_{Dirac} = \sum_{s=r=1}^2 \int \int \int \frac{d^3x d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}'}{2(2\pi)^6} \sqrt{\frac{E_{|\mathbf{p}|}}{E_{|\mathbf{p}'|}}} \left[ b_{\mathbf{p}'}^{r\dagger} b_{\mathbf{p}}^s u^{r\dagger}(p') u^s(p) e^{-i(p_\mu - p'_\mu)x^\mu} - b_{\mathbf{p}'}^{r\dagger} d_{\mathbf{p}}^{s\dagger} u^{r\dagger}(p') v^s(p) e^{i(p_\mu + p'_\mu)x^\mu} \right. \\ \left. + d_{\mathbf{p}'}^r b_{\mathbf{p}}^s v^{s\dagger}(p') u^s(p) e^{-i(p'_\mu + p_\mu)x^\mu} - d_{\mathbf{p}'}^r d_{\mathbf{p}}^{s\dagger} v^{s\dagger}(p') v^s(p) e^{i(p_\mu - p'_\mu)x^\mu} \right] \quad (2.5.15)$$

$$H_{Dirac} = \sum_{s=r=1}^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2(2\pi)^3} \left[ b_{\mathbf{p}}^{r\dagger} b_{\mathbf{p}}^s u^{r\dagger}(p) u^s(p) - b_{\mathbf{p}}^{r\dagger} d_{-\mathbf{p}}^{s\dagger} u^{r\dagger}(\mathbf{p}) v^s(-\mathbf{p}) e^{2iE_{|\mathbf{p}|}} \right. \\ \left. + d_{\mathbf{p}}^r b_{-\mathbf{p}}^s v^{s\dagger}(\mathbf{p}) u^s(-\mathbf{p}) e^{-2iE_{|\mathbf{p}|}} - d_{\mathbf{p}}^r d_{\mathbf{p}}^{s\dagger} v^{s\dagger}(p) v^s(p) \right] \quad (2.5.16)$$

Utilizando as expressões do produto interno de espiniores que calculamos anteriormente:

$$H_{Dirac} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_{|\mathbf{p}|} \sum_{s=1}^2 \left[ b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s - d_{\mathbf{p}}^s d_{\mathbf{p}}^{s\dagger} \right] \quad (2.5.17)$$

Como  $\{d_{\mathbf{p}}^r, d_{\mathbf{p}'}^{s\dagger}\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta^{rs}$ :

$$H_{Dirac} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_{|\mathbf{p}|} \left[ \sum_{s=1}^2 \left[ b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s + d_{\mathbf{p}}^{s\dagger} d_{\mathbf{p}}^s \right] - (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{0}) \right] \quad (2.5.18)$$

Note que o último termo desta Hamiltoniana resulta uma contribuição divergente para  $H_{Dirac}$ . No entanto, este termo não é um problema, uma vez que só podemos medir diferenças de energia e a Hamiltoniana está diretamente ligada a energia do sistema. De maneira análoga ao que fizemos com o campo escalar, podemos contornar esse infinito aplicando a ordenação normal, a qual nos levará a seguinte Hamiltoniana:

$$H_{Dirac} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_{|\mathbf{p}|} \sum_{s=1}^2 \left[ b_{\mathbf{p}}^{s\dagger} b_{\mathbf{p}}^s + d_{\mathbf{p}}^{s\dagger} d_{\mathbf{p}}^s \right] \quad (2.5.19)$$

Com este resultado e a expressão dos campos, nós temos a Teoria Quântica de Campos para descrever férmions de spin 1/2 livres.

# Capítulo 3

## Campo vetorial

No capítulo anterior, vimos que os tipos de campos estão associados às diferentes representações do grupo de Lorentz. Além disso, vimos que foi necessário introduzir um campo vetorial  $A_\mu$  para descrever as interações eletromagnéticas. Deste modo, este capítulo visa discutir o campo vetorial, que se transforma segundo a representação vetorial:

$$V^\mu(x) \rightarrow V'^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu(\Lambda^{-1}x) \quad (3.0.1)$$

Isto significa que o campo vetorial é um conjunto de quatro campos que se transformam como as componentes de um quadrivetor de Lorentz, o que pode ser indicado por:

$$V^\mu(x) = \begin{pmatrix} V^0(x) \\ V^1(x) \\ V^2(x) \\ V^3(x) \end{pmatrix} \quad (3.0.2)$$

O campo vetorial pode ser real ou complexo, dependendo se cada uma de suas componentes é real ou complexa. Quando quantizado, este tipo de campo estará associado à partículas de spin 1, como por exemplo os bósons  $W_\mu^\pm$ ,  $Z_\mu^0$  e o fóton ( $A_\mu$ ).

### A Lagrangiana do campo vetorial

Para um campo vetorial real livre  $V^\mu$  de massa  $m$ , a Lagrangiana mais simples é a de Wentzel-Pauli[11], dada por:

$$\mathcal{L}_{WP} = -\frac{1}{4} [(\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu)(\partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu)] + \frac{1}{2} m^2 V^\mu V_\mu \quad (3.0.3)$$

Definindo um tensor de ordem 2  $F^{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$ , esta lagrangiana pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{WP} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 V^\mu V_\mu \quad (3.0.4)$$

Note que esta lagrangiana é invariante por Lorentz, uma vez que os campos aparecem sempre contraídos. Utilizando as equações de Euler-Lagrange[11], vemos que cada componente do campo vetorial deve obedecer a seguinte equação de movimento:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{WP}}{\partial V^\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{WP}}{\partial(\partial_\mu V^\nu)} = 0 \implies \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 V^\nu = \partial^\mu \partial_\mu V^\nu - \partial^\nu \partial_\mu V^\mu + m^2 V^\nu = 0 \quad (3.0.5)$$

onde esta equação é conhecida como equação de Proca.

O principal foco deste capítulo é o campo do fóton, uma vez que ele é o mediador das interações eletromagnéticas e estas serão exploradas mais adiante. Portanto, nas próximas seções, abordaremos apenas o caso do campo vetorial livre, real e sem massa, que descreve o fóton na ausência de fontes externas.

### 3.1 Campo vetorial livre e sem massa

A fim de obtermos a lagrangiana para o campo do fóton, devemos impor  $m = 0$  na equação 3.0.3 e assumir um campo real:

$$\mathcal{L}_\gamma = -\frac{1}{4} [(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)] = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.1.1)$$

Esta é exatamente a lagrangiana de Maxwell que utilizamos no capítulo anterior para incluirmos as interações eletromagnéticas na teoria de Dirac. Através das equações de Euler-Lagrange, chegamos nas seguintes equações de movimento para o campo do fóton:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\gamma}{\partial A^\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_\gamma}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} = 0 \implies \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial^\mu \partial_\mu A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0 \quad (3.1.2)$$

É importante destacar que a lagrangiana  $\mathcal{L}_\gamma$  apresenta invariância por transformações de Gauge do tipo:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) \quad (3.1.3)$$

onde  $f(x)$  é uma função arbitrária. Portanto, a simetria de Gauge possibilita a escolha de uma função  $f(x)$  tal que  $\partial_\mu A^\mu = 0$ . Tal escolha é conhecida como Gauge de Lorenz[11]. Ao aplicar o Gauge de Lorenz nas equações de movimento do campo do fóton (equação 3.1.2), é possível simplificá-las:

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\nu = 0 \quad (3.1.4)$$

Este resultado<sup>1</sup> nos mostra que cada componente do campo do fóton deve obedecer à equação de Klein-Gordon para campos sem massa. Consequentemente, a solução para cada uma delas é uma combinação linear de ondas planas, como já vimos anteriormente. Portanto, o campo vetorial livre e sem massa do fóton pode ser escrito como:

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[ a_\mu(k) e^{-ik_\nu x^\nu} + a_\mu^\dagger(k) e^{ik_\nu x^\nu} \right] \quad (3.1.5)$$

onde  $a_\mu(k)$  são funções complexas de  $k^\mu = (E_{\mathbf{k}}, \mathbf{k})$  e  $E_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$ . Esta expressão deve obedecer o Gauge de Lorenz que foi imposto anteriormente, o que, no espaço de momento, implica no seguinte vínculo:

$$k^\mu a_\mu = 0 \quad (3.1.6)$$

a qual estabelece uma condição de ortogonalidade em quatro dimensões. Existem três vetores linearmente independentes que são ortogonais a  $k^\mu$ [21], sendo o primeiro  $k_\mu$ , visto que para um fóton  $k^\mu k_\mu = 0$ . Os outros dois,  $\epsilon_\mu^s(k)$  ( $s = 1, 2$ ), podemos escolher como sendo vetores puramente espaciais que são ortogonais entre si e também a  $\mathbf{k}$ , isto é:

$$\begin{cases} \epsilon_0^s = 0 \\ \epsilon_i^s k^i = 0 \\ \epsilon_i^s \epsilon^{ri} = \delta^{sr} \end{cases} \quad (3.1.7)$$

Utilizando estes três vetores, podemos reescrever a função  $a_\mu(k)$  da seguinte forma:

$$a_\mu(k) = k_\mu c(\mathbf{k}) + \sum_{s=1}^2 \epsilon_\mu^s(k) a_{\mathbf{k}}^s \quad (3.1.8)$$

onde  $c(\mathbf{k})$  e  $a_{\mathbf{k}}^s$  são funções complexas de  $\mathbf{k}$ . Utilizando este resultado na equação 3.1.5, nós podemos decompor  $A_\mu(x)$  como a soma de sua parte ortogonal a  $k^\mu$  e a paralela:

<sup>1</sup> Além de ser uma equação de Klein-Gordon para um campo sem massa, essas são as equações de Maxwell, quando identificamos as componentes de  $A_\mu$  e suas derivadas com os campos elétrico e magnético.

$$A_\mu(x) = A_\mu^\parallel(x) + A_\mu^\perp(x) \quad (3.1.9)$$

onde:

$$A_\mu^\parallel(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \left[ k_\mu c(\mathbf{k}) e^{-ik_\nu x^\nu} + k_\mu c^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik_\nu x^\nu} \right] \quad (3.1.10)$$

$$A_\mu^\perp(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \sum_{s=1}^2 \left[ \epsilon_\mu^s(k) a_{\mathbf{k}}^s e^{-ik_\mu x^\mu} + \epsilon_\mu^s(k)^* a_{\mathbf{k}}^{s\dagger} e^{ik_\mu x^\mu} \right] \quad (3.1.11)$$

Note que,  $A_\mu^\parallel(x)$  pode ser escrito como o gradiente quadridimensional de uma função escalar utilizando que  $k_\mu e^{-ik_\nu x^\nu} = i\partial_\mu e^{-ik_\nu x^\nu}$ :

$$A_\mu^\parallel(x) = \partial_\mu g(x), \quad g(x) \equiv \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} i \left[ c(\mathbf{k}) e^{-ik_\nu x^\nu} - c^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik_\nu x^\nu} \right] \quad (3.1.12)$$

Substituindo este resultado na equação 3.1.9:

$$A_\mu(x) = A_\mu^\perp(x) + \partial_\mu g(x) \quad (3.1.13)$$

Devido à simetria de Gauge, se  $A_\mu(x)$  é uma solução de  $\partial^\mu \partial_\mu A^\nu = 0$ , então  $A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu g(x) = A_\mu^\perp(x)$  também é<sup>2</sup>. Logo, podemos realizar uma transformação e eliminar a componente  $A_\mu^\parallel(x)$ :

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \sum_{s=1}^2 \left[ \epsilon_\mu^s(k) a_{\mathbf{k}}^s e^{-ik_\mu x^\mu} + \epsilon_\mu^s(k)^* a_{\mathbf{k}}^{s\dagger} e^{ik_\mu x^\mu} \right] \quad (3.1.14)$$

Fisicamente,  $\epsilon_\mu^s(k)$  são os quadrivetores de polarização do campo vetorial  $A_\mu(x)$ .

### 3.1.1 Quantização do campo vetorial sem massa

Agora que temos a expressão do campo vetorial clássico e sem massa, nosso próximo passo é quantizá-lo. De maneira análoga ao campo de Dirac, iremos utilizar o método de quantização canônica. Primeiro, devemos promover o campo  $A_\mu(x)$  e seu momento conjugado  $\pi^0 = \dot{A}_\mu(x)$  à operadores, de modo que, para um mesmo instante de tempo eles obedeçam as seguintes relações de comutação:

$$[A_\mu(x), \dot{A}^\nu(y)] = i\delta^\mu{}_\nu \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \text{e} \quad [A_\mu(x), A^\nu(y)] = [\dot{A}_\mu(x), \dot{A}^\nu(y)] = 0 \quad (3.1.15)$$

Aqui utilizamos relações de comutação no processo de quantização, pois segundo o teorema spin-estatística[19, 20], bósons de spin 1 obedecem a estatística de Bose-Einstein.

Ao promovermos o campo  $A_\mu(x)$  a operador, sua expressão é a mesma que encontramos na seção anterior para a Teoria Clássica de Campos. No entanto, de maneira análoga aos campos escalar e de Dirac, as funções complexas  $a_{\mathbf{k}}^s$  são os operadores de criação e aniquilação. Logo:

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \sum_{s=1}^2 \left[ \epsilon_\mu^s(k) a_{\mathbf{k}}^s e^{-ik_\mu x^\mu} + \epsilon_\mu^s(k)^* a_{\mathbf{k}}^{s\dagger} e^{ik_\mu x^\mu} \right] \quad (3.1.16)$$

onde  $a_{\mathbf{k}}^s$  e  $a_{\mathbf{k}}^{s\dagger}$  são operadores de criação e destruição, respectivamente, para fótons com polarização  $\epsilon_\mu^s(k)$  e momento  $k$ . Como discutido no primeiro capítulo, as relações de comutação canônica (equação 3.1.15) resultam nas seguintes relações para  $a_{\mathbf{k}}^s$  e  $a_{\mathbf{k}}^{s\dagger}$ :

$$[a_{\mathbf{k}}^s, a_{\mathbf{k}'}^{r\dagger}] = (2\pi)^3 \delta^{sr} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad \text{e} \quad [a_{\mathbf{k}}^{s\dagger}, a_{\mathbf{k}'}^{r\dagger}] = [a_{\mathbf{k}}^s, a_{\mathbf{k}'}^r] = 0 \quad (3.1.17)$$

Para verificarmos este resultado podemos calcular explicitamente o comutado:

<sup>2</sup>Note que  $\partial_\mu A'^\mu(x) = -\partial_\mu \partial^\mu g(x) = -\partial_\mu A^{+\mu}(x) = 0$ , uma vez que  $\partial_\mu A^{+\mu}(x) \propto k^\mu k_\mu$  e  $k^\mu k_\mu = 0$ . Portanto, esta segunda transformação conserva o Gauge de Lorenz que utilizamos anteriormente.

$$\begin{aligned}
[A_\mu(x), \dot{A}^\nu(y)] &= \int \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{k}'}}} \sum_{s=r=1}^2 ik_0 \left( -\epsilon_\mu^s(k) \epsilon^{r\nu*}(k') [a_{\mathbf{k}}^s, a_{\mathbf{k}'}^r] e^{-i(k_\alpha x^\alpha - k'_\alpha y^\alpha)} \right. \\
&\quad \left. + \epsilon_\mu^{s*}(k) \epsilon^{r\nu}(k') [a_{\mathbf{k}}^{s\dagger}, a_{\mathbf{k}'}^r] e^{i(k_\alpha x^\alpha - k'_\alpha y^\alpha)} \right) \\
[A_\mu(x), \dot{A}^\nu(y)] &= -i \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 (2E_{\mathbf{k}})} \sum_{s=1}^2 k_0 \left( \epsilon_\mu^s(k) \epsilon^{s\nu*}(k) e^{-ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} + \epsilon_\mu^{s*}(k) \epsilon^{s\nu}(k) e^{ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \right)
\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

Utilizando que  $k_0 = k^0 = E_{\mathbf{k}}$ ,  $x^0 = y^0$  e  $\sum_{s=1}^2 \epsilon_\mu^{s*}(k) \epsilon^{s\nu}(k) = -g_\mu^\nu = -\delta_\mu^\nu$  [17]:

$$[A_\mu(x), \dot{A}^\nu(y)] = i\delta_\mu^\nu \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2} \left( e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} + e^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right) \tag{3.1.19}$$

Fazendo  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$  no segundo termo e utilizando que a integral é simétrica sobre esta troca:

$$[A_\mu(x), \dot{A}^\nu(y)] = i\delta_\mu^\nu \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = i\delta_\mu^\nu \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{3.1.20}$$

De maneira análoga, podemos demonstrar que  $[A_\mu(x), A^\nu(y)] = [\dot{A}_\mu(x), \dot{A}^\nu(y)] = 0$ . portanto, vemos que o operador campo  $A_\mu(x)$  obedece às relações canônicas de comutação.

# Capítulo 4

## Teoria de Espalhamento

Desde o século XX, experimentos envolvendo a colisão de partículas com um alvo nos possibilitam estudar quem são as partículas fundamentais, suas propriedades e a maneira como elas interagem. Para descrevermos e compreendermos este tipo de experimento, uma das principais ferramentas necessárias é a teoria de espalhamento. Tal teoria introduz o conceito de amplitude de espalhamento, a qual, quando conectada a teoria de perturbação, se torna uma ferramenta imprescindível para que consigamos calcular o momento magnético anômalo do Múon. Desta forma, esta seção será dedicada ao estudo do fenômeno de espalhamento e a teoria por trás dele.

O objetivo desta seção é utilizar a teoria de espalhamento para calcularmos a probabilidade de um determinado processo acontecer. Para isto, será necessário discutir o conceito de seção de choque e sua relação com a probabilidade. Além disto, discutiremos o formalismo de matriz de espalhamento, o qual em conjunto com a série de Dyson será utilizado para calcularmos a seção de choque.

### 4.1 Seção de Choque

A seção de choque, denotada por  $\sigma$ , é definida como a área efetiva de colisão que para um processo específico. Além disto, ela também é uma medida da probabilidade de partículas colidirem e resultar em um determinado estado final, visto que a probabilidade é diretamente proporcional a área efetiva de colisão. Como exemplo, vamos analisar a colisão frontal de um pacote de partículas  $\phi_B$  com outro pacote  $\phi_A$  que está fixo, como representado na figura 4.1. Tais pacotes apresentam uma densidade de partícula constante ( $\rho_A$  e  $\rho_B$ ) e comprimentos  $l_A$  e  $l_B$ .

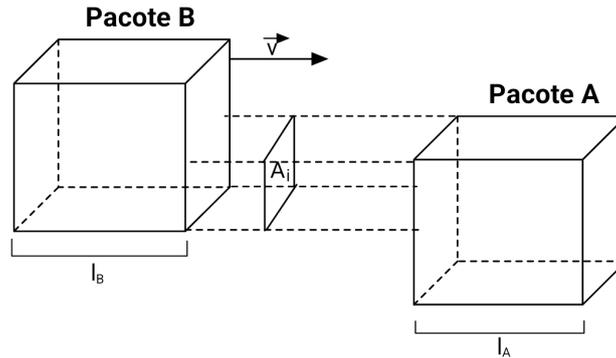


Figura 4.1: Colisão frontal de dois pacotes de onda, onde  $\phi_A$  é o alvo fixo e  $\phi_B$  é o feixe.

Neste caso, podemos escrever a probabilidade de uma partícula de  $\phi_B$  ser espalhada como sendo a razão entre a área efetiva ( $A_{eff}$ ) de colisão e a área delimitada pela intersecção dos pacotes ( $A_i$ ):

$$P = \frac{A_{eff}}{A_i} \quad (4.1.1)$$

Como  $\phi_A$  é o alvo fixo, então a área efetiva de colisão é a soma da seção de choque de cada partícula ( $\sigma$ ) de  $\mathcal{A}$  que esteja contida na intersecção dos pacotes, ou seja:

$$A_{eff} = N_{A_i} \sigma \quad (4.1.2)$$

O número de partículas de  $\mathcal{A}$  na área de intersecção é o produto entre a densidade de partículas na seção reta do pacote ( $\rho_{\mathcal{A}}l_{\mathcal{A}}$ ) e  $A_i$ . Logo:

$$A_{eff} = \rho_{\mathcal{A}}l_{\mathcal{A}}A_i \sigma \quad (4.1.3)$$

Substituindo esta expressão na probabilidade (equação 4.1.1):

$$P = \rho_{\mathcal{A}}l_{\mathcal{A}} \sigma \quad (4.1.4)$$

Outra forma de definirmos a probabilidade de espalhamento de uma partícula de  $\mathcal{B}$  é através da razão do número partículas espalhadas ( $N_{sct}$ ) e número de partículas incidentes no alvo ( $\rho_{\mathcal{B}}l_{\mathcal{B}}A_i$ ). Deste modo:

$$\frac{N_{sct}}{\rho_{\mathcal{B}}l_{\mathcal{B}}A_i} = P = \rho_{\mathcal{A}}l_{\mathcal{A}} \sigma \implies \sigma = \frac{N_{sct}}{\rho_{\mathcal{B}}l_{\mathcal{B}}A_i\rho_{\mathcal{A}}l_{\mathcal{A}}} \quad (4.1.5)$$

Note que, assim como definido,  $\sigma$  possui unidade de área e é proporcional a razão entre o número de partículas espalhadas e incidentes, nos fornecendo assim uma medida de probabilidade de ocorrer o espalhamento. Além disto, vemos que o resultado que obtivemos é simétrico em relação as grandezas de  $\phi_{\mathcal{A}}$  e  $\phi_{\mathcal{B}}$ , nos mostrando que poderíamos ter tomado o referencial de  $\mathcal{B}$ , onde ele seria o alvo. Esta simetria vai além desses dessas duas escolhas, pois a seção de choque total é um invariante de Lorentz[17].

Vamos considerar agora que o alvo consiste em uma única partícula, ou seja,  $N_{\mathcal{A}i} = A_i\rho_{\mathcal{A}}l_{\mathcal{A}} = 1$ . Além disto, as partículas incidentes estão distribuídas uniformemente em relação ao alvo e cada uma delas conta com um parâmetro de impacto  $\mathbf{b}$  (Figura 4.2).

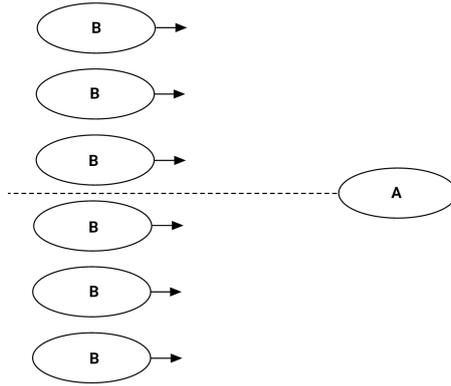


Figura 4.2: Colisão frontal

Para este caso, a expressão da seção de choque (equação 4.1.5) é escrita como:

$$\sigma = \frac{N_{sct}}{\rho_{\mathcal{B}}l_{\mathcal{B}}} \quad (4.1.6)$$

A probabilidade de uma partícula ser espalhada por  $\mathcal{A}$  deve depender do seu parâmetro de impacto, ou seja,  $\mathcal{P}(\mathbf{b})$ . Deste modo, para um determinado  $\mathbf{b}$ , o número de partículas espalhadas é o produto da densidade de partículas  $\mathcal{B}$  na seção reta ( $n_{\mathcal{B}}(\mathbf{b})$ ) e a probabilidade  $\mathcal{P}(\mathbf{b})$

$$dN_{sct} = n_{\mathcal{B}}(\mathbf{b})\mathcal{P}(\mathbf{b}) \quad (4.1.7)$$

Para obtermos o número total de partículas espalhadas, devemos integrar sob todos os parâmetros de impacto. Além disto devemos notar que estamos trabalhando com uma densidade uniforme de partículas na seção reta, ou seja,  $n_{\mathcal{B}}(\mathbf{b}) = \rho_{\mathcal{B}}l_{\mathcal{B}}$ . Portanto:

$$N_{sct} = \rho_{\mathcal{B}}l_{\mathcal{B}} \int d^2b \mathcal{P}(\mathbf{b}) \quad (4.1.8)$$

Substituindo este resultado na expressão da seção de choque (equação 4.1.6):

$$\sigma = \int d^2b P(\mathbf{b}) \quad (4.1.9)$$

Para casos mais complexos, onde as densidades não são uniformes, calcular a interação entre as partículas exige uma abordagem diferencial da seção de choque. Deste modo, é comum definir a seção de choque diferencial  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  como sendo a razão entre o número de partículas espalhadas em um ângulo sólido  $d\Omega$  e o número de partículas incidentes por unidade de área. Consequentemente, a seção de choque total será a integral sobre o ângulo sólido:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (4.1.10)$$

Na teoria de espalhamento, o cálculo da seção de choque diferencial depende de um objeto chamado matriz de espalhamento. Deste modo, nosso próximo passo consistirá em definir a matriz de espalhamento e encontrar a equação que a relaciona com a seção de choque infinitesimal.

## 4.2 A matriz de espalhamento $S$ e sua relação com a seção de choque

Em problemas de espalhamento, o pacote  $\phi_A$  é criado longe do alvo ( $\phi_B$ ) em um passado distante. Em seguida, esse pacote se propaga em direção ao alvo, de modo que ao se aproximar dele ocorre uma interação e vários fragmentos de pacote de onda ( $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ ) são espalhados em diversas direções. A interação pacote-alvo ocorre efetivamente apenas nas vizinhanças do alvo e consequentemente, tanto no passado como no futuro distante, os pacotes de onda se propagam de maneira aproximadamente livre. Deste modo, se  $|\phi_A\phi_B\rangle_{in}$  e  $|\phi_1\phi_2\dots\phi_n\rangle_{out}$  são os estados do sistema antes e após o espalhamento, então a evolução temporal<sup>1</sup> deles para o passado e o futuro distante, respectivamente, nos levará a estados aproximadamente livres:

$$\lim_{t' \rightarrow -\infty} U_I(t', t) |\phi_A\phi_B\rangle_{in} = |\phi_A\phi_B\rangle_0 \quad (4.2.1)$$

$$\lim_{t' \rightarrow +\infty} U_I(t', t) |\phi_1\phi_2\dots\phi_n\rangle_{out} = |\phi_1\phi_2\dots\phi_n\rangle_0 \quad (4.2.2)$$

Utilizando que a evolução temporal é unitária:

$$|\phi_A\phi_B\rangle_{in} = \lim_{t' \rightarrow -\infty} U_I^\dagger(t', t) |\phi_A\phi_B\rangle_0 \quad (4.2.3)$$

$$|\phi_1\phi_2\dots\phi_n\rangle_{out} = \lim_{t' \rightarrow +\infty} U_I^\dagger(t', t) |\phi_1\phi_2\dots\phi_n\rangle_0 \quad (4.2.4)$$

Através deste resultado podemos calcular a amplitude de probabilidade de o espalhamento ocorrer, uma vez que ela é dada pelo *overlap* entre os estados *in* e *out*:

$$\begin{aligned} out \langle \phi_1\phi_2\dots\phi_n | \phi_A\phi_B \rangle_{in} &= \lim_{t' \rightarrow +\infty} {}_0 \langle \phi_1\phi_2\dots\phi_n | U_I(t', t) U_I^\dagger(-t', t) | \phi_A\phi_B \rangle_0 \\ out \langle \phi_1\phi_2\dots\phi_n | \phi_A\phi_B \rangle_{in} &= \lim_{t' \rightarrow +\infty} {}_0 \langle \phi_1\phi_2\dots\phi_n | U_I(t', t) U_I(t, -t') | \phi_A\phi_B \rangle_0 \\ out \langle \phi_1\phi_2\dots\phi_n | \phi_A\phi_B \rangle_{in} &= {}_0 \langle \phi_1\phi_2\dots\phi_n | \lim_{t' \rightarrow +\infty} U_I(t', -t') | \phi_A\phi_B \rangle_0 \\ out \langle \phi_1\phi_2\dots\phi_n | \phi_A\phi_B \rangle_{in} &= {}_0 \langle \phi_1\phi_2\dots\phi_n | S | \phi_A\phi_B \rangle_0 \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

O operador de evolução temporal  $S \equiv \lim_{t' \rightarrow +\infty} U_I(t', -t')$  é chamado de matriz de espalhamento e possui toda a informação de como os estados inicial e final, assintoticamente livres, evoluem no tempo. Apesar de incluirmos a interação entre as partículas em nossa teoria, ainda existe probabilidade de que as partículas passem uma pela outra sem que haja interação. Tendo em vista este fato, podemos escrever a matriz de espalhamento da seguinte forma:

$$S = I + iT \quad (4.2.6)$$

<sup>1</sup>Note que aqui estamos nos referindo a evolução temporal na representação de interação.

onde a identidade  $I$  representa a parte livre e operador de transição  $\mathcal{T}$  está ligado aos espalhamentos em que há interação. Substituindo isto na equação 4.2.5:

$${}_{out} \langle \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n | \phi_A \phi_B \rangle_{in} = 0 \langle \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n | I | \phi_A \phi_B \rangle_0 + 0 \langle \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n | i\mathcal{T} | \phi_A \phi_B \rangle_0 \quad (4.2.7)$$

A probabilidade que desejamos calcular nesta seção é aquela em que o estado final do espalhamento de  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  seja diferente do inicial. Portanto, para calcularmos  $\mathcal{P}(\mathcal{AB} \rightarrow 123\dots n)$ , devemos considerar apenas o segundo termo da equação 4.2.7, pois esta amplitude conta apenas com operador de transição e consequentemente apenas espalhamentos em que ocorre interação são computados. Utilizando que a probabilidade é o módulo ao quadrado da amplitude:

$$\mathcal{P}(\mathcal{AB} \rightarrow 123\dots n) = |0 \langle \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n | i\mathcal{T} | \phi_A \phi_B \rangle_0|^2 \quad (4.2.8)$$

Para que possamos definir a amplitude de espalhamento mais adiante, é conveniente escrevermos os estados na base de autoestados de momento. Utilizando a relação de completude da base de momento, o estado  $|\phi_A \phi_B\rangle_0$  pode ser escrito como:

$$|\phi_A \phi_B\rangle_0 = \int \int \frac{d^3 \mathbf{k}_A}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_A}} \frac{d^3 \mathbf{k}_B}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_B}} |\mathbf{k}_A \mathbf{k}_B\rangle \langle \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B | \phi_A \phi_B \rangle_0 \quad (4.2.9)$$

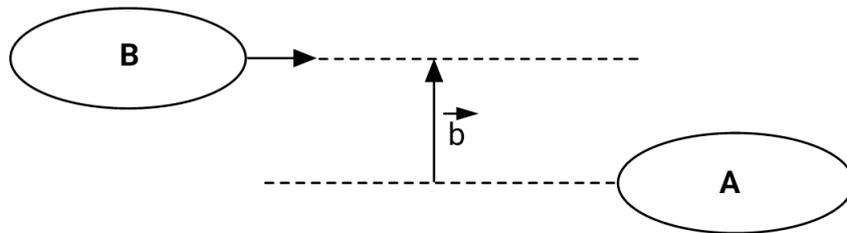


Figura 4.3: Colisão frontal entre o pacote  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{A}$ , onde o incidente conta com um parâmetro de impacto  $\mathbf{b}$  em relação ao alvo.

Nós sabemos que  $\langle \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B | \phi_A \phi_B \rangle_0 = \phi_A(\mathbf{k}_A) \phi_B(\mathbf{k}_B)$ . No entanto, como mostra a figura 4.3, o pacote  $\mathcal{B}$  possui um parâmetro de impacto  $\mathbf{b}$  em relação a  $\mathcal{A}$ , o que implica que  $\phi_B(\mathbf{k}_B)$  possui uma fase  $e^{-i\mathbf{k}_B \cdot \mathbf{b}}$  relativa a  $\phi_A(\mathbf{k}_A)$ , que leva em conta o deslocamento entre o centro dos pacotes. Podemos explicitar essa fase fazendo  $\phi_B(\mathbf{k}_B) \rightarrow \phi_B(\mathbf{k}_B) e^{-i\mathbf{k}_B \cdot \mathbf{b}}$  e consequentemente  $\phi_B(\mathbf{k}_B)$  passa a ser uma função de onda colinear a  $\phi_A(\mathbf{k}_A)$ . Deste modo, a equação 4.2.9 é escrita como:

$$|\phi_A \phi_B\rangle_0 = \int \int \frac{d^3 \mathbf{k}_A}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_A}} \frac{d^3 \mathbf{k}_B}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_B}} \phi_A(\mathbf{k}_A) \phi_B(\mathbf{k}_B) e^{-i\mathbf{k}_B \cdot \mathbf{b}} |\mathbf{k}_A \mathbf{k}_B\rangle \quad (4.2.10)$$

Substituindo este resultado na expressão da probabilidade (equação 4.2.8):

$$\mathcal{P}(\mathcal{AB} \rightarrow 123\dots n) = \left( \prod_{j=\mathcal{A},\mathcal{B}} \int \int \frac{d^3 \mathbf{k}_j}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_j}} \frac{d^3 \mathbf{k}'_j}{(2\pi)^3 \sqrt{2E'_j}} \phi_j(\mathbf{k}_j) \phi_j^*(\mathbf{k}'_j) \right) e^{-i(\mathbf{k}_B - \mathbf{k}'_B) \cdot \mathbf{b}} |0 \langle \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n | i\mathcal{T} | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle|^2 \quad (4.2.11)$$

Podemos considerar um estado final cujo o momento das  $n$  partículas esteja dentro de um intervalo infinitesimal  $d^3 \mathbf{p}_1 d^3 \mathbf{p}_2 \dots d^3 \mathbf{p}_n$ , de modo que a probabilidade seja o produto entre o intervalo, devidamente normalizado, e a amplitude do espalhamento [17, 22]:

$$\mathcal{P}(\mathcal{AB} \rightarrow 123\dots n) = \left( \prod_{f=1}^n \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \right) \left( \prod_{j=\mathcal{A},\mathcal{B}} \int \int \frac{d^3 \mathbf{k}_j}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_j}} \frac{d^3 \mathbf{k}'_j}{(2\pi)^3 \sqrt{2E'_j}} \phi_j(\mathbf{k}_j) \phi_j^*(\mathbf{k}'_j) \right) e^{-i(\mathbf{k}_B - \mathbf{k}'_B) \cdot \mathbf{b}} |\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n | i\mathcal{T} | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle|^2 \quad (4.2.12)$$

onde o termo  $(2\pi)^3 2E_f$  aparece devido a normalização dos estados.

Devido a conservação do quadrimomento, a matriz  $\mathcal{T}$  deve conter um fator  $\delta^{(4)}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum_{f=1}^n p_f)$ . Explicitando este fator, podemos escrever a amplitude  $\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n | i\mathcal{T} | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle$  como:

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n | i\mathcal{T} | \mathbf{k}_{\mathcal{A}} \mathbf{k}_{\mathcal{B}} \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum_{f=1}^n p_f) i\mathcal{M}(k_{\mathcal{A}}, k_{\mathcal{B}} \rightarrow p_f) \quad (4.2.13)$$

onde  $\mathcal{M}$  é chamada de elemento de matriz invariante. Substituindo esta definição na expressão da probabilidade:

$$\begin{aligned} P(\mathcal{A}\mathcal{B} \rightarrow 123\dots n) &= \left( \prod_{f=1}^n \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \right) \left( \prod_{j=\mathcal{A}, \mathcal{B}} \int \int \frac{d^3 \mathbf{k}_j}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_j}} \frac{d^3 \mathbf{k}'_j}{(2\pi)^3 \sqrt{2E'_j}} \phi_j(\mathbf{k}_j) \phi_j^*(\mathbf{k}'_j) \right) e^{-i(\mathbf{k}_{\mathcal{B}} - \mathbf{k}'_{\mathcal{B}}) \cdot \mathbf{b}} \\ &\quad (2\pi)^8 \delta^{(4)} \left( k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum_{f=1}^n p_f \right) \delta^{(4)} \left( k'_{\mathcal{A}} + k'_{\mathcal{B}} - \sum_{f=1}^n p_f \right) |\mathcal{M}(k_{\mathcal{A}}, k_{\mathcal{B}} \rightarrow p_f)|^2 \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

Anteriormente, nós mostramos que no caso de várias partículas incidentes e apenas um alvo, a seção de choque é a integral da probabilidade sobre o parâmetro de impacto (equação 4.1.9). Portanto, esse resultado nos permitirá estabelecer uma relação entre a seção de choque e o elemento de matriz invariante. No entanto, é importante lembrarmos que estamos lidando com um intervalo infinitesimal no espaço de momentos e conseqüentemente, a seção de choque que encontraremos é infinitesimal. Utilizando o resultado 4.1.9:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \int d^2b \left( \prod_{f=1}^n \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \right) \left( \prod_{j=\mathcal{A}, \mathcal{B}} \int \int \frac{d^3 \mathbf{k}_j}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_j}} \frac{d^3 \mathbf{k}'_j}{(2\pi)^3 \sqrt{2E'_j}} \phi_j(\mathbf{k}_j) \phi_j^*(\mathbf{k}'_j) \right) e^{i(\mathbf{k}'_{\mathcal{B}} - \mathbf{k}_{\mathcal{B}}) \cdot \mathbf{b}} \\ &\quad (2\pi)^8 \delta^{(4)} \left( k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum_{f=1}^n p_f \right) \delta^{(4)} \left( k'_{\mathcal{A}} + k'_{\mathcal{B}} - \sum_{f=1}^n p_f \right) |\mathcal{M}(k_{\mathcal{A}}, k_{\mathcal{B}} \rightarrow p_f)|^2 \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Calculando essas integrais<sup>2</sup>, nós obteremos que a relação entre a seção de choque infinitesimal e a amplitude de espalhamento é dada por:

$$d\sigma = d\Pi_n \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} |\mathcal{M}(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}} \rightarrow p_f)|^2 \quad (4.2.16)$$

Onde:

$$d\Pi_n = \left( \prod_{f=1}^n \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{f=1}^n p_f \right) \quad (4.2.17)$$

é chamado de diferencial de espaço de fase invariante de Lorentz e  $|\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|$  é a velocidade relativa entre os pacotes  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ .

### 4.2.1 Fórmula de redução de LSZ para campos escalares

Até este ponto, vimos que o elemento de matriz invariante desempenha um papel fundamental no cálculo da seção de choque. Portanto, nosso próximo passo é desenvolver um procedimento que nos permitirá calcular  $\mathcal{M}$  a partir dos campos quânticos associados às partículas que serão espalhadas. Nesta seção, focaremos na derivação para o caso do campo escalar quântico, mas vale ressaltar que os outros tipos de campos apresentam resultados similares.

Por definição, a expressão para o elemento de matriz invariante é dada pela equação 4.2.13:

<sup>2</sup>A resolução dessas integrais pode ser encontrada no apêndice D.

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n | i\mathcal{T} | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_A + k_B - \sum_{f=1}^n p_f) i\mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow p_f) \quad (4.2.18)$$

Observe que, do lado esquerdo da equação, temos o operador de transição, que consiste na parte da matriz de espalhamento  $S$  onde ocorre efetivamente a interação de partículas. Por sua vez, a matriz de espalhamento é definida como o operador tal que (Equação 4.2.5):

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n | S | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle = {}_{out} \langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle_{in} \quad (4.2.19)$$

onde  $|\mathbf{k}_A \mathbf{k}_B\rangle_{in}$  é o estado inicial em  $t = -\infty$  e  $|\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n\rangle_{out}$  consiste no estado final em  $t = +\infty$ . Assumindo que essas partículas estão associadas a um campo escalar  $\phi(x)$ , podemos reescrever esses estados usando os operadores  $a^\dagger_{\mathbf{p}}(t)$ , que criam uma partícula de momento  $\mathbf{p}$  em um instante de tempo  $t$ , e o estado de vácuo  $|\Omega\rangle$  da teoria com interação, da seguinte maneira:

$$|\mathbf{k}_A \mathbf{k}_B\rangle_{in} = \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_A}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}_B}} a^\dagger_{\mathbf{k}_A}(-\infty) a^\dagger_{\mathbf{k}_B}(-\infty) |\Omega\rangle \quad \text{e} \quad |\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n\rangle_{out} = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_1}} \dots \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}_n}} a^\dagger_{\mathbf{p}_1}(+\infty) \dots a^\dagger_{\mathbf{p}_n}(+\infty) |\Omega\rangle \quad (4.2.20)$$

Substituindo este resultado na equação 4.2.19:

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n | S | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle = 2^{\frac{n+2}{2}} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}_A}} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}_B}} \sqrt{\omega_{\mathbf{p}_1}} \dots \sqrt{\omega_{\mathbf{p}_n}} \langle \Omega | a_{\mathbf{p}_1}(+\infty) \dots a_{\mathbf{p}_n}(+\infty) a^\dagger_{\mathbf{k}_A}(-\infty) a^\dagger_{\mathbf{k}_B}(-\infty) |\Omega\rangle \quad (4.2.21)$$

Note que os operadores de criação e aniquilação estão ordenados temporalmente. Deste modo:

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n | S | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle = 2^{\frac{n+2}{2}} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}_A} \omega_{\mathbf{k}_B} \omega_{\mathbf{p}_1} \dots \omega_{\mathbf{p}_n}} \langle \Omega | T \left[ a_{\mathbf{p}_1}(+\infty) \dots a_{\mathbf{p}_n}(+\infty) a^\dagger_{\mathbf{k}_A}(-\infty) a^\dagger_{\mathbf{k}_B}(-\infty) \right] |\Omega\rangle \quad (4.2.22)$$

Devido a presença do operador de ordenação temporal, a expressão acima pode ser escrita como:

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n | S | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle = 2^{\frac{n+2}{2}} \sqrt{\omega_{\mathbf{k}_A} \omega_{\mathbf{k}_B} \omega_{\mathbf{p}_1} \dots \omega_{\mathbf{p}_n}} \langle \Omega | T \left[ [a_{\mathbf{p}_1}(+\infty) - a_{\mathbf{p}_1}(-\infty)] \dots [a_{\mathbf{p}_n}(+\infty) - a_{\mathbf{p}_n}(-\infty)] [a^\dagger_{\mathbf{k}_A}(-\infty) - a^\dagger_{\mathbf{k}_A}(+\infty)] [a^\dagger_{\mathbf{k}_B}(-\infty) - a^\dagger_{\mathbf{k}_B}(+\infty)] \right] |\Omega\rangle \quad (4.2.23)$$

Se realizarmos estes produtos, todos os termos além do que tínhamos antes serão nulos, uma vez que a ordenação temporal faz com que qualquer um destes termos extras tenham  $\langle \Omega | a^\dagger_{\mathbf{k}_{A,B}}(+\infty) = 0$  na esquerda ou  $a_{\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n}(-\infty) |\Omega\rangle = 0$  na direita. Para relacionarmos esta expressão envolvendo os operadores de criação e aniquilação com os campos escalares, iremos utilizar a seguinte identidade:

$$i \int d^4x e^{ip_\mu x^\mu} (\square + m^2) \phi(x) = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} [a_{\mathbf{p}}(+\infty) - a_{\mathbf{p}}(-\infty)] \quad (4.2.24)$$

onde este resultado encontra-se derivado no apêndice E. Substituindo esta expressão em 4.2.23:

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n | S | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle = \left[ i \int d^4x_A e^{ip_A \mu x_A^\mu} (\square_A + m^2) \right] \left[ i \int d^4x_B e^{ip_B \mu x_B^\mu} (\square_B + m^2) \right] \left[ i \int d^4x_1 e^{ip_1 \mu x_1^\mu} (\square_1 + m^2) \right] \dots \left[ i \int d^4x_n e^{ip_n \mu x_n^\mu} (\square_n + m^2) \right] \langle \Omega | T [\phi(x_A) \phi(x_B) \phi(x_1) \dots \phi(x_n)] |\Omega\rangle \quad (4.2.25)$$

Este resultado é conhecido como a fórmula de redução de Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ) e relaciona os elementos da matriz de espalhamento com uma expressão que depende dos campos escalares quânticos  $\phi(x)$ . De maneira similar, também pode-se derivar uma fórmula de redução de LSZ para campos de Dirac[23]:

$$\langle \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \dots \mathbf{p}_n | S | \mathbf{k}_A \mathbf{k}_B \rangle = \left[ i \int d^4x_A e^{ip_A \mu x_A^\mu} u^{s_A}(p_A) (-i\cancel{\partial}_A + m^2) \right] \left[ i \int d^4x_B e^{ip_B \mu x_B^\mu} u^{s_B}(p_B) (-i\cancel{\partial}_B + m^2) \right] \dots \left[ i \int d^4x_1 e^{ip_1 \mu x_1^\mu} \bar{u}^{s_1}(p_1) (i\cancel{\partial}_1 + m^2) \right] \left[ i \int d^4x_n e^{ip_n \mu x_n^\mu} \bar{u}^{s_2}(p_2) (i\cancel{\partial}_2 + m^2) \right] \langle \Omega | T [\psi(x_A) \psi(x_B) \bar{\psi}(x_1) \dots \bar{\psi}(x_n)] |\Omega\rangle \quad (4.2.26)$$

# Capítulo 5

## Diagramas de Feynman

Calcular as amplitudes de espalhamento desempenha um papel fundamental na física de partículas e desempenhará um papel crucial posteriormente, quando determinaremos o momento magnético dos férmions. Como discutido no capítulo anterior, a Hamiltoniana de interação nos permite calcular a matriz de espalhamento por meio da série de Dyson e conseqüentemente nos proporciona a amplitude de espalhamento. No entanto, é importante destacar que a resolução da série de Dyson geralmente não é uma tarefa trivial na maioria dos casos.

Portanto, neste capítulo, temos como objetivo apresentar um método alternativo para a obtenção da amplitude de espalhamento. Este método se baseia em uma representação diagramática para cada termo da série, que são conhecidos como os diagramas de Feynman. Isso nos oferece uma abordagem visual e intuitiva para entender e calcular as amplitudes de espalhamento, tornando o processo mais acessível e compreensível, especialmente em cenários complexos de interação de partículas.

A fim de construirmos os diagramas de Feynman e suas respectivas regras, será necessário discutir tópicos como o estado de vácuo em um sistema com interação, produtos com ordenação temporal e contrações de Wick.

### 5.1 O estado de vácuo em um sistema com interação

Em um sistema sujeito a interações, com Hamiltoniana  $H = H_0 + H_I$ , é importante observar que seus estados próprios de energia geralmente diferem daqueles da teoria livre, representada por  $H_0$ . Como resultado, o estado de menor energia deste sistema não corresponde ao vácuo da teoria livre, denotado por  $|0\rangle$ , mas sim a um estado  $|\Omega\rangle$  que satisfaz a seguinte relação:

$$H |\Omega\rangle = E_0 |\Omega\rangle \quad (5.1.1)$$

onde  $E_0$  representa a menor energia possível para o sistema. No entanto, conforme discutido no capítulo anterior, em problemas de espalhamento, os estados que representam os pacotes de partículas são aproximadamente livres à medida que  $t \rightarrow \pm\infty$ . Deste modo, o vácuo da teoria com interação pode ser aproximadamente escrito como a evolução temporal do vácuo da teoria livre a partir de um instante  $t \rightarrow -\infty$  até um instante  $t_0$ , o qual escolhemos como sendo 0:

$$|\Omega\rangle = \mathcal{N}_i \lim_{t \rightarrow -\infty} U_I(0, t) |0\rangle \quad (5.1.2)$$

De maneira similar, temos que  $\langle\Omega| = \mathcal{N}_f \lim_{t \rightarrow \infty} U_I(t, 0) \langle 0|$ . Aqui,  $\mathcal{N}_i$  e  $\mathcal{N}_f$  são constantes inseridas para garantir a normalização do estado de vácuo da teoria com interação em qualquer instante de tempo, ou seja,  $\langle\Omega|\Omega\rangle = 1$ , tal como na teoria livre ( $\langle 0|0\rangle = 1$ ). Assim, elas devem satisfazer a seguinte condição:

$$\begin{aligned} \langle\Omega|\Omega\rangle &= \mathcal{N}_f \mathcal{N}_i \lim_{t \rightarrow -\infty} \langle 0| U_I^\dagger(0, t) U_I(0, t) |0\rangle = \mathcal{N}_f \mathcal{N}_i \lim_{t \rightarrow +\infty} \langle 0| U_I(t, -t) |0\rangle = 1 \\ \implies \mathcal{N}_f \mathcal{N}_i &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\langle 0| U_I(t, -t) |0\rangle} \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

Como demonstrado no capítulo anterior, o cálculo das amplitudes envolve a série de Dyson e, conseqüentemente, o valor esperado no vácuo de produtos ordenados temporalmente dos campos. Em outras palavras, para um campo escalar  $\phi(x_i)$ , obtemos expressões do tipo  $\langle\Omega| T [\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] |\Omega\rangle$ . Substituindo as equações 5.1.2 e 5.1.3 nesta função de correlação, podemos expressá-la em termos do vácuo da teoria livre da seguinte forma:

$$\langle \Omega | T [\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | \Omega \rangle = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\langle 0 | U_I(t, 0) T [\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] U_I(0, -t) | 0 \rangle}{\langle 0 | U_I(t, -t) | 0 \rangle} \quad (5.1.4)$$

Como há um ordenamento temporal do produto inteiro, então podemos assumir que  $t_1 > t_2 > \dots > t_n$  sem perda de generalidade. Assim:

$$\langle \Omega | T [\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | \Omega \rangle = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\langle 0 | U_I(t, 0) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) U_I(0, -t) | 0 \rangle}{\langle 0 | U_I(t, -t) | 0 \rangle} \quad (5.1.5)$$

Na representação de interação, temos a grande vantagem de trabalhar com os campos da teoria livre ( $\phi_0(\mathbf{x})$ ). Portanto, como visto no capítulo C, podemos utilizar a relação entre o campo na representação de Heisenberg e na de interação ( $\phi(x_i) = U_I^\dagger(t_i, 0) \phi_0(\mathbf{x}_i) U_I(t_i, 0)$ ) para simplificar a função de correlação:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T [\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | \Omega \rangle = \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\langle 0 | U_I(t, 0) U_I^\dagger(t_1, 0) \phi_0(x_1) U_I(t_1, 0) U_I^\dagger(t_2, 0) \dots U_I(t_{n-1}, 0) U_I^\dagger(t_n, 0) \phi_0(x_n) U_I(t_n, 0) U_I(0, -t) | 0 \rangle}{\langle 0 | U_I(t, -t) | 0 \rangle} \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

$$\langle \Omega | T [\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | \Omega \rangle = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\langle 0 | U_I(t, t_1) \phi_0(x_1) U_I(t_2, t_1) \dots U_I(t_n, t_{n-1}) \phi_0(x_n) U_I(t_n, -t) | 0 \rangle}{\langle 0 | U_I(t, -t) | 0 \rangle} \quad (5.1.7)$$

Como todos operadores  $U_I(t, t_0)$  já contém uma ordenação temporal e por hipótese temos que  $t_1 > t_2 > \dots > t_n$ , então podemos trazer de volta a ordenação temporal sobre todo o produto e reordenar o produto da forma que desejarmos. Fazendo isto obtemos:

$$\langle \Omega | T [\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | \Omega \rangle = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\langle 0 | T [\phi_0(x_1) \dots \phi_0(x_n) U_I(t, -t)] | 0 \rangle}{\langle 0 | U_I(t, -t) | 0 \rangle} \quad (5.1.8)$$

Substituindo a expressão do operador de evolução temporal  $U_I$ , o qual a derivação é feita no final do apêndice C (equação C.2.12):

$$\langle \Omega | T [\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T \left[ \phi_0(x_1) \dots \phi_0(x_n) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' H_I(t')} \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' H_I(t')} | 0 \rangle} \quad (5.1.9)$$

## 5.2 Produtos temporalmente ordenados e o teorema de Wick

A fim de estudarmos a expansão da equação 5.1.9 e a relacionarmos com diagramas, precisamos da forma explícita da Hamiltoniana de interação. Para ilustrar este processo, adotaremos o seguinte exemplo:

$$H_I = -\frac{\lambda}{3!} \int d^3x \phi_0(x)^3 \quad (5.2.1)$$

Por simplicidade, iremos considerar apenas a ordenação temporal do produto com  $n = 2$ , isto é:

$$\langle \Omega | T [\phi(x_1) \phi(x_2)] | \Omega \rangle = \frac{\langle 0 | T \left[ \phi_0(x_1) \phi_0(x_2) e^{\frac{i\lambda}{3! \hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \phi_0(x)^3} \right] | 0 \rangle}{\langle 0 | e^{\frac{i\lambda}{3! \hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \phi_0(x)^3} | 0 \rangle} \quad (5.2.2)$$

Seja  $\lambda$  um número pequeno, podemos expandir perturbativamente o numerador da equação acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \left[ \phi_0(x_1) \phi_0(x_2) e^{\frac{i\lambda}{3! \hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \phi_0(x)^3} \right] | 0 \rangle = \langle 0 | T [\phi_0(x_1) \phi_0(x_2)] | 0 \rangle + \frac{i\lambda}{3! \hbar} \int d^4x \langle 0 | T [\phi_0(x_1) \phi_0(x_2) \phi_0(x)^3] | 0 \rangle \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{i\lambda}{3! \hbar} \right)^2 \int d^4x \int d^4y \langle 0 | T [\phi_0(x_1) \phi_0(x_2) \phi_0(x)^3 \phi_0(y)^3] | 0 \rangle + \mathcal{O}(\lambda^3) \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

Observe que em cada termo aparece uma função de correlação do produto de campos livres. Para calcular esses produtos precisamos determinar uma expressão para a ordenação temporal desses campos. Começaremos pelo primeiro termo da expansão, onde temos a ordenação temporal de apenas dois campos. Nesse processo, é conveniente decompor o campo escalar livre como  $\phi_0(x) = \phi_0^{(+)}(x) + \phi_0^{(-)}(x)$ , onde:

$$\phi_0^{(+)}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} e^{-ip \cdot x} a_{\mathbf{p}} \quad \text{e} \quad \phi_0^{(-)}(x) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} e^{ip \cdot x} a_{\mathbf{p}}^{\dagger} \quad (5.2.4)$$

Tal decomposição é vantajosa pois  $\phi_0^{(+)}(x)|0\rangle = 0$  e  $\langle 0|\phi_0^{(-)}(x) = 0$ . Desta forma, supondo que  $x_1^0 > x_2^0$ , temos:

$$\begin{aligned} T[\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)] &= T\left[\left(\phi_0^{(+)}(x_1) + \phi_0^{(-)}(x_1)\right)\left(\phi_0^{(+)}(x_2) + \phi_0^{(-)}(x_2)\right)\right] \\ &= \phi_0^{(+)}(x_1)\phi_0^{(+)}(x_2) + \phi_0^{(+)}(x_1)\phi_0^{(-)}(x_2) + \phi_0^{(-)}(x_1)\phi_0^{(+)}(x_2) + \phi_0^{(-)}(x_1)\phi_0^{(-)}(x_2) \\ &= \phi_0^{(+)}(x_1)\phi_0^{(+)}(x_2) + \phi_0^{(-)}(x_2)\phi_0^{(+)}(x_1) + \phi_0^{(-)}(x_1)\phi_0^{(+)}(x_2) + \phi_0^{(-)}(x_1)\phi_0^{(-)}(x_2) + \left[\phi_0^{(+)}(x_1), \phi_0^{(-)}(x_2)\right] \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Nos quatro primeiro termos todas as componentes de aniquilação estão a direita e as de criação a esquerda, isto é, estão normalmente ordenados. O último termo consiste em um comutador e é definido como a de contração de Wick:

$$\overline{\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)} = \begin{cases} \left[\phi_0^{(+)}(x_1), \phi_0^{(-)}(x_2)\right] = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}, & \text{se } x_1^0 > x_2^0 \\ \left[\phi_0^{(+)}(x_2), \phi_0^{(-)}(x_1)\right] = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})} e^{-ip \cdot (x_2 - x_1)}, & \text{se } x_2^0 > x_1^0 \end{cases} \quad (5.2.6)$$

onde estes comutadores foram calculados no capítulo 1 (equação 1.2.20). Fisicamente, a contração de Wick representa a criação de uma partícula em um ponto e sua aniquilação em outro ponto do espaço. Com base na definição da contração e na ordenação normal observada, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$T[\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)] = : \phi_0(x_1)\phi_0(x_2) + \overline{\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)} : \quad (5.2.7)$$

Esse resultado é um caso específico do teorema de Wick[17, 24], que afirma, em termos gerais:

$$T[\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\dots\phi_0(x_n)] = : \phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\dots\phi_0(x_n) + \text{todas as contrações possíveis} : \quad (5.2.8)$$

Aqui, “todas as contrações possíveis” se refere a uma soma de vários termos, onde cada termo corresponde a uma das possíveis maneiras de contrair os  $n$  campos em pares. Utilizando este teorema, podemos reescrever os termos da expansão perturbativa que realizamos (equação 5.2.3). No primeiro termo, como visto na equação 5.2.7, temos apenas uma contração de Wick e um produto normalmente ordenado, o qual tem valor esperado no vácuo nulo. Portanto, ele é escrito como:

$$\langle 0|T[\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)]|0\rangle = \langle 0|\overline{\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)}|0\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3(2\omega_{\mathbf{p}})} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)} \quad (5.2.9)$$

Essa grandeza é conhecida como o propagador de Feynman, pois descreve a propagação de uma partícula no espaço. Devido à recorrência desse termo, introduzimos a notação  $D_{ij} \equiv \langle 0|\overline{\phi_0(x_i)\phi_0(x_j)}|0\rangle$ . O segundo termo da expansão envolve um número ímpar de campos, o que significa que não haverá termos com todos os campos contraídos e, conseqüentemente, todos os termos terão pelo menos um campo não contraído, tornando o valor esperado no vácuo nulo:

$$\langle 0|T[\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\phi_0(x)^3]|0\rangle = 0 \quad (5.2.10)$$

O terceiro termo envolve o produto temporalmente ordenado de oito campos e suas contribuições não nulas são:

$$\begin{aligned} \langle 0|T[\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\phi_0(x)^3\phi_0(y)^3]|0\rangle &= 9D_{12}D_{xx}D_{xy}D_{yy} + 6D_{12}D_{xy}^3 + 18D_{1x}D_{2x}D_{xy}D_{yy} + 9D_{1x}D_{2y}D_{xx}D_{yy} \\ &+ 18D_{1x}D_{2y}D_{xy}^2 + 18D_{1y}D_{2y}D_{xy}D_{xx} + 9D_{1y}D_{2x}D_{xx}D_{yy} + 18D_{1y}D_{2x}D_{xy}^2 \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

É importante notar que na expansão perturbativa, as integrais são realizadas sobre as variáveis  $x$  e  $y$ , e, portanto, termos como o terceiro e o sexto darão a mesma contribuição, pois podemos renomear as variáveis  $x$  e  $y$ . O mesmo ocorrerá com o quarto e o sétimo, e o quinto e oitavo. Assim, somando os termos equivalentes, obtemos:

$$\begin{aligned} \int d^4x \int d^4y \langle 0|T[\phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\phi_0(x)^3\phi_0(y)^3]|0\rangle &= \int d^4x \int d^4y [9D_{12}D_{xx}D_{xy}D_{yy} + 6D_{12}D_{xy}^3 \\ &+ 36D_{1x}D_{2x}D_{xy}D_{yy} + 18D_{1x}D_{2y}D_{xx}D_{yy} + 36D_{1x}D_{2y}D_{xy}^2] \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Através desses resultados (equações 5.2.9, 5.2.10 e 5.2.12), podemos obter a expansão perturbativa até a ordem  $\lambda^2$  da equação 5.2.3. Consequentemente, também teremos uma expansão perturbativa para a função de correlação  $\langle \Omega|T[\phi(x_1)\phi(x_2)]|\Omega\rangle$  (equação 5.2.2):

$$\begin{aligned} \langle \Omega|T[\phi(x_1)\phi(x_2)]|\Omega\rangle &= \frac{1}{\langle 0|e^{\frac{i\lambda}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \phi_0(x)^3}|0\rangle} \left\{ D_{12} - \left(\frac{\lambda}{\hbar}\right)^2 \int d^4x \int d^4y \left[ \frac{1}{8}D_{12}D_{xx}D_{xy}D_{yy} + \frac{1}{12}D_{12}D_{xy}^3 \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{2}D_{1x}D_{2x}D_{xy}D_{yy} + \frac{1}{4}D_{1x}D_{2y}D_{xx}D_{yy} + \frac{1}{2}D_{1x}D_{2y}D_{xy}^2 \right] + \mathcal{O}(\lambda^3) \right\} \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

### 5.3 Diagramas de Feynman no espaço de posição

Ao analisar a equação 5.2.13, podemos observar que o teorema de Wick nos permite expressar a função de correlação como uma soma de propagadores de Feynman. Com isso em mente, podemos desenvolver uma representação diagramática para cada termo da expansão, onde os pontos  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x$  e  $y$  são representados por pontos e os propagadores são representados por linhas que conectam esses pontos. Assim, até a ordem  $\lambda^2$  podemos construir os seguintes diagramas de Feynman:

$$D_{12} = \begin{array}{ccc} & x_1 & x_2 \\ & \bullet & \bullet \\ & \text{---} & \end{array} \quad (5.3.1)$$

$$-\left(\frac{\lambda}{\hbar}\right)^2 \int d^4x \int d^4y \frac{1}{8}D_{12}D_{xx}D_{xy}D_{yy} = \begin{array}{ccc} & \begin{array}{cc} \text{---} & \text{---} \\ \circ & \circ \\ x & y \end{array} & \\ & x_1 & x_2 \\ & \bullet & \bullet \end{array} \quad (5.3.2)$$

$$-\left(\frac{\lambda}{\hbar}\right)^2 \int d^4x \int d^4y \frac{1}{12}D_{12}D_{xy}^3 = \begin{array}{ccc} & \begin{array}{cc} \text{---} & \text{---} \\ \circ & \circ \\ x & y \end{array} & \\ & x_1 & x_2 \\ & \bullet & \bullet \end{array} \quad (5.3.3)$$

$$-\left(\frac{\lambda}{\hbar}\right)^2 \int d^4x \int d^4y \frac{1}{2}D_{1x}D_{2x}D_{xy}D_{yy} = \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \\ y \end{array} & \\ & x_1 & x_2 \\ & \bullet & \bullet \\ & & x \end{array} \quad (5.3.4)$$

$$-\left(\frac{\lambda}{\hbar}\right)^2 \int d^4x \int d^4y \frac{1}{4}D_{1x}D_{2y}D_{xx}D_{yy} = \begin{array}{ccc} & \begin{array}{cc} \text{---} & \text{---} \\ \circ & \circ \\ x & y \end{array} & \\ & x_1 & x_2 \\ & \bullet & \bullet \end{array} \quad (5.3.5)$$

$$-\left(\frac{\lambda}{\hbar}\right)^2 \int d^4x \int d^4y \frac{1}{2}D_{1x}D_{2y}D_{xy}^2 = \begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccc} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \circ & \circ & \circ \\ x & & y \end{array} & \\ & x_1 & x_2 \\ & \bullet & \bullet \end{array} \quad (5.3.6)$$

Nós conseguimos construir um diagrama para cada termo da expansão perturbativa usando os propagadores de Feynman. No entanto, é interessante obter o termo da expansão a partir do diagrama, pois isso nos permite gerar a série sem a necessidade de calcular os produtos ordenados temporalmente, o que, na maioria dos casos, não é trivial. Para alcançar esse objetivo, precisamos estabelecer algumas regras adicionais para determinar os fatores que multiplicam os propagadores.

Geralmente, quatro regras são definidas para relacionar os diagramas aos termos da série perturbativa:

1. **Propagadores:** Para cada linha que conecta dois vértices, temos um propagador associado:

$$\bullet \xrightarrow{x \quad y} \bullet = D_{xy} \quad (5.3.7)$$

2. **Vértices internos:** Cada vértice interno em um diagrama corresponde a um fator:

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \end{array} \xrightarrow{x} = -i \frac{\lambda}{\hbar} \int d^4x \quad (5.3.8)$$

3. **Vértices externos:** Cada ponto externo em um diagrama corresponde a um fator igual a 1:

$$\bullet \xrightarrow{x} = 1 \quad (5.3.9)$$

4. **Fator de Simetria:** Dividir pelo fator de simetria do diagrama, o qual consiste no número de permutações de vértices internos ou linhas que não alteram o diagrama.

Este conjunto de regras é chamado de regras de Feynman no espaço de posição para  $H_I = \frac{\lambda}{3!} \int d^3x \phi_0(x)^3$  [17, 19].

### 5.3.1 Bolhas de vácuo

Agora que estabelecemos as regras para relacionar um diagrama com cada termo da expansão perturbativa (equação 5.2.13), precisamos discutir o fator de normalização  $\left\{ \langle 0 | e^{\frac{i\lambda}{3! \hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \phi_0(x)^3} | 0 \rangle \right\}^{-1}$ . De maneira análoga ao que fizemos para o numerador da equação 5.2.13, podemos expandir o denominador da seguinte forma:

$$\langle 0 | e^{\frac{i\lambda}{3! \hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \phi_0(x)^3} | 0 \rangle = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{3! \hbar} \right)^2 \int d^4x \int d^4y \langle 0 | T [\phi_0(x)^3 \phi_0(y)^3] | 0 \rangle + \mathcal{O}(\lambda^4) \quad (5.3.10)$$

onde utilizamos que as potências ímpares de  $\lambda$  não terão termos totalmente contraídos e resultarão em um valor esperado no vácuo nulo. Utilizando o teorema de Wick na expressão acima obtemos:

$$\langle 0 | e^{\frac{i\lambda}{3! \hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \phi_0(x)^3} | 0 \rangle = 1 - \left( \frac{\lambda}{\hbar} \right)^2 \int d^4x \int d^4y \left[ \frac{1}{8} D_{xx} D_{xy} D_{yy} + \frac{1}{12} D_{xy}^3 \right] + \mathcal{O}(\lambda^4) \quad (5.3.11)$$

Através das regras de Feynman, essa expansão corresponde a soma dos seguintes diagramas:

$$\langle 0 | e^{\frac{i\lambda}{3! \hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \phi_0(x)^3} | 0 \rangle = 1 + \begin{array}{c} \text{loop} \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \text{loop} \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \text{loop} \\ \bullet \quad \bullet \end{array} + \mathcal{O}(\lambda^4) \quad (5.3.12)$$

Esse tipo de diagrama, onde não há vértices externos, é chamado de bolha. Note que as duas primeiras bolhas desta expressão aparecem no numerador como subgráficos nos termos 5.3.2 e 5.3.3, respectivamente. Portanto, o fator de normalização no denominador irá cancelar as bolhas que aparecem nos diagramas do numerador. Para visualizar esse cancelamento, vamos substituir a expansão de  $\langle 0 | e^{\frac{i\lambda}{3! \hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \phi_0(x)^3} | 0 \rangle$  na equação 5.2.13:

$$\langle \Omega | T [\phi(x_1) \phi(x_2)] | \Omega \rangle = \frac{D_{12} - \left( \frac{\lambda}{\hbar} \right)^2 \int d^4x \int d^4y \left[ \frac{1}{8} D_{12} D_{xx} D_{xy} D_{yy} + \frac{1}{12} D_{12} D_{xy}^3 + \frac{1}{2} D_{1x} D_{2x} D_{xy} D_{yy} + \dots \right] + \mathcal{O}(\lambda^3)}{1 - \left( \frac{\lambda}{\hbar} \right)^2 \int d^4x \int d^4y \left[ \frac{1}{8} D_{xx} D_{xy} D_{yy} + \frac{1}{12} D_{xy}^3 \right] + \mathcal{O}(\lambda^4)} \quad (5.3.13)$$

Utilizando que,  $\frac{1}{1-\gamma x} = 1 + \gamma x + \mathcal{O}(\gamma^2)$ , teremos:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | T [\phi(x_1)\phi(x_2)] | \Omega \rangle &= \left\{ D_{12} - \left( \frac{\lambda}{\hbar} \right)^2 \int d^4x \int d^4y \left[ \frac{1}{8} D_{12} D_{xx} D_{xy} D_{yy} + \frac{1}{12} D_{12} D_{xy}^3 + \frac{1}{2} D_{1x} D_{2x} D_{xy} D_{yy} + \dots \right] \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{O}(\lambda^3) \right\} \left\{ 1 + \left( \frac{\lambda}{\hbar} \right)^2 \int d^4x \int d^4y \left[ \frac{1}{8} D_{xx} D_{xy} D_{yy} + \frac{1}{12} D_{xy}^3 \right] + \mathcal{O}(\lambda^3) \right\} \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

Realizando este produto, podemos ver que os termos com bolhas são cancelados. Desta forma, até a ordem  $\mathcal{O}(\lambda^2)$ , obteremos a seguinte expressão:

$$\langle \Omega | T [\phi(x_1)\phi(x_2)] | \Omega \rangle = D_{12} - \left( \frac{\lambda}{\hbar} \right)^2 \int d^4x \int d^4y \left[ \frac{1}{2} D_{1x} D_{2y} D_{xy}^2 + \frac{1}{4} D_{1x} D_{2y} D_{xx} D_{yy} + \frac{1}{2} D_{1x} D_{2x} D_{xy} D_{yy} \right] + \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (5.3.15)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{array}{c} x_1 \quad x_2 \\ \bullet \quad \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ x_1 \quad x \quad y \quad x_2 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \quad x \quad y \quad x_2 \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ x_1 \quad x \quad y \quad x_2 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \quad x \quad y \quad x_2 \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ x_1 \quad x \quad y \quad x_2 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \quad y \quad x_2 \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \hline \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ x_1 \quad x \quad x_2 \end{array} + \dots \\ &= \langle 0 | T \left[ \phi_0(x_1)\phi_0(x_2) e^{\frac{i\lambda}{3\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x \phi_0(x)^3} \right] | 0 \rangle_{\text{Sem bolhas}} \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

Este resultado pode ser generalizado para a função de correlação envolvendo o produto de  $n$  campos e para outros tipos de interação[19]:

$$\langle \Omega | T [\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)] | \Omega \rangle = \langle 0 | T \left[ \phi_0(x_1)\phi_0(x_2)\dots\phi_0(x_n) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt' H_I(t')} \right] | 0 \rangle_{\text{Sem bolhas}} \quad (5.3.17)$$

## 5.4 Amplitude de espalhamento e diagramas de Feynman no espaço de momentos

Na seção anterior, estabelecemos as regras de Feynman no espaço de posição. No entanto, desejamos utilizar o método diagramático como uma alternativa para calcular amplitudes de espalhamento. Neste caso, é conveniente expressar as regras de Feynman no espaço de momentos. Para alcançar esse objetivo, utilizaremos a fórmula de redução de LSZ e, por meio da expansão 5.3.15 e da transformada de Fourier do propagador de Feynman, seremos capazes de inferir as regras de Feynman no espaço de momentos.

Como visto no capítulo anterior, a fórmula de redução de LSZ para uma partícula nos estados final e inicial é (equação 4.2.25):

$$\langle \mathbf{p}_f | S | \mathbf{p}_0 \rangle = \left[ i \int d^4x_1 e^{ip_0 \cdot x_1} (\square_{x_1} + m^2) \right] \left[ i \int d^4x_2 e^{ip_f \cdot x_2} (\square_{x_2} + m^2) \right] \langle \Omega | T [\phi(x_1)\phi(x_2)] | \Omega \rangle \quad (5.4.1)$$

onde  $S$  é a matriz de espalhamento e  $\mathbf{p}_0$  e  $\mathbf{p}_f$  correspondem ao momento da partícula no estado inicial e final, respectivamente. Substituindo a expansão perturbativa da função de correlação (equação 5.3.15):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}_f | S | \mathbf{p}_0 \rangle &= - \int d^4x_1 e^{ip_0 \cdot x_1} (\square_{x_1} + m^2) \int d^4x_2 e^{ip_f \cdot x_2} (\square_{x_2} + m^2) \\ &\quad \left[ D_{12} - \left( \frac{\lambda}{\hbar} \right)^2 \int d^4x \int d^4y \left[ \frac{1}{2} D_{1x} D_{2y} D_{xy}^2 + \dots \right] + \mathcal{O}(\lambda^3) \right] \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Nós estamos interessados na parte da matriz de espalhamento  $S = \mathcal{I} + i\mathcal{T}$  em que efetivamente temos interações, isto é, no operador de transição  $i\mathcal{T}$ . Deste modo, iremos desprezar o primeiro termo da equação acima, uma vez que ele consiste apenas na partícula sendo propagada de um ponto para outro no caso de uma teoria livre. Assim, podemos reescrever a equação acima como:

$$\langle \mathbf{p}_f | i\mathcal{T} | \mathbf{p}_0 \rangle = - \int d^4x_1 e^{ip_0 \cdot x_1} (\square_{x_1} + m^2) \int d^4x_2 e^{ip_f \cdot x_2} (\square_{x_2} + m^2) \left[ - \left( \frac{\lambda}{\hbar} \right)^2 \int d^4x \int d^4y \left[ \frac{1}{2} D_{1x} D_{2y} D_{xy}^2 + \dots \right] + \mathcal{O}(\lambda^3) \right] \quad (5.4.3)$$

Como os termos consistem em produtos de propagadores de Feynman, para expressá-los no espaço de momentos, basta substituir a transformação de Fourier de cada propagador, a qual é derivada no Apêndice F e é dada por:

$$D_{xy} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{ip \cdot (x-y)} \quad (5.4.4)$$

onde  $p^\mu$  é o quadrimomento associado ao propagador. Para ilustrar esse processo, vamos realizar os cálculos apenas para o primeiro termo dentro dos colchetes. Designando o quadrimomento de cada propagador do primeiro termo dentro dos colchetes e substituindo sua transformação de Fourier, este termo pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &\equiv - \left( \frac{\lambda}{\hbar} \right)^2 \int d^4x \int d^4y \frac{1}{2} D_{1x} D_{2y} D_{xy}^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{c} p_y \\ \leftarrow \\ \text{---} x \text{---} y \text{---} \\ \rightarrow \\ p_x \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \quad x \quad y \quad x_2 \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \xrightarrow{p_{x_1}} \quad \xrightarrow{p_{x_2}} \end{array} \end{array} \\ &= - \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{\hbar} \right)^2 \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4p_{x_1}}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_x}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_y}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_{x_2}}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip_{x_1} \cdot (x_1-x)} e^{i(p_x-p_y) \cdot (x-y)} e^{ip_{x_2} \cdot (y-x_2)}}{(p_{x_1}^2 - m^2 + i\varepsilon)(p_x^2 - m^2 + i\varepsilon)(p_y^2 - m^2 + i\varepsilon)(p_{x_2}^2 - m^2 + i\varepsilon)} \\ &= - \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{\hbar} \right)^2 \int \frac{d^4p_{x_1}}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_x}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_y}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_{x_2}}{(2\pi)^4} \int d^4x e^{-ix \cdot (p_{x_1} - p_x + p_y)} \int d^4y e^{-iy \cdot (p_x - p_y - p_{x_2})} \frac{e^{ip_{x_1} \cdot x_1} e^{-ip_{x_2} \cdot x_2}}{(p_{x_1}^2 - m^2 + i\varepsilon)(p_x^2 - m^2 + i\varepsilon)(p_y^2 - m^2 + i\varepsilon)(p_{x_2}^2 - m^2 + i\varepsilon)} \\ &= - \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{\hbar} \right)^2 \int \frac{d^4p_{x_1}}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_x}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_y}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_{x_2}}{(2\pi)^4} \delta^4(p_{x_1} - p_x + p_y) \delta^4(p_x - p_y - p_{x_2}) \frac{e^{ip_{x_1} \cdot x_1} e^{-ip_{x_2} \cdot x_2}}{(p_{x_1}^2 - m^2 + i\varepsilon)(p_x^2 - m^2 + i\varepsilon)(p_y^2 - m^2 + i\varepsilon)(p_{x_2}^2 - m^2 + i\varepsilon)} \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Note que temos duas deltas de Dirac na expressão acima correspondendo a conservação de momento em cada vértice interno do diagrama ( $x$  e  $y$ ). Integrando sob  $p_y$  e utilizando a primeira delta de Dirac, podemos substituir  $p_y = p_x - p_{x_1}$  na segunda, de modo a obtermos  $\delta^4(p_{x_1} - p_{x_2})$ . Assim:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{\hbar} \right)^2 \int \frac{d^4p_{x_1}}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_x}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p_{x_2}}{(2\pi)^4} (2\pi)^4 \delta^4(p_{x_1} - p_{x_2}) \frac{i^4 e^{ip_{x_1} \cdot x_1} e^{-ip_{x_2} \cdot x_2}}{(p_{x_1}^2 - m^2 + i\varepsilon)(p_x^2 - m^2 + i\varepsilon)((p_x - p_{x_1})^2 - m^2 + i\varepsilon)(p_{x_2}^2 - m^2 + i\varepsilon)} \quad (5.4.6)$$

Substituindo este resultado e utilizando que  $\square = -p^2$  no espaço de momentos:





$$H_{QED} = H_0 + H_I = H_0 + Q|e| \int d^3x \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) \quad (5.5.1)$$

onde  $H_0$  é a parte livre da hamiltoniana,  $\psi$  é o campo espinorial de Dirac,  $A_\mu$  é o campo vetorial associado ao fóton e  $Q|e|$  é a carga do férmion.

De maneira análoga ao campo escalar, a fórmula de redução de LSZ conecta a amplitude de espalhamento com o valor esperado do vácuo do produto ordenado temporalmente desses campos. Consequentemente, devido ao teorema de Wick, teremos um propagador de Feynman para cada um desses campos, os quais são definidos como:

$$S_F(x-y) \equiv \langle 0 | \overline{\psi(x)\bar{\psi}(y)} | 0 \rangle = \langle 0 | T [\psi(x)\bar{\psi}(y)] | 0 \rangle = \begin{cases} \langle 0 | \psi(x)\bar{\psi}(y) | 0 \rangle, & x_0 > y_0 \\ -\langle 0 | \bar{\psi}(y)\psi(x) | 0 \rangle, & y_0 > x_0 \end{cases} \quad (5.5.2)$$

$$S_\gamma(x-y) \equiv \langle 0 | \overline{A_\mu(x)A_\nu(y)} | 0 \rangle = \langle 0 | T [A_\mu(x)A_\nu(y)] | 0 \rangle = \begin{cases} \langle 0 | A_\mu(x)A_\nu(y) | 0 \rangle, & x_0 > y_0 \\ \langle 0 | A_\nu(y)A_\mu(x) | 0 \rangle, & y_0 > x_0 \end{cases} \quad (5.5.3)$$

Note que, ao contrário do caso escalar, no propagador de Feynman do campo de Dirac, encontramos um sinal negativo quando  $y_0 > x_0$ . Essa característica é uma consequência da relação de anticomutação do campo fermiônico, a qual introduz um fator de  $-1$  para cada permutação de pares de campos necessários para ordenar temporalmente o produto. Como demonstrado no apêndice F, esses propagadores correspondem as seguintes expressões no espaço de momentos:

$$\tilde{S}_F(p) = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad \text{e} \quad \tilde{S}_\gamma(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (5.5.4)$$

Assim como no caso do campo escalar, relacionaremos esses propagadores com uma linha ligando dois pontos no diagrama de feynman. No entanto, para diferenciá-los, adotaremos que o propagador do campo de Dirac consiste em uma linha com uma flecha e o do fóton uma linha ondulada:

- **Férmion:**

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \xrightarrow{p} \end{array} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (5.5.5)$$

- **Fóton:**

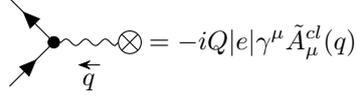
$$\begin{array}{c} \mu \text{ } \sim \text{ } \nu \\ \longleftarrow q \end{array} = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2 + i\varepsilon} \quad (5.5.6)$$

Para cada férmion, há um antiférmion correspondente, como discutido no capítulo 2. A fim de diferenciá-los na representação diagramática, estabeleceremos a convenção de que um férmion é representado por um propagador com a direção da flecha na linha coincidindo com a direção do momento, enquanto que para um antiférmion, a direção da flecha é oposta à do momento.

Com base nos resultados da seção anterior, podemos afirmar que o vértice interno é o elemento do diagrama que representa o acoplamento dos campos, uma vez que ele consiste na multiplicação de  $-i$  pelo fator de acoplamento presente na Hamiltoniana. Ao analisarmos a Hamiltoniana de interação da QED (equação 5.5.1), vemos que o fator de acoplamento para a interação entre dois férmions e um fóton é dado por  $Q|e|\gamma^\mu$ . Portanto:

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \end{array} \text{ } \sim \text{ } = -iQ|e|\gamma^\mu \quad (5.5.7)$$

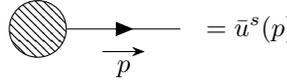
É importante ressaltarmos que, no cenário em que a interação ocorre entre um férmion e um campo eletromagnético externo estático, isto é, que independe das interações com o férmion,  $A_\mu$  é aproximadamente apenas uma função que representa o potencial clássico associado ao campo externo, não sendo um campo vetorial quântico. Consequentemente,  $A_\mu$  não apresentará contrações de Wick e aparecerá apenas como uma função multiplicando a amplitude. Tendo isto em vista, a regra do vértice na QED para este caso em específico é escrita como:



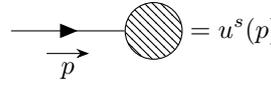
$$\text{Diagram} = -iQ|e|\gamma^\mu \tilde{A}_\mu^{cl}(q) \quad (5.5.8)$$

onde  $\tilde{A}_\mu^{cl}(q)$  é o potencial associado ao campo externo estático no espaço de momentos. Além disto, escrevemos o potencial com um sobrescrito “cl” para diferenciarmos do caso geral, no qual  $A_\mu$  é o campo vetorial quântico associado ao fóton.

No caso do modelo  $\phi^3$ , vimos que as pernas externas contribuem com um fator de 1, pois a fórmula de redução de LSZ para campos escalares faz com que as linhas externas representem estados de uma partícula *on-shell*, o que resulta no cancelamento dos propagadores que envolvem vértices externos. Na QED, podemos ter linhas externas representando férmions ou fótons. No caso dos férmions, a fórmula de redução de LSZ é semelhante à do campo escalar, com a principal diferença sendo a presença do espinor  $u^s(p)$ . Portanto, além de cancelar o propagador de Feynman da perna externa de um férmion, a fórmula de LSZ introduz o espinor correspondente a esse férmion:

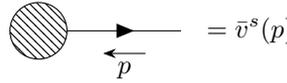


$$= \bar{u}^s(p) \quad (5.5.9)$$

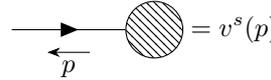


$$= u^s(p) \quad (5.5.10)$$

Para antiférmions o resultado é similar:

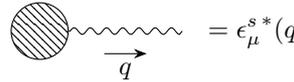


$$= \bar{v}^s(p) \quad (5.5.11)$$

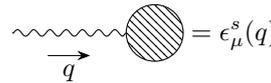


$$= v^s(p) \quad (5.5.12)$$

A fórmula de redução de LSZ para fótons não é trivial de ser derivada, uma vez que necessita do formalismo de quantização de campos de gauge [23]. No entanto, fisicamente ela garante que as linhas externas são estados *on-shell* de um fóton. Além disto, ela introduz o quadrivetor de polarização do fóton como contribuição da perna externa:



$$= \epsilon_\mu^{s*}(q) \quad (5.5.13)$$



$$= \epsilon_\mu^s(q) \quad (5.5.14)$$

De maneira análoga ao modelo  $\phi^3$ , devemos impor a conservação do quadrimomento em cada vértice, integrar sobre todos os momentos não determinados e somar sobre todos os possíveis diagramas sem bolhas. Além disso, é importante destacar que os diagramas que estão relacionados pela troca de linhas externas de férmions idênticos apresentam um fator relativo de  $-1$  devido às relações de anticomutação dessas partículas.

## Capítulo 6

# O momento magnético de Férmions

O momento magnético de férmions carregados é uma propriedade fundamental na física de partículas e sua compreensão é essencial para a validação do Modelo Padrão. Neste capítulo, abordaremos o cálculo do momento magnético de férmions utilizando conceitos discutidos no capítulo anterior, como a teoria de perturbação. Primeiro, calcularemos a amplitude de espalhamento de um férmion carregado por um campo eletromagnético externo em nível de árvore.

Em seguida, realizaremos o cálculo do momento magnético em ordem zero, que nos leva à descoberta de que o fator de Landé,  $g$ , é igual a 2, um resultado que foi obtido por Dirac[20] muito antes do desenvolvimento do Modelo Padrão. Por fim, exploraremos as correções de primeira ordem no cálculo do momento magnético, que são provenientes das interações entre o férmion e o campo eletromagnético. Veremos como a teoria de perturbação e os diagramas de Feynman são utilizados para calcular essas correções e como esses cálculos são fundamentais para testar as previsões do Modelo Padrão em relação ao momento magnético anômalo de férmions carregados.

### 6.1 A amplitude de espalhamento de um férmion por um campo eletromagnético externo ao nível de árvore

Ao longo desta seção, calcularemos a amplitude de espalhamento de um férmion por um campo eletromagnético externo em nível de árvore. Para isto, consideramos um campo eletromagnético externo estacionário, o qual é descrito por um potencial clássico fixo  $A_\mu^{cl}(x)$ . Neste caso, a Hamiltoniana que descreve a interação entre o férmion e o campo é dada por[17]:

$$H_{int} = \int d^3x Q|e|\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu^{cl}(x), \quad (6.1.1)$$

onde  $Q|e|$  é a carga elétrica do férmion. Analisaremos a interação do campo fermiônico com campo eletromagnético externo apresentada acima, o qual está representado na figura 6.1. A fim de obtermos a amplitude associada a este diagrama, iremos utilizar as regras de Feynman da QED que apresentamos no capítulo anterior<sup>1</sup>:

$$= (2\pi)\delta(p^0 - p'^0) i\mathcal{M}^{(0)} = -iQ|e|\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)\tilde{A}_\mu^{cl}(q) \quad (6.1.2)$$

Figura 6.1: Diagrama de Feynman em nível de árvore, para o espalhamento de um férmion com um campo eletromagnético externo e sua amplitude correspondente.

<sup>1</sup>Aqui estamos lidando com um campo externo clássico e, conseqüentemente, devemos lembrar que o vértice da QED é ligeiramente modificado neste caso, como discutido no capítulo 5.

## 6.2 O momento magnético de um férmion a nível de árvore

Nesta seção obteremos o momento magnético de um férmion em nível de árvore. Para isto iremos calcular o limite não relativístico da amplitude de espalhamento de um férmion por um campo eletromagnético externo e então compará-la com a aproximação de Born[20] da Mecânica Quântica não relativística, o que nos permitirá encontrar o potencial não relativístico gerado por esta interação. Vamos considerar o regime estático, onde o potencial  $A_\mu^{cl}(x) = (\Phi(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}))$  independe do tempo e pode ser escrito no espaço de momentos como:

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_\mu^{cl}(p' - p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x e^{i(p' - p)_\nu x^\nu} A_\mu^{cl}(x) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x e^{i(p' - p)_\nu x^\nu} (\phi(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x})) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(p'_0 - p_0)x^0} dx_0 \left( \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x e^{-i(p' - p)_j x^j} \phi(\mathbf{x}), \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x e^{-i(p' - p)_j x^j} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \right) \\
&= (2\pi)\delta(p^0 - p'^0) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x e^{-i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}), \int_{-\infty}^{+\infty} d^3x e^{-i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \right) \\
&= (2\pi)\delta(p^0 - p'^0) \left( \tilde{\Phi}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}), \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \right)
\end{aligned} \tag{6.2.1}$$

Substituindo este resultado na amplitude de espalhamento (equação 6.1.2):

$$i\mathcal{M}^{(0)} = -iQ|e| \left( \bar{u}(p')\gamma^0 u(p)\tilde{\Phi}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) + \bar{u}(p')\gamma^j u(p)\tilde{A}_j(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \right) \tag{6.2.2}$$

No limite não relativístico ( $|\mathbf{p}| \ll m$ ), podemos expandir o espinor  $u(p)$  mantendo apenas o termo de primeira ordem no momento e considerando  $p^0 = m$ :

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p_\mu \bar{\sigma}^\mu \xi} \\ \sqrt{p_\mu \sigma^\mu \xi} \end{pmatrix} \approx \sqrt{m} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m}\right) \xi \\ \left(1 + \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m}\right) \xi \end{pmatrix} \tag{6.2.3}$$

Aplicando este limite ao primeiro termo da equação 6.2.2 e desprezando termos de ordem  $|\mathbf{p}|^2$ , temos:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p')\gamma^0 u(p) &= u^\dagger(p')u(p) \\
&= m \begin{pmatrix} \xi'^\dagger \left(1 - \frac{\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m}\right) & \xi'^\dagger \left(1 + \frac{\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m}\right) \xi \\ \left(1 + \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m}\right) \xi \end{pmatrix} = 2m\xi'^\dagger \xi
\end{aligned} \tag{6.2.4}$$

Enquanto o segundo termo resulta em:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p')\gamma^j u(p) &= m \begin{pmatrix} \xi'^\dagger \left(1 - \frac{\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m}\right) & \xi'^\dagger \left(1 + \frac{\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m}\right) \xi \\ \left(1 + \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m}\right) \xi \end{pmatrix} \\
&= m \begin{pmatrix} -\xi'^\dagger \left(1 - \frac{\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m}\right) \sigma^j & \xi'^\dagger \left(1 + \frac{\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m}\right) \sigma^j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m}\right) \xi \\ \left(1 + \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m}\right) \xi \end{pmatrix} \\
&= 2m\xi'^\dagger \left[ \frac{\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m} \sigma^j + \sigma^j \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m} \right] \xi = 2m\xi'^\dagger \left[ \frac{p'_i \sigma^i \sigma^j}{2m} + \frac{p_i \sigma^j \sigma^i}{2m} \right] \xi
\end{aligned} \tag{6.2.5}$$

Utilizando que as matrizes de Pauli satisfazem  $\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\varepsilon^{ijk} \sigma_k$ :

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p')\gamma^j u(p) &= 2m\xi'^\dagger \left[ \frac{p'^j + i\varepsilon^{kij} p'_i \sigma_k}{2m} + \frac{p^j - i\varepsilon^{kij} p_i \sigma_k}{2m} \right] \xi \\
&= 2m\xi'^\dagger \left[ \frac{(p'^j + p^j)}{2m} + \frac{i\varepsilon^{kij} (p'_i - p_i) \sigma_k}{2m} \right] \xi
\end{aligned} \tag{6.2.6}$$

Substituindo os resultados acima na amplitude:

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}^{(0)} &= -iQ|e| \left( 2m\xi^{\dagger}\xi\tilde{\Phi}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) + 2m\xi^{\dagger} \left[ \frac{(p'^j + p^j)}{2m} + \frac{i\varepsilon^{kij}(p'_i - p_i)\sigma_k}{2m} \right] \xi\tilde{A}_j(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \right) \\
&= -iQ|e| \left( 2m\xi^{\dagger}\xi\tilde{\Phi}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) + 2m\xi^{\dagger}\xi \frac{(p'^j + p^j)\tilde{A}_j(\mathbf{p}' - \mathbf{p})}{2m} - 2m\xi^{\dagger} \frac{i\varepsilon^{kij}(p'^i - p^i)\tilde{A}_j(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\sigma_k}{2m} \xi \right) \\
&= -iQ|e| \left( 2m\xi^{\dagger}\xi\tilde{\Phi}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) + 2m\xi^{\dagger}\xi \frac{(\mathbf{p}' + \mathbf{p}) \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})}{2m} + 2im\xi^{\dagger} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot ((\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \times \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}))}{2m} \xi \right)
\end{aligned} \tag{6.2.7}$$

No espaço de momento, sabemos que  $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = -i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \times \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$ . Logo:

$$i\mathcal{M}^{(0)} = -iQ|e| \left( 2m\xi^{\dagger}\xi\tilde{\Phi}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + 2m\xi^{\dagger}\xi \frac{(\mathbf{p}' + \mathbf{p}) \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')}{2m} - 2m\xi^{\dagger} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})}{2m} \xi \right) \tag{6.2.8}$$

Note que o segundo termo não depende do spin e na mecânica quântica não relativística ele está relacionado à contribuição da interação eletromagnética para a energia cinética do férmion [26, 27]. Portanto, a fim de obtermos apenas o acoplamento do férmion com os campos elétrico e magnético, seguiremos analisando apenas o primeiro e o terceiro termo da amplitude, que podem ser escritos como:

$$i\mathcal{M}^{(0)} = -iQ|e| \left( 2m\xi^{\dagger}\xi\tilde{\Phi}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') - 4m \frac{\xi^{\dagger} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \xi \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})}{2m} \right) \tag{6.2.9}$$

$$= 2m \left( -iQ|e|\xi^{\dagger}\xi\tilde{\Phi}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + iQ|e|2 \frac{\xi^{\dagger} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \xi \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})}{2m} \right) \tag{6.2.10}$$

Essa é a expressão para o limite não relativístico da amplitude de espalhamento de um férmion por um campo eletromagnético estático. Para encontrarmos o potencial que descreve esta interação, podemos comparar o resultado obtido com a amplitude de espalhamento da mecânica quântica não relativística, a qual é dada pela aproximação de Born:

$${}_0 \langle \mathbf{p}' | iT | \mathbf{p} \rangle_0 = -iV(\mathbf{p} - \mathbf{p}') (2\pi) \delta(E_{\mathbf{p}} - E_{\mathbf{p}'}) \tag{6.2.11}$$

Lembrando que  ${}_0 \langle \mathbf{p}' | iT | \mathbf{p} \rangle_0 = (2\pi) \delta(p^0 - p'^0) i\mathcal{M}$ , nós vemos que:

$$\tilde{V}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = Q|e|\tilde{\Phi}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) - Q|e|2 \frac{\xi^{\dagger} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \xi \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})}{2m} \tag{6.2.12}$$

onde os fatores  $2m$  e  $\xi^{\dagger}\xi$  não foram levados em consideração na comparação com a aproximação de Born, pois o primeiro provém da normalização relativística que adotamos para os autoestados de momento e o segundo garante a conservação de spin. Note que o primeiro termo de  $V(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$  é o potencial de Coulomb e o segundo é a interação do spin com o campo magnético, isto é:

$$\tilde{V}_C(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = Q|e|\tilde{\Phi}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad \text{e} \quad \tilde{V}_B(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = -Q|e|2 \frac{\xi^{\dagger} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \xi \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})}{2m} \tag{6.2.13}$$

Da teoria clássica, sabemos que o acoplamento entre o momento magnético de um corpo e o campo magnético é dado por  $\tilde{V}(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$ . Portanto, se compararmos isto com a expressão  $V_B(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$  que obtivemos para o potencial, temos:

$$\boldsymbol{\mu} = Q|e|2 \frac{\xi^{\dagger} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \xi}{2m} = 2 \frac{Q|e|}{2m} \xi^{\dagger} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \xi \tag{6.2.14}$$

Como  $\mathbf{S} = \xi^{\dagger} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \xi$ , onde  $\mathbf{S}$  é o operador de spin:

$$\boldsymbol{\mu} = 2 \frac{Q|e|}{2m} \mathbf{S} \tag{6.2.15}$$

Esta expressão pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\mu} = g \left( \frac{Q|e|}{2m} \right) \mathbf{S} \quad (6.2.16)$$

onde  $g = 2$  é o fator de Landé, ou constante giromagnética. Note que o resultado obtido para  $g$  na ordem dominante está de acordo com o calculado por Paul Dirac[20] antes do desenvolvimento do Modelo Padrão.

### 6.3 Correções radiativas para o espalhamento de um férmion por um campo eletromagnético externo

Na seção anterior, calculamos apenas o termo de mais baixa ordem da amplitude de espalhamento para determinar o momento magnético de um férmion carregado. No entanto, a amplitude de espalhamento recebe contribuições de ordens superiores, as quais são conhecidas como correções radiativas.

Na ordem seguinte ao nível de árvore, nós temos a contribuição do termo atrelado ao diagrama de Feynman 6.2. Tal diagrama é conhecido como correção de vértice e é responsável por gerar uma grande variedade de novos efeitos, como o momento magnético anômalo do férmion carregado que será calculado nesta seção.

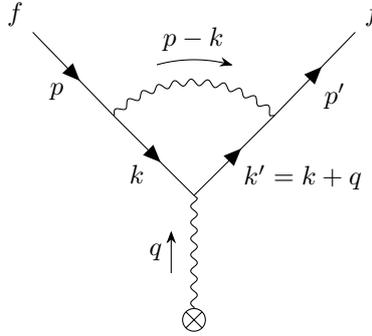


Figura 6.2: Diagrama de Feynman contendo a correção de vértice para a ordem seguinte ao nível de árvore.

Na seção anterior, vimos que a amplitude de espalhamento, em nível de árvore, é dada por:

$$(2\pi)\delta(p^0 - p'^0) i\mathcal{M}^{(0)} = -iQ|e|\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)\tilde{A}_\mu^{cl}(p' - p) \quad (6.3.1)$$

onde o termo  $-iQ|e|\gamma^\mu \tilde{A}_\mu^{cl}(p' - p)$  está associado ao vértice do diagrama 6.1. Deste modo, para calcularmos a amplitude de espalhamento considerando a correção de vértice (diagrama 6.2), modificaremos a expressão acima para:

$$(2\pi)\delta(p^0 - p'^0) i\mathcal{M} = -iQ|e|\bar{u}(p')\Gamma^\mu u(p)\tilde{A}_\mu^{cl}(p' - p) \quad (6.3.2)$$

onde  $\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu$  contém o termo a nível de árvore e a correção de vértice. Como  $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{(0)} + \mathcal{M}^{(1)}$  e estamos interessados na correção radiativa, iremos abordar somente o segundo termo da expressão acima:

$$(2\pi)\delta(p^0 - p'^0) i\mathcal{M}^{(1)} = -iQ|e|\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu u(p)\tilde{A}_\mu^{cl}(p' - p) \quad (6.3.3)$$

Utilizando as regras de Feynman para a QED, apresentadas no capítulo anterior, o termo  $\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu u(p)$  associado ao diagrama de correção de vértice (Figura 6.2) é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu u(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p')(-iQ|e|\gamma^\nu) \frac{i(\not{k}' + m)}{(k'^2 - m^2 + i\varepsilon)} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{(k^2 - m^2 + i\varepsilon)} \frac{(-ig_{\nu\rho})}{((k-p)^2 + i\varepsilon)} (-iQ|e|\gamma^\rho) u(p) \\ &= -i(Q|e|)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') \frac{\gamma^\nu (\not{k}' + m) \gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma_\nu}{(k'^2 - m^2 + i\varepsilon)(k^2 - m^2 + i\varepsilon)((k-p)^2 + i\varepsilon)} u(p) \\ &= -iQ^2 e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') \frac{(\gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu \not{k} \gamma_\nu + m\gamma^\nu \gamma^\mu \not{k} \gamma_\nu + m\gamma^\nu \not{k}' \gamma^\mu \gamma_\nu + m^2 \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu)}{(k'^2 - m^2 + i\varepsilon)(k^2 - m^2 + i\varepsilon)((k-p)^2 + i\varepsilon)} u(p) \end{aligned}$$

Lembrando que  $\not{k} = \gamma^\beta k_\beta$  e utilizando as seguintes identidades para as matrizes  $\gamma^\mu$ [17]:

$$\gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\nu = -2\gamma^\rho \gamma^\mu \gamma^\beta, \quad \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\nu = 4g^{\mu\rho}, \quad \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu = -2\gamma^\mu \quad (6.3.4)$$

obtemos:

$$\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu u(p) = 2iQ^2 e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') \frac{(\not{k}\gamma^\mu \not{k}' - 2m(k+k')^\mu + m^2\gamma^\mu)}{(k'^2 - m^2 + i\varepsilon)(k^2 - m^2 + i\varepsilon)((k-p)^2 + i\varepsilon)} u(p) \quad (6.3.5)$$

A expressão acima pode ser reescrita utilizando o método de parâmetros de Feynman[17, 25] e manipulações algébricas, conforme detalhado no Apêndice G. Como resultado, obtemos:

$$\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu u(p) = \delta Q_f \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) + \delta g \bar{u}(p')i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} u(p) \quad (6.3.6)$$

onde  $\delta Q_f$  e  $\delta g$  são dados por:

$$\delta Q_f \equiv iQ^2 |e|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 4 \frac{\delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1)}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} \left( -\frac{1}{2}l^2 + q^2(1-x_1)(1-x_2) + m^2(1+x_3^2 - 4x_3) \right) \quad (6.3.7)$$

$$\delta g \equiv iQ^2 e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 4 \frac{\delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1)}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} 2m^2 x_3(x_3 - 1) = \frac{Q^2 \alpha}{2\pi} \quad (6.3.8)$$

Substituindo este resultado na equação 6.3.3:

$$(2\pi)\delta(p^0 - p'^0) i\mathcal{M}^{(1)} = -iQ|e| \left( \delta Q_f \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p)\tilde{A}_\mu^{cl}(q) + \delta g \bar{u}(p')i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} u(p)\tilde{A}_\mu^{cl}(q) \right) \quad (6.3.9)$$

Para identificar os potenciais de interação e comparar os resultados com os calculados a nível de árvore, é necessário calcular o limite não relativístico da amplitude acima. Na seção anterior, já calculamos este limite para o primeiro termo. Agora, vamos encontrar o limite não relativístico do segundo termo, que pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\bar{u}(p')i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} u(p)\tilde{A}_\mu^{cl}(q) = \bar{u}(p')i \frac{\sigma^{0j} q_j}{2m} u(p)\tilde{A}_0^{cl}(q) + \bar{u}(p')i \frac{\sigma^{j\nu} q_\nu}{2m} u(p)\tilde{A}_j^{cl}(q) \quad (6.3.10)$$

Assumindo que o potencial eletrostático  $A_0^{cl}(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x})$  varia muito lentamente, então  $\tilde{A}_0^{cl}(q) = (2\pi)\delta(q^0)\tilde{\Phi}(\mathbf{q})$  estará concentrado próximo a  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ . Portanto, podemos aplicar o limite  $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{0}$  no primeiro termo, o que implicará que ele pode ser desprezado. Além disto, no limite não relativístico, a energia  $q^0$  do fóton é negligível e consequentemente temos que  $\sigma^{j\nu} q_\nu \approx \sigma^{jk} q_k$ . Logo:

$$\bar{u}(p')i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} u(p)\tilde{A}_\mu^{cl}(q) \approx \bar{u}(p')i \frac{\sigma^{jk} q_k}{2m} u(p)\tilde{A}_j^{cl}(q) \quad (6.3.11)$$

Como  $\sigma^{\mu\nu} = \varepsilon^{kj} \sigma^n I_{2 \times 2}$ :

$$\bar{u}(p')i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} u(p)\tilde{A}_\mu^{cl}(q) \approx i \frac{\varepsilon^{jk} \bar{u}(p')\sigma^n u(p)q_k \tilde{A}_j^{cl}(q)}{2m} = -i \frac{\bar{u}(p')\boldsymbol{\sigma} u(p) \cdot (\mathbf{q} \times \tilde{\mathbf{A}}^{cl}(q))}{2m} \quad (6.3.12)$$

Note que, no limite não relativístico dos espinores (equação 6.2.3):

$$\bar{u}(p')\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} u(p) = m \left( \xi'^\dagger (1 - \frac{\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m}) \quad \xi'^\dagger (1 + \frac{\mathbf{p}' \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m}) \right) \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \begin{pmatrix} (1 - \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m})\xi \\ (1 + \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2m})\xi \end{pmatrix} = 2m \xi'^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \xi \quad (6.3.13)$$

Substituindo este resultado na equação 6.3.12:

$$\bar{u}(p') i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} u(p) \tilde{A}_\mu^{cl}(q) = -4im \frac{\xi'^\dagger \frac{\sigma}{2} \xi \cdot (\mathbf{q} \times \tilde{\mathbf{A}}^{cl}(q))}{2m} \quad (6.3.14)$$

Utilizando este resultado na expressão da amplitude  $\mathcal{M}^{(1)}$  (equação 6.3.9) e lembrando que  $\tilde{A}_\mu^{cl}(q) = (2\pi)\delta(q^0) (\tilde{\Phi}(\mathbf{q}), \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}))$  :

$$i\mathcal{M}^{(1)} = -iQ|e| \left( \delta Q_f \bar{u}(p') \gamma^0 u(p) \tilde{\Phi}(\mathbf{q}) + \delta Q_f \bar{u}(p') \gamma^j u(p) \tilde{A}_j(\mathbf{q}) - 4im \delta g \frac{\xi'^\dagger \frac{\sigma}{2} \xi \cdot (\mathbf{q} \times \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}))}{2m} \right) \quad (6.3.15)$$

Na seção anterior, vimos que o limite não relativístico dos dois primeiros termos resultam em (equações 6.2.6 e 6.2.4):

$$\bar{u}(p') \gamma^0 u(p) \tilde{\Phi} = 2m \xi'^\dagger \xi \tilde{\Phi} \quad \text{e} \quad \bar{u}(p') \gamma^j u(p) \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}) = -4im \frac{\xi'^\dagger \frac{\sigma}{2} \xi \cdot (\mathbf{q} \times \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}))}{2m} \quad (6.3.16)$$

Substituindo esses limites na equação 6.3.15:

$$i\mathcal{M}^{(1)} = -iQ|e| \left( \delta Q_f 2m \xi'^\dagger \xi \tilde{\Phi}(\mathbf{q}) - (\delta Q_f + \delta g) 4im \frac{\xi'^\dagger \frac{\sigma}{2} \xi \cdot (\mathbf{q} \times \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}))}{2m} \right) \quad (6.3.17)$$

Usando que  $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) = -i\mathbf{q} \times \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q})$ :

$$i\mathcal{M}^{(1)} = -iQ|e| \left( \delta Q_f 2m \xi'^\dagger \xi \tilde{\Phi}(\mathbf{q}) - (\delta Q_f + \delta g) 4m \frac{\xi'^\dagger \frac{\sigma}{2} \xi \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q})}{2m} \right) \quad (6.3.18)$$

Este é o limite não relativístico da amplitude de espalhamento da correção de vértice. Para encontrarmos a amplitude correspondente ao nível de árvore mais a primeira ordem de correção radiativa, podemos utilizar que  $i\mathcal{M} = i\mathcal{M}^{(0)} + i\mathcal{M}^{(1)}$ . Utilizando os resultados 6.3.18 e 6.2.9:

$$i\mathcal{M} = 2m \left[ -iQ|e|(1 + \delta Q_f) \xi'^\dagger \xi \tilde{\Phi}(\mathbf{q}) + iQ|e|(1 + \delta Q_f + \delta g) 2 \frac{\xi'^\dagger \frac{\sigma}{2} \xi \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q})}{2m} \right] \quad (6.3.19)$$

De maneira análoga ao que fizemos na seção anterior, iremos comparar este resultado com a aproximação de Born para obtermos uma expressão para o potencial de interação:

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = Q|e|(1 + \delta Q_f) \tilde{\Phi}(\mathbf{q}) - Q|e|(1 + \delta Q_f + \delta g) 2 \frac{\xi'^\dagger \frac{\sigma}{2} \xi \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q})}{2m} \quad (6.3.20)$$

Note que o primeiro termo contém a interação com o campo elétrico, enquanto o segundo está associado ao acoplamento com o campo magnético. Desta forma:

$$\tilde{V}_C(\mathbf{q}) = Q|e|(1 + \delta Q_f) \tilde{\Phi}(\mathbf{q}) \quad \text{e} \quad \tilde{V}_B(\mathbf{q}) = -Q|e|(1 + \delta Q_f + \delta g) 2 \frac{\xi'^\dagger \frac{\sigma}{2} \xi \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q})}{2m} \quad (6.3.21)$$

A partir do potencial de Coulomb, observamos que a correção radiativa de primeira ordem proporciona uma correção  $\delta Q_f$  para a carga em relação ao nível da árvore. No entanto, ao calcularmos essa correção usando a sua definição (equação 6.3.7), nos deparamos com uma divergência. Embora isso inicialmente pareça ser um problema, essa divergência pode ser eliminada por meio do processo de renormalização[17], um tópico que não será abordado nesta monografia.

Uma vez que nosso foco está exclusivamente no acoplamento do férmion com o campo magnético, a renormalização não se faz necessária, e podemos contornar essa divergência ao definir a carga corrigida como  $Q'_f = Q|e|(1 + \delta Q_f)$  e reescrever o potencial de interação magnética em termos dessa carga corrigida:

$$\tilde{V}_B(\mathbf{q}) = -Q'_f 2(1 + \delta g) \frac{\xi'^\dagger \frac{\sigma}{2} \xi \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q})}{2m} \quad (6.3.22)$$

onde o termo proporcional a  $(\delta Q_f \delta g)$  foi desprezado por se tratar de uma correção de segunda ordem. Comparando com o potencial clássico  $\tilde{V}(\mathbf{q}) = -\langle \boldsymbol{\mu} \rangle \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q})$  e utilizando que  $\xi'^{\dagger} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \xi = \langle \mathbf{S} \rangle$  vemos que:

$$\boldsymbol{\mu} = 2(1 + \delta g) \left( \frac{Q'_f}{2m} \right) \mathbf{S} \quad (6.3.23)$$

Ao analisarmos essa expressão, podemos perceber que a inclusão das correções radiativas resulta em uma correção para o fator de Landé, que passa a ser  $g' = 2(1 + \delta g)$ . Essa correção é responsável por gerar o que é conhecido como momento magnético anômalo do férmion, que é definido por:

$$a_f = \frac{g' - 2}{2} = \delta g = \frac{Q^2 \alpha}{2\pi} \quad (6.3.24)$$

Como calculado no apêndice G. Para os léptons carregados (elétron, múon e tau), temos que  $Q = -1$ . Logo:

$$a_l = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 116171491 \cdot 10^{-11}, \quad l = e, \mu, \tau \quad (6.3.25)$$

Este é o valor da primeira correção radiativa para o fator de Landé do elétron, múon e tau. Atualmente, no contexto do Modelo Padrão, os valores teóricos mais precisos previstos para os momentos magnéticos anômalos do elétron e do múon são, respectivamente,  $a_e^{SM} = 115965218.073(28) \cdot 10^{-11}$  [28, 29] e  $a_\mu^{SM} = 116591810(43) \cdot 10^{-11}$  [30]. Ao compararmos com os resultados obtidos neste estudo, verificamos que o valor calculado para o momento magnético anômalo do múon está de acordo com o valor teórico do Modelo Padrão até ao terceiro algarismo significativo, enquanto que para o elétron a coincidência é observada até o segundo. No entanto, é válido ressaltar que esta discrepância ocorre devido ao fato de  $a_\mu^{SM}$  e  $a_e^{SM}$  levarem em consideração correções da QED até a décima ordem, além de correções de interações eletrofracas e também das que ocorrem via força forte. Como exemplos dos últimos dois tipos de contribuições, a figura 6.3 apresenta, respectivamente, o diagrama da correção eletrofraca de primeira ordem e também a ordem dominante da polarização hadrônica do vácuo.

Apesar de  $a_l^{SM}$  ser o valor proveniente de uma previsão teórica, devido ao cálculo perturbativo, existem incertezas teóricas associadas à esta previsão. Além disso, não conseguimos calcular as correções dominantes provenientes da polarização hadrônica do vácuo apenas utilizando a cromodinâmica quântica perturbativa (QCD). Para obtermos essa contribuição, é necessário combinar dados experimentais da seção de choque de processos envolvendo a aniquilação do par elétron-pósitron em hádrons e a QCD perturbativa [31].

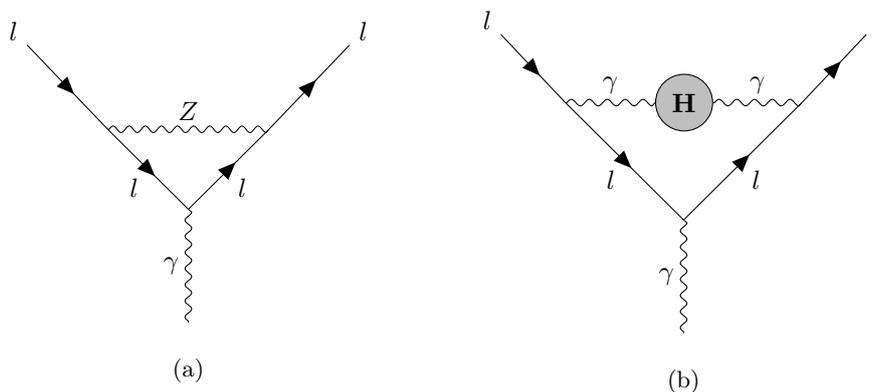


Figura 6.3: Diagramas de Feynman representando, respectivamente, a correção eletrofraca de primeira ordem e a ordem dominante da polarização hadrônica do vácuo, que contribuem para o cálculo do momento magnético anômalo do múon ( $l = \mu$ ) e do elétron ( $l = e$ ).

## 6.4 O Valor experimental de $a_\mu$

Na seção anterior, discutimos como o momento magnético anômalo dos férmions surge no Modelo Padrão e calculamos seu valor até a primeira ordem de correção radiativa. No entanto, apesar dos sucessos do Modelo Padrão, o valor experimental de  $a_\mu$  difere significativamente do previsto pelo modelo ( $a_\mu^{SM} = 116591810(43) \cdot 10^{-11}$  [30]). Em 2006, foi publicada a medida experimental do momento

magnético anômalo do múon feita pelo Laboratório Nacional de *Brookhaven* (BNL), o valor obtido foi  $a_\mu^{\text{BNL}} = 116592080(63) \cdot 10^{-11}$  [32]. Já em 2023, o Laboratório Nacional Fermilab (FNAL) encontrou  $a_\mu^{\text{FNAL}} = 116592055(24) \cdot 10^{-11}$  [1]. Considerando as respectivas incertezas dos valores medidos, vemos que eles são compatíveis. Deste modo, o resultado experimental combinado é dado pela média de ambas medidas:

$$a_\mu^{\text{EXP}} = 116592059(22) \cdot 10^{-11} \quad (6.4.1)$$

Com esse valor experimental, podemos calcular a diferença entre o momento magnético anômalo do múon medido e o previsto pelo Modelo Padrão, obtendo  $a_\mu^{\text{EXP}} - a_\mu^{\text{SM}} = (249 \pm 48) \times 10^{-11}$ . Esse resultado corresponde a uma significância estatística de aproximadamente  $5.0\sigma$  [1], a qual pode ser visualizada na figura 6.4. Portanto, podemos concluir que o Modelo Padrão falha na previsão do valor de  $a_\mu$ .

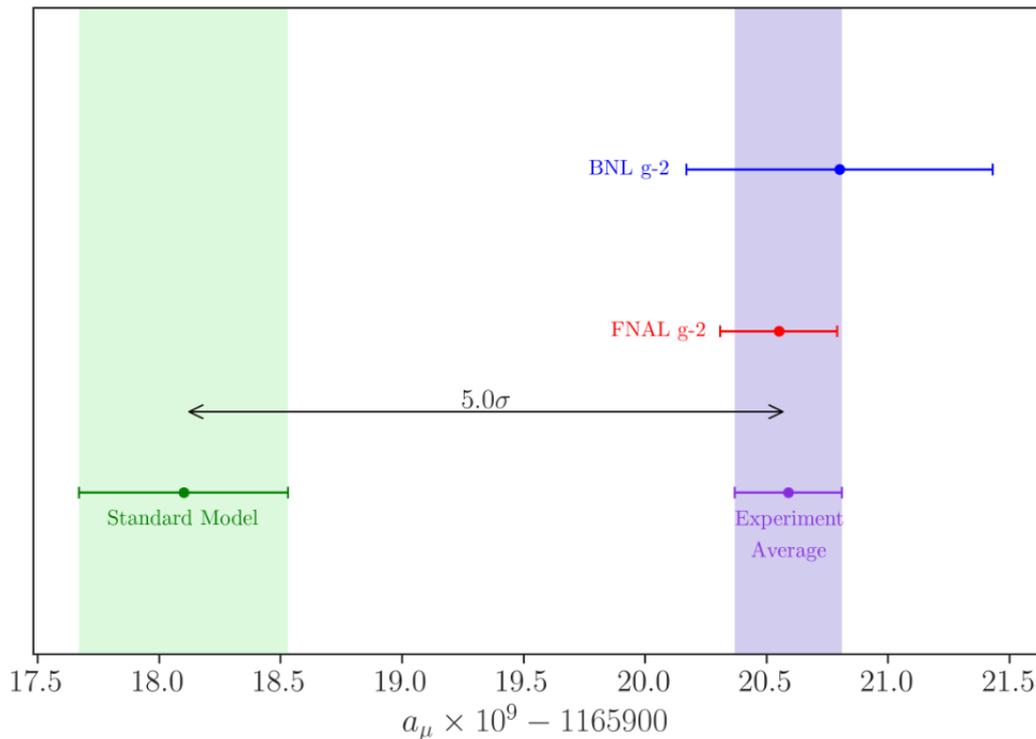


Figura 6.4: Valores experimentais obtidos para  $a_\mu$  dos experimentos BNL E821 e FNAL Muon g-2, assim como o valor teórico do MP [2].

# Capítulo 7

## Uma extensão para o Modelo Padrão e sua contribuição para $a_\mu$

No capítulo anterior, discutimos brevemente a discrepância entre o valor previsto pelo Modelo Padrão para o momento magnético anômalo do múon e o valor experimentalmente medido. Chegamos à conclusão de que o Modelo Padrão não prevê corretamente o valor desta grandeza. Desta forma, visando explicar e conciliar a previsão teórica com o momento magnético anômalo do múon obtido experimentalmente, diversos modelos de nova física têm sido propostos[3]. Em geral, tais modelos propõe a adição de novas partículas ao Modelo Padrão, de modo que elas gerem novas contribuições para  $a_\mu$  e expliquem a diferença em relação ao valor experimental.

Neste capítulo, faremos uma revisão de um modelo simplificado de nova física, conforme proposto na referência [3]. Tal modelo consiste na adição de um férmion carregado  $F$  e uma partícula escalar  $S$  ao Modelo Padrão. Inicialmente, abordaremos a Hamiltoniana de interação e exploraremos as regras de Feynman pertinentes a esse modelo. Posteriormente, procederemos ao cálculo da contribuição de primeira ordem para a correção radiativa do momento magnético anômalo do múon, resultante da inclusão dessas novas partículas. Por fim, analisaremos quais as possíveis massas das novas partículas que explicam a diferença entre o valor experimental e o previsto pelo Modelo Padrão para  $a_\mu$ .

### 7.1 A Hamiltoniana de interação do modelo simplificado de nova física e suas regras de Feynman

Vamos considerar um modelo simplificado de física além do Modelo Padrão, o qual introduz duas novas partículas: um férmion carregado denominado  $F$  e um escalar chamado  $S$ . O novo férmion  $F$  está associado a um campo fermiônico  $\psi_F$  que é um singlete de  $SU(2)_L$ , com uma representação  $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1)_{\frac{1}{2}}$  sob o grupo de simetria local  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Por outro lado, o campo escalar  $S$  está relacionado a um campo escalar que também é um singlete de  $SU(2)_L$ , com uma representação  $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)_0$ .

Uma característica importante a ser notada é que, devido ao fato de os novos campos serem singletos de  $SU(2)_L$ , eles interagem exclusivamente com o múon de mão direita, já que este também é um singlete. Com base nesta propriedade, vamos fazer referência a este modelo chamando-o genericamente de Modelo R. A densidade de Lagrangiana que este modelo adiciona ao Modelo Padrão é dada por[3]:

$$\mathcal{L}_{NP} = \partial_\mu \phi_S^* \partial^\mu \phi_S + \bar{\psi}_F (i\mathcal{D} - m_F) \psi_F - m_S^2 |\phi_S|^2 + (\lambda_R \bar{\psi}_F \phi_S \psi_{\mu_R} + h.c) - V(\phi_S) \quad (7.1.1)$$

onde  $\mathcal{D} = \gamma^\mu (\partial_\mu + iQ|e|A_\mu)$ . Note que a carga do novo férmion que aparece na derivada covariante é a mesma do múon, uma vez que a carga deve ser conservada e o campo escalar é neutro.

A fim de derivarmos as regras de Feynman associadas a este modelo simplificado de nova física, devemos focar na parte de interação da Lagrangiana apresentada. Analisando a expressão de  $\mathcal{L}_{NP}$ , vemos que os três primeiros termos contêm as contribuições cinética e de massa para as novas partículas, bem como a interação da QED para  $F$ . O quarto e quinto termo representam a interação entre os dois novos campos e o múon. Quanto ao quinto termo, ele engloba potenciais que descrevem interações do campo escalar, mas que não são de nosso interesse nesta discussão. Portanto, a densidade de Lagrangiana de interação é:

$$(\mathcal{L}_{NP})_{int} = -Q|e|\bar{\psi}_F \gamma^\mu \psi_F A_\mu + (\lambda_R \bar{\psi}_F \phi_S \psi_{\mu_R} + h.c) - V(\phi_S) \quad (7.1.2)$$

O campo  $\psi_{\mu_R}$  consiste em um espinor de Weyl de mão direita, que por sua vez é uma projeção do espinor de Dirac do múon na representação espinorial do grupo de Lorentz. Desta forma, podemos escrever  $\psi_{\mu_R} = P_R \psi_\mu$ , onde  $P_R$  é o projetor na componente de mão direita. De maneira análoga, também temos um projetor de  $P_L$  para a componente de mão esquerda. Definindo a matriz  $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ , a qual possui as seguintes propriedades[17]:

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (\gamma^5)^2 = I, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (7.1.3)$$

os projetores são escritos como  $P_R = \frac{I+\gamma^5}{2}$  e  $P_L = \frac{I-\gamma^5}{2}$ . Além disto, devido a relação de anticomutação de  $\gamma^5$  com as outras matrizes  $\gamma$ , temos a seguinte propriedade  $\gamma^\mu P_R = P_L \gamma^\mu$ . Desta forma:

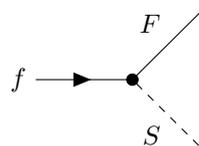
$$(\mathcal{L}_{NP})_{int} = -Q|e|\bar{\psi}_F \gamma^\mu \psi_F A_\mu + (\lambda_R \bar{\psi}_F \phi_S P_R \psi_\mu + h.c) - V(\phi_S) \quad (7.1.4)$$

A Hamiltoniana de um sistema pode ser obtida por meio da aplicação de uma transformação de Legendre na Lagrangiana[9]. No entanto, uma vez que  $(\mathcal{L}_{NP})_{int}$  depende unicamente dos campos e não de suas derivadas, essa transformação se simplifica para  $(\mathcal{H}_{NP})_{int} = -(\mathcal{L}_{NP})_{int}$ . Portanto, a Hamiltoniana de interação do Modelo R é:

$$H_{int} = - \int d^3x (\mathcal{L}_{NP})_{int} = \int d^3x [Q|e|\bar{\psi}_F \gamma^\mu \psi_F A_\mu - (\lambda_R \bar{\psi}_F \phi_S P_R \psi_\mu + h.c) + V(\phi_S)] \quad (7.1.5)$$

A fim de calcularmos amplitudes de espalhamento neste modelo de nova física, devemos estabelecer quais são suas regras de Feynman a partir da Hamiltoniana de interação utilizando o mesmo mecanismo que discutimos no capítulo 5. Como este modelo consiste em uma extensão do Modelo Padrão, teremos as regras de Feynman da QED que apresentamos no capítulo 5.

Apesar de incorporarmos duas novas partículas ao Modelo Padrão, já estamos familiarizados com seus propagadores e pernas externas, uma vez que se tratam de campos de Dirac e escalar. Portanto, a regra efetivamente nova está atrelada ao vértice de interação dos novos campos com os férmions do MP. Consequentemente, ela consiste em multiplicar por  $-i$  a constante de acoplamento do penúltimo termo da Hamiltoniana 7.1.5. Assim, obtemos:



$$= i\lambda_R P_R \quad (7.1.6)$$

Essa nova regra de Feynman que derivamos será essencial para o cálculo de amplitudes que realizaremos na próxima seção.

## 7.2 Correções radiativas para o espalhamento de um férmion do Modelo Padrão por um campo eletromagnético externo associadas ao Modelo R

A inclusão de um férmion carregado e um campo escalar ao Modelo Padrão, que interagem de acordo com a Hamiltoniana 7.1.5, resulta na criação de um novo diagrama possível (Figura 7.1) para a correção radiativa de primeira ordem no espalhamento de um férmion do MP por um campo externo. No contexto do Modelo R, essa correção no vértice inclui um *loop* que engloba as novas partículas acrescentadas ao Modelo Padrão. Portanto, nosso objetivo é calcular a amplitude de espalhamento associada a esse diagrama para determinar a sua contribuição para o momento magnético anômalo dos férmions.

Assim como no capítulo anterior (equação 6.3.3), vamos considerar a amplitude associada a este diagrama como sendo:

$$(2\pi)\delta(p^0 - p'^0) i\mathcal{M}_{NP}^{(1)} = -iQ|e|\bar{u}(p')\delta\Gamma_{NP}^\mu u(p)\tilde{A}_\mu^{cl}(p' - p) \quad (7.2.1)$$

Utilizando as regras de Feynman da QED apresentadas no capítulo 5 e as que discutimos na seção anterior, o termo  $\bar{u}(p')\delta\Gamma_{NP}^\mu u(p)$  associado ao novo diagrama de correção de vértice (Figura 7.1) é dado pela seguinte expressão:

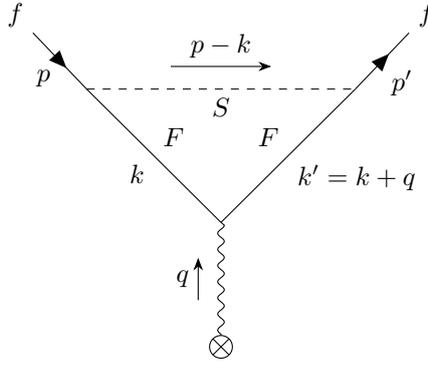


Figura 7.1: Diagrama de Feynman contendo a correção de vértice de primeira ordem gerada pela introdução de um férmion carregado e um escalar ao Modelo Padrão.

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p')\delta\Gamma_{NP}^\mu u(p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p')(i\lambda_R P_L) \frac{i(\not{k}' + m_F)}{(k'^2 - m_F^2 + i\varepsilon)} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m_F)}{(k^2 - m_F^2 + i\varepsilon)} \frac{i(i\lambda_R P_R)u(p)}{((k-p)^2 - m_S^2 + i\varepsilon)} \\
&= -i\lambda_R^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') \frac{(I - \gamma^5)(\not{k}' + m_F)\gamma^\mu(\not{k} + m_F)(I + \gamma^5)}{4(k'^2 - m_F^2 + i\varepsilon)(k^2 - m_F^2 + i\varepsilon)((k-p)^2 - m_S^2 + i\varepsilon)} u(p) \\
&= -i\frac{\lambda_R^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') \frac{(\not{k}'\gamma^\mu\not{k} + m_F^2\gamma^\mu)(I + \gamma^5)}{(k'^2 - m_F^2 + i\varepsilon)(k^2 - m_F^2 + i\varepsilon)((k-p)^2 - m_S^2 + i\varepsilon)} u(p)
\end{aligned} \tag{7.2.2}$$

A equação acima pode ser reformulada com o auxílio do método dos parâmetros de Feynman[17, 25] e por meio de manipulações algébricas, conforme explicado em detalhes no Apêndice H. Dessa forma, chegamos à seguinte expressão:

$$\bar{u}(p')\delta\Gamma_{NP}^\mu u(p) = \delta Q_{NP} \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) + \delta g_{NP} \bar{u}(p')i\frac{\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}u(p) + \mathcal{O}(\bar{u}(p')\gamma^5 u(p)) \tag{7.2.3}$$

onde  $\delta Q_{NP}$  e  $\delta g_{NP}$  são dados por:

$$\delta Q_{NP} \equiv i\frac{\lambda_R^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1)}{(l^2 - \Delta_{NP} + i\varepsilon)^3} \left( -\frac{1}{2}l^2 + q^2 x_2 x_1 + m_f^2 x_3 (2(x_1 - x_2) + x_3) + m_F^2 \right) \tag{7.2.4}$$

$$\delta g_{NP} \equiv i\frac{\lambda_R^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1)}{(l^2 - \Delta_{NP} + i\varepsilon)^3} 4m_f^2 x_2 x_3 \tag{7.2.5}$$

Note que não incluímos explicitamente os termos proporcionais à matriz  $\gamma^5$ , já que esses termos somente contribuiriam para o momento de dipolo elétrico do férmion[33]. Nosso interesse aqui está unicamente nas contribuições para o momento magnético anômalo dos férmions.

Substituindo o resultado 7.2.3 na equação 7.2.2:

$$\begin{aligned}
(2\pi)\delta(p^0 - p'^0) i\mathcal{M}_{NP}^{(1)} &= -iQ|e| \left[ \delta Q_{NP} \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) + \delta g_{NP} \bar{u}(p')i\frac{\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}u(p) \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{O}(\bar{u}(p')\gamma^5 u(p)) \right] \tilde{A}_\mu^{cl}(p' - p)
\end{aligned} \tag{7.2.6}$$

Da mesma forma que fizemos no capítulo anterior, iremos calcular o limite não relativístico da equação acima para identificar os potenciais de interação por meio da aproximação de Born. No capítulo anterior, demonstramos que no limite não relativístico temos:

$$\bar{u}(p')i\frac{\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}u(p)\tilde{A}_\mu^{cl}(q) = -4im\frac{\xi'^\dagger\frac{\sigma}{2}\xi \cdot (\mathbf{q} \times \tilde{\mathbf{A}}^{cl}(q))}{2m} \tag{7.2.7}$$

$$\bar{u}(p')\gamma^0 u(p) = 2m\xi'^\dagger\xi \tag{7.2.8}$$

$$\bar{u}(p')\gamma^j u(p)\tilde{\mathbf{A}}^{cl}(\mathbf{q}) = -4im\frac{\xi'^\dagger\frac{\sigma}{2}\xi \cdot (\mathbf{q} \times \tilde{\mathbf{A}}^{cl}(\mathbf{q}))}{2m} \tag{7.2.9}$$

Substituindo estes resultados na equação 7.2.6 e utilizando que  $\tilde{A}_\mu^{cl}(q) = (2\pi)\delta(q^0) (\tilde{\Phi}(\mathbf{q}), \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}))$ :

$$i\mathcal{M}_{NP}^{(1)} = -iQ_F|e| \left[ \delta Q_{NP} 2m\xi'^{\dagger}\xi\tilde{\Phi} - (\delta Q_{NP} + \delta g_{NP}) 4im \frac{\xi'^{\dagger}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\xi \cdot (\mathbf{q} \times \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q}))}{2m} \right] + \mathcal{O}\left(\bar{u}(p')\gamma^5 u(p)\tilde{A}_\mu^{cl}(p' - p)\right) \quad (7.2.10)$$

Usando que  $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) = -i\mathbf{q} \times \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{q})$ :

$$i\mathcal{M}_{NP}^{(1)} = -iQ_F|e| \left[ \delta Q_{NP} 2m\xi'^{\dagger}\xi\tilde{\Phi} + (\delta Q_{NP} + \delta g_{NP}) 4m \frac{\xi'^{\dagger}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\xi \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q})}{2m} \right] + \mathcal{O}\left(\bar{u}(p')\gamma^5 u(p)\tilde{A}_\mu^{cl}(p' - p)\right) \quad (7.2.11)$$

Este é o limite não relativístico da amplitude de espalhamento associada ao diagrama da Figura 7.1. Para obtermos o limite não relativístico da amplitude de espalhamento total até a primeira ordem de correção radiativa, devemos somar a contribuição adicional do Modelo R ao resultado que já obtivemos para o Modelo Padrão no capítulo anterior (Equação 6.3.19), isto é:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_R &= i\mathcal{M}_{SM} + i\mathcal{M}_{NP}^{(1)} \\ &= 2m \left[ -iQ|e|(1 + \delta Q_{SM} + \delta Q_{NP}) \xi'^{\dagger}\xi\tilde{\Phi}(\mathbf{q}) \right. \\ &\quad \left. + iQ|e|(1 + \delta Q_{SM} + \delta g_{SM} + \delta Q_{NP} + \delta g_{NP}) 2 \frac{\xi'^{\dagger}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\xi \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q})}{2m} \right] + \mathcal{O}\left(\bar{u}(p')\gamma^5 u(p)\tilde{A}_\mu^{cl}(p' - p)\right) \end{aligned} \quad (7.2.12)$$

De maneira análoga ao que fizemos no capítulo anterior, iremos comparar este resultado com a aproximação de Born para obtermos uma expressão para o potencial de interação:

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) = Q|e|(1 + \delta Q_{SM} + \delta Q_{NP}) \tilde{\Phi}(\mathbf{q}) - Q|e|(1 + \delta Q_{SM} + \delta g_{SM} + \delta Q_{NP} + \delta g_{NP}) 2 \frac{\xi'^{\dagger}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\xi \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q})}{2m} \quad (7.2.13)$$

Vale ressaltar que estamos omitindo a contribuição dos termos proporcionais a matriz  $\gamma^5$ , que nos forneceriam um potencial ligado a interação do dipolo elétrico do férmion.

O primeiro termo deste potencial corresponde à interação do férmion com o campo elétrico, resultando em um potencial Coulombiano. Enquanto o segundo termo está associado ao acoplamento com o campo magnético. Desta forma:

$$\tilde{V}_C(\mathbf{q}) = Q|e|(1 + \delta Q_{SM} + \delta Q_{NP}) \tilde{\Phi}(\mathbf{q}) \quad (7.2.14)$$

$$\tilde{V}_B(\mathbf{q}) = -Q|e|(1 + \delta Q_{SM} + \delta g_{SM} + \delta Q_{NP} + \delta g_{NP}) 2 \frac{\xi'^{\dagger}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\xi \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q})}{2m} \quad (7.2.15)$$

Analisando o potencial de Coulomb, notamos que a correção radiativa de primeira ordem gera uma correção  $\delta Q_{SM} + \delta Q_{NP}$  para a carga em relação ao nível de árvore. Dessa forma, a nova carga é  $Q' = Q|e|(1 + \delta Q_{SM} + \delta Q_{NP})$ . Utilizando a carga corrigida, podemos reescrever o potencial de interação magnética da seguinte forma:

$$\tilde{V}_B(\mathbf{q}) = -2Q'(1 + \delta g_{SM} + \delta g_{NP}) \frac{\xi'^{\dagger}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\xi \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q})}{2m} \quad (7.2.16)$$

onde os termos de segunda ordem foram desprezados. Comparando com o potencial clássico  $\tilde{V}(\mathbf{q}) = -\langle \boldsymbol{\mu} \rangle \cdot \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q})$  e utilizando que  $\xi'^{\dagger}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\xi = \langle \mathbf{S} \rangle$  vemos que:

$$\boldsymbol{\mu} = 2(1 + \delta g_{SM} + \delta g_{NP}) \left( \frac{Q'}{2m} \right) \mathbf{S} \quad (7.2.17)$$

Em comparação com a expressão obtida considerando apenas a correção radiativa de primeira ordem no Modelo Padrão, temos um termo de correção extra  $\Delta g' = 2\delta g_{NP}$  para o fator de Landé. Como resultado, teremos uma contribuição adicional para o momento magnético anômalo do múon. Utilizando a definição de  $a_\mu$  apresentada no capítulo anterior, a contribuição exclusiva do novo diagrama de correção radiativa (Figura 7.1) é dada por:

$$\Delta a_\mu^{NP} = \frac{\Delta g'}{2} = \delta g_{NP} = \frac{\lambda_R^2 m_\mu^2}{96\pi^2 m_S^2} \frac{(2 + 3\kappa - 6\kappa^2 + \kappa^3 + 6\kappa \ln \kappa)}{(1 - \kappa)^4} \quad (7.2.18)$$

onde  $\kappa \equiv \frac{m_F^2}{m_S^2}$ . Os passos detalhados para a derivação desse resultado podem ser encontrados no Apêndice H. É importante notar que este resultado está em conformidade com o apresentado na referência [3].

### Análise dos parâmetros de $\Delta a_\mu^{NP}$

Ao propormos este modelo simplificado de nova física, nosso principal objetivo é explicar a diferença entre o valor experimental do momento magnético anômalo do múon e a previsão do Modelo Padrão, a qual vimos no capítulo anterior que é  $\Delta a_\mu \equiv a_\mu^{EXP} - a_\mu^{SM} = (249 \pm 48) \times 10^{-11}$ . Deste modo, o parâmetro de acoplamento do modelo, juntamente com as massas do novo férmion e escalar devem ser tais que  $\Delta a_\mu^{NP}$  explique a diferença  $\Delta a_\mu$  com uma significância estatística de até  $1\sigma$ .

Utilizando o método dos mínimos quadrados, a região no espaço de parâmetros, na qual a diferença é explicada com uma significância de  $1\sigma$ , é determinada pelo seguinte vínculo[34]:

$$\chi^2(\lambda_R, m_F, m_S) = \frac{(\Delta a_\mu - \Delta a_\mu^{NP})^2}{\sigma_{\Delta a_\mu}^2} \leq 2.3 \implies (\Delta a_\mu - \sqrt{2.3}\sigma_{\Delta a_\mu}) \leq \Delta a_\mu^{NP} \leq (\Delta a_\mu + \sqrt{2.3}\sigma_{\Delta a_\mu}) \quad (7.2.19)$$

A fim de investigarmos quais valores das massas do novo férmion e do escalar satisfazem os vínculos acima, mantendo  $\lambda_R$  fixo em 2.5, geramos um mapa de calor (Figura 7.2) que representa o valor de  $\Delta a_\mu^{NP}$  para cada combinação de massas  $m_F$  e  $m_S$  dentro do intervalo de [70, 300] GeV. Ao analisar o mapa gerado, observamos que a contribuição da nova física é mais significativa para massas menores. Além disto, a região que explica  $\Delta a_\mu$  está situada entre as linhas pontilhadas e nela temos que  $m_S$  está no intervalo de [155, 240] GeV e  $m_F$  varia entre [125, 190] GeV.

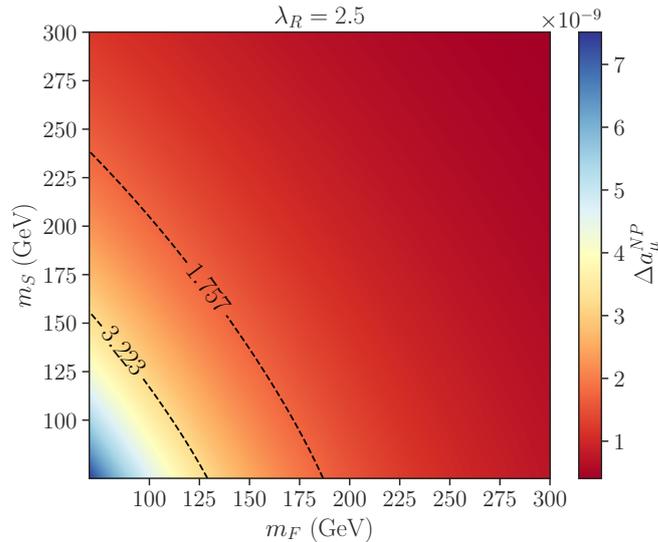


Figura 7.2: Mapa de calor da contribuição de nova física  $\Delta a_\mu^{NP}$  para cada combinação de massas  $m_F$  e  $m_S$  dentro do intervalo de [70, 300] GeV e com  $\lambda_R = 2.5$ . As linhas pontilhadas indicam o menor e o maior valor de  $\Delta a_\mu^{NP}$  que explicam a discrepância entre o valor de  $a_\mu$  experimental e o previsto pelo Modelo Padrão com significância de até  $1\sigma$

Em uma segunda análise, queremos estudar os valores da constante de acoplamento do modelo tal que  $\Delta a_\mu^{NP} = \Delta a_\mu = (249 \pm 48) \times 10^{-11}$ , isto é:

$$\lambda_R = \frac{4\pi m_S}{m_\mu} \sqrt{\Delta a_\mu \frac{6(1-\kappa)^4}{(2+3\kappa-6\kappa^2+\kappa^3+6\kappa \ln \kappa)}} \quad (7.2.20)$$

Assim, utilizamos essa equação para gerar um mapa de calor de  $\lambda_R$  (Figura 7.3) para várias combinações de massas  $m_F$  e  $m_S$  dentro dos intervalos  $[100, 1000]$  GeV e  $[100, 1300]$  GeV, respectivamente. A observação desse mapa indica que a constante de acoplamento necessária para explicar  $\Delta a_\mu$  aumenta à medida que as massas das partículas crescem. No entanto, para garantir a validade da teoria perturbativa que utilizamos no cálculo, é vital respeitar a restrição  $\lambda_R < 4\pi$ , o que implica um limite superior para as massas do novo férmion e do escalar. Consequentemente, podemos observar que  $m_S$  está limitado a aproximadamente 1200 GeV, enquanto  $m_F$  ainda pode atingir aproximadamente 820 GeV.

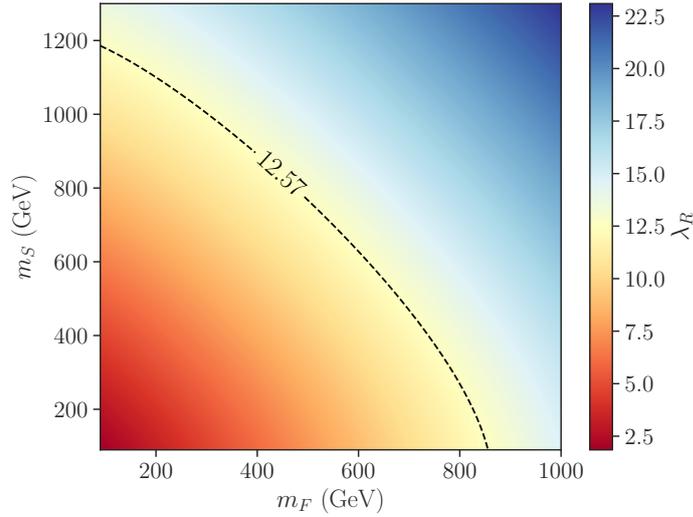


Figura 7.3: Mapa de calor do valor da constante de acoplamento  $\lambda_R$  em que  $\Delta a_\mu^{NP} = \Delta a_\mu = (249 \pm 48) \times 10^{-11}$  para para cada combinação de massas  $m_F$  e  $m_S$  dentro dos intervalos  $[100, 1000]$  GeV e  $[100, 1300]$  GeV, respectivamente. A linha tracejada indica os valores de massas onde a constante de acoplamento atinge seu valor limite ( $\lambda_R = 4\pi$ ) para a validade dos cálculos perturbativos.

# Conclusão

Durante o desenvolvimento deste projeto foram estudados, através de livros texto [16, 17, 19, 22, 25, 4], conceitos da Teoria Quântica de Campos fundamentais para o cálculo do momento magnético anômalo do múon. Inicialmente abordamos a problemática de construir uma teoria quântica e relativística para o sistema de uma única partícula livre. Tal fato nos levou a desenvolver uma teoria em que o número de partículas é arbitrário. Fazendo uma reinterpretação da nossa base de estados nesta nova teoria, foi possível fazer uma analogia com um conjunto de infinitos osciladores harmônicos desacoplados, o que permitiu a construção de um formalismo baseado nos operadores de criação e aniquilação. Após isto, discutimos sobre causalidade e localidade de medidas dentro da mecânica quântica, o que, inspirado no eletromagnetismo clássico, nos levou à necessidade de construir nossos observáveis utilizando campos quânticos. Baseado em um conjunto de condições que desejávamos para nosso campo escalar livre quântico, como a garantia da causalidade, conseguimos escrever  $\phi^i(x)$  em função dos operadores de criação e aniquilação. Além disso, estudamos o mecanismo de quantização canônica, o qual nos permite fazer a transição entre a Teoria Clássica de Campos para a Teoria Quântica de Campos.

No segundo capítulo, realizamos uma breve análise das representações do grupo de Lorentz, com ênfase na representação espinorial. Esta representação é particularmente relevante, uma vez que o campo de Dirac, associado a partículas de spin 1/2, se transforma sob essa representação. Posteriormente, abordamos a Lagrangiana que este campo obedece, encontramos as soluções livres e utilizamos o mecanismo de quantização canônica para quantizá-lo. De maneira análoga a este capítulo, o terceiro aborda o campo vetorial, associado ao fóton.

No quarto capítulo, exploramos a teoria de espalhamento, introduzindo o operador matriz de espalhamento que estabelece a conexão entre a amplitude de espalhamento e a série de Dyson. Essa relação permite o cálculo perturbativo de  $\mathcal{M}$ . No entanto, reconhecemos a complexidade geral desse método. Com essa consideração em mente, no capítulo 5, desenvolvemos um método alternativo com base em representações diagramáticas e regras específicas, estabelecendo uma conexão direta com os termos da série de Dyson.

Utilizando os conceitos estudados, calculamos a amplitude de espalhamento de um férmion carregado com um campo eletromagnético externo no Modelo Padrão e tomamos seu limite não relativístico para compararmos o resultado obtido com a aproximação de Born. Isso nos permitiu encontrar o potencial de interação entre o férmion e os campos elétrico e magnético. A princípio, fizemos esse processo em nível de árvore e obtivemos, através do acoplamento do férmion com o campo magnético, o momento magnético e encontramos o fator de Landé  $g = 2$ . Em seguida, fizemos o processo análogo, mas considerando também a primeira ordem de correção radiativa, o que nos levou a encontrar uma nova contribuição para o fator de Landé, a qual definimos como o momento magnético anômalo. Como resultado, obtivemos que o valor do momento magnético anômalo do múon, na QED, é aproximadamente  $a_\mu = 116171491 \cdot 10^{-11}$ .

É importante ressaltar que o valor do momento magnético anômalo do múon que encontramos neste projeto provém da amplitude calculada até a primeira ordem de correção radiativa, isto é, este não é o valor previsto pelo Modelo Padrão. Atualmente, o valor previsto é  $a_\mu^{\text{SM}} = 116591810(43) \cdot 10^{-11}$  [30] e leva em consideração as correções da eletrodinâmica quântica até a décima ordem, correções eletrofracas e da força forte (polarização hadrônica do vácuo). Note que tal valor coincide até a quinta casa decimal com o valor que calculamos no capítulo 6, o que demonstra que a correção de primeira ordem da QED consiste na maior contribuição para  $a_\mu$ .

Para finalizarmos o sexto capítulo, abordamos a discrepância  $\Delta a_\mu = (249 \pm 48) \times 10^{-11}$  entre o valor experimental do momento magnético anômalo do múon ( $a_\mu = 116592059(22) \times 10^{-11}$  [1]) em relação a previsão do Modelo Padrão, o que corresponde a uma significância estatística de  $5\sigma$ . Portanto, concluímos que o Modelo Padrão não prevê corretamente o valor de  $a_\mu$ . Tal fato nos levou a estudar um modelo de nova física já conhecido [3] que estende o Modelo Padrão adicionando um férmion carregado e um escalar que só interagem com o múon de mão direita.

A adição dessas novas partículas resultou em um novo diagrama de Feynman para as correções radiativas de primeira ordem. Seguindo os princípios das regras de Feynman discutidos no capítulo 5, calculamos a amplitude de espalhamento associada a este diagrama. Em seguida, de maneira análoga ao capítulo 6, determinamos a contribuição exclusiva,  $\Delta a_\mu^{NP}$ , desse novo diagrama ao momento magnético anômalo do

múon. Como resultado, obtivemos uma expressão dependente de três parâmetros: as massas do férmion carregado e do escalar, e a constante de acoplamento destas partículas ao múon de mão direita.

Para que essa nova contribuição para  $a_\mu$  explique a discrepância entre o valor experimental e o previsto pelo Modelo Padrão, examinamos quais valores de massa justificam a diferença para uma constante de acoplamento fixa em 2.5, resultando em  $m_S$  no intervalo de [125, 190] GeV e  $m_F$  variando entre [155, 240] GeV. Em uma segunda análise, verificamos os valores da constante de acoplamento nos quais  $\Delta a_\mu^{NP} = \Delta a_\mu$  e observamos que, à medida que as massas aumentam, a constante de acoplamento necessária para satisfazer a igualdade também aumenta. Além disto, notamos que este vínculo adiciona um limite superior de aproximadamente 1200 GeV e 820 GeV para as massas do escalar e do férmion carregado, respectivamente.

## Apêndice A

# Os comutadores do campo escalar quântico livre

Nesta seção, iremos demonstrar que o campo escalar quântico livre,

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} [e^{-ip \cdot x} a_{\mathbf{p}} + e^{ip \cdot x} a_{\mathbf{p}}^\dagger] \quad (\text{A.0.1})$$

satisfaz as seguintes relações de comutação:

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (\text{A.0.2})$$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad (\text{A.0.3})$$

$$[\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad (\text{A.0.4})$$

Vamos começar calculando o primeiro comutador:

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] = \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (e^{-ip \cdot x} a_{\mathbf{p}} + e^{ip \cdot x} a_{\mathbf{p}}^\dagger), \frac{d}{dt} \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}} (e^{-ip' \cdot y} a_{\mathbf{p}'} + e^{ip' \cdot y} a_{\mathbf{p}'}^\dagger) \right]$$

Nós sabemos que  $\frac{d}{dt} e^{\pm ip' \cdot y} = \frac{d}{dt} e^{\pm i(\omega_{\mathbf{p}'} t - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{y})} = \pm i\omega_{\mathbf{p}'} e^{\pm i(\omega_{\mathbf{p}'} t - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{y})} = \pm i\omega_{\mathbf{p}'} e^{\pm ip' \cdot y}$ . Portanto:

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] = \int \int \frac{d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2 \sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}'}}} \left[ (e^{-ip \cdot x} a_{\mathbf{p}} + e^{ip \cdot x} a_{\mathbf{p}}^\dagger), (-i\omega_{\mathbf{p}'} e^{-ip' \cdot y} a_{\mathbf{p}'} + i\omega_{\mathbf{p}'} e^{ip' \cdot y} a_{\mathbf{p}'}^\dagger) \right]$$

Como visto na discussão de espaço de Fock,  $[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}] = [a_{\mathbf{p}}^\dagger, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = 0$  e  $[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ . Logo:

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] = i \int \int \frac{d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2 \sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}'}}} \omega_{\mathbf{p}'} \left( e^{-ip \cdot x} e^{ip' \cdot y} [a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^\dagger] + e^{ip \cdot x} e^{-ip' \cdot y} [a_{\mathbf{p}'}^\dagger, a_{\mathbf{p}}] \right)$$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] = i \int \int \frac{d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2 \sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}'}}} \omega_{\mathbf{p}'} \left( e^{-ip \cdot x} e^{ip' \cdot y} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + e^{ip \cdot x} e^{-ip' \cdot y} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \right)$$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] = i \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2} \left( e^{-ip \cdot (x-y)} + e^{ip \cdot (x-y)} \right)$$

O comutador está sendo calculado para tempos iguais, ou seja  $e^{\pm ip \cdot (x-y)} = e^{\mp i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})}$ . Portanto:

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] = i \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2} \left( e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} + e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right)$$

Como estamos integrando sobre todo o espaço, a integral é simétrica e consequentemente é a mesma se feita sobre  $d^3 \mathbf{p}$  ou  $-d^3 \mathbf{p}$ , o que implica que podemos trocar  $-\mathbf{p}$  por  $\mathbf{p}$  no segundo termo da integral. Portanto:

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] = i \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2} \left( e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} + e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \right)$$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] = i \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}$$

Note que a integral é justamente uma delta de Dirac. Logo:

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (\text{A.0.5})$$

Fazendo o procedimento análogo a este para calcular  $[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)]$ :

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (e^{-ip \cdot x} a_{\mathbf{p}} + e^{ip \cdot x} a_{\mathbf{p}}^\dagger), \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}} (e^{-ip' \cdot y} a_{\mathbf{p}'} + e^{ip' \cdot y} a_{\mathbf{p}'}^\dagger) \right]$$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = \int \int \frac{d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2 \sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}'}}} \left[ (e^{-ip \cdot x} a_{\mathbf{p}} + e^{ip \cdot x} a_{\mathbf{p}}^\dagger), (e^{-ip' \cdot y} a_{\mathbf{p}'} + e^{ip' \cdot y} a_{\mathbf{p}'}^\dagger) \right]$$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2 \omega_{\mathbf{p}}} \left( e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} - e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \right)$$

Como  $\omega_{\mathbf{p}} = \omega_{-\mathbf{p}}$  e estamos integrando sobre todo o espaço, a integral é simétrica e conseqüentemente é a mesma se feita sobre  $d^3 \mathbf{p}$  ou  $-d^3 \mathbf{p}$ , o que implica que podemos trocar  $-\mathbf{p}$  por  $\mathbf{p}$  no segundo termo da integral. Portanto:

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2 \omega_{\mathbf{p}}} \left( e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} - e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \right)$$

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad (\text{A.0.6})$$

Fazendo o procedimento análogo para calcularmos  $[\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)]$ :

$$[\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] = \left[ \frac{d}{dt} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} (e^{-ip \cdot x} a_{\mathbf{p}} + e^{ip \cdot x} a_{\mathbf{p}}^\dagger), \frac{d}{dt} \int \frac{d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}} (e^{-ip' \cdot y} a_{\mathbf{p}'} + e^{ip' \cdot y} a_{\mathbf{p}'}^\dagger) \right]$$

$$[\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] = \int \int \frac{d^3 \mathbf{p} d^3 \mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2 \sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}'}}} \left[ (-i\omega_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} a_{\mathbf{p}} + i\omega_{\mathbf{p}} e^{ip \cdot x} a_{\mathbf{p}}^\dagger), (-i\omega_{\mathbf{p}'} e^{-ip' \cdot y} a_{\mathbf{p}'} + i\omega_{\mathbf{p}'} e^{ip' \cdot y} a_{\mathbf{p}'}^\dagger) \right]$$

$$[\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2} \omega_{\mathbf{p}} \left( e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} - e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \right)$$

Novamente, trocando  $\mathbf{p}$  por  $-\mathbf{p}$  no segundo termo:

$$[\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 2} \omega_{\mathbf{p}} \left( e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} - e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \right)$$

$$[\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)] = 0 \quad (\text{A.0.7})$$

## Apêndice B

# O cálculo dos termos que compõe a Hamiltoniana do campo escalar quântico livre

Como vimos na terceira seção do segundo capítulo, a Hamiltoniana de um campo escalar quântico livre é:

$$H = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left( \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)^2 + |\nabla\phi(\mathbf{x}, t)|^2 + \mu^2\phi(\mathbf{x}, t)^2 \right) \quad (\text{B.0.1})$$

Utilizando a expressão que construímos para o campo escalar quântico livre em função dos operadores de criação e aniquilação (equação 1.2.23), podemos escrever essa Hamiltoniana em função desses mesmos operadores. No entanto, nesta seção explicitaremos os cálculos de cada um dos termos que compõe a Hamiltoniana. O primeiro termo será dado por:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)^2 &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left[ \frac{d}{dt} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} [e^{-ip \cdot x} a_{\mathbf{p}} + e^{ip \cdot x} a_{\mathbf{p}}^\dagger] \right] \left[ \frac{d}{dt} \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}} [e^{-ip' \cdot x} a_{\mathbf{p}'} + e^{ip' \cdot x} a_{\mathbf{p}'}^\dagger] \right] \\ \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)^2 &= \frac{1}{2} \int \int \int \frac{d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}'}}} \left[ \frac{d}{dt} e^{-ip \cdot x} a_{\mathbf{p}} + \frac{d}{dt} e^{ip \cdot x} a_{\mathbf{p}}^\dagger \right] \left[ \frac{d}{dt} e^{-ip' \cdot x} a_{\mathbf{p}'} + \frac{d}{dt} e^{ip' \cdot x} a_{\mathbf{p}'}^\dagger \right] \end{aligned} \quad (\text{B.0.2})$$

Nós sabemos que  $e^{\pm ip \cdot x} = e^{\pm i(\omega_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}$ , então  $\frac{d}{dt} e^{\pm ip \cdot x} = \frac{d}{dt} e^{\pm i(\omega_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} = \pm i\omega_{\mathbf{p}} e^{\pm i(\omega_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}$ . Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)^2 &= \frac{1}{2} \int \int \int \frac{d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}'}}} \left[ -i\omega_{\mathbf{p}} e^{-i(\omega_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} a_{\mathbf{p}} + i\omega_{\mathbf{p}} e^{i(\omega_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} a_{\mathbf{p}}^\dagger \right] \\ &\quad \left[ -i\omega_{\mathbf{p}'} e^{-i(\omega_{\mathbf{p}'}t - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x})} a_{\mathbf{p}'} + i\omega_{\mathbf{p}'} e^{i(\omega_{\mathbf{p}'}t - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x})} a_{\mathbf{p}'}^\dagger \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)^2 &= -\frac{1}{2} \int \int \int \frac{d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3 2\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}'}}} \omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}'} \left[ e^{-i(\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{p}'})t} e^{i(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} - e^{-i(\omega_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{p}'})t} e^{i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'}^\dagger \right. \\ &\quad \left. - e^{i(\omega_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{p}'})t} e^{-i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'} + e^{i(\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{p}'})t} e^{-i(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'}^\dagger \right] \end{aligned}$$

Note que em todos os quatro termos temos algo do tipo  $\frac{1}{(2\pi^3)} \int d^3\mathbf{x} e^{\pm i(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}}$  ou  $\frac{1}{(2\pi^3)} \int d^3\mathbf{x} e^{\pm i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}}$  ou seja, temos  $\delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}')$  ou  $\delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ . Deste modo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)^2 &= -\frac{1}{2} \int \int \frac{d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}'}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}'}}} \omega_{\mathbf{p}}\omega_{\mathbf{p}'} \left[ e^{-i(\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{p}'})t} \delta(\mathbf{p}' + \mathbf{p}) a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} - e^{-i(\omega_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{p}'})t} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'}^\dagger \right. \\ &\quad \left. - e^{i(\omega_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{p}'})t} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'} + e^{i(\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{p}'})t} \delta(\mathbf{p}' + \mathbf{p}) a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'}^\dagger \right] \end{aligned}$$

Lembrando que  $\omega_{\mathbf{p}} = \omega_{-\mathbf{p}}$ , visto que  $\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + \mu^2}$ , podemos realizar a integral em  $\mathbf{p}'$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)^2 &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2} \omega_{\mathbf{p}} \left[ e^{-2i\omega_{\mathbf{p}}t} a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} - a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger - a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + e^{2i\omega_{\mathbf{p}}t} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger \right] \\ \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)^2 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} \left[ -\omega_{\mathbf{p}}^2 \left( e^{-2i\omega_{\mathbf{p}}t} a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} + e^{2i\omega_{\mathbf{p}}t} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger \right) + \omega_{\mathbf{p}}^2 \left( a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.0.3})$$

Fazendo o processo análogo para o segundo termo da Hamiltoniana (equação 1.3.23):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} |\nabla\phi(\mathbf{x}, t)|^2 &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left[ \nabla \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \left[ e^{-ip \cdot x} a_{\mathbf{p}} + e^{ip \cdot x} a_{\mathbf{p}}^\dagger \right] \right] \cdot \left[ \nabla \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}} \left[ e^{-ip' \cdot x} a_{\mathbf{p}'} + e^{ip' \cdot x} a_{\mathbf{p}'}^\dagger \right] \right] \\ \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} |\nabla\phi(\mathbf{x}, t)|^2 &= \frac{1}{2} \int \int \int \frac{d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{3 \cdot 2} \sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}'}}} \left[ \nabla e^{-ip \cdot x} a_{\mathbf{p}} + \nabla e^{ip \cdot x} a_{\mathbf{p}}^\dagger \right] \cdot \left[ \nabla e^{-ip' \cdot x} a_{\mathbf{p}'} + \nabla e^{ip' \cdot x} a_{\mathbf{p}'}^\dagger \right] \end{aligned}$$

Nós sabemos que  $e^{\pm ip \cdot x} = e^{\pm i(\omega_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}$ , então  $\nabla e^{\pm ip \cdot x} = \nabla e^{\pm i(\omega_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} = \mp i\mathbf{p} e^{\pm i(\omega_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}$ . Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} |\nabla\phi(\mathbf{x}, t)|^2 &= \frac{1}{2} \int \int \int \frac{d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{3 \cdot 2} \sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}'}}} \left[ i\mathbf{p} e^{-i(\omega_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} a_{\mathbf{p}} - i\mathbf{p} e^{i(\omega_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} a_{\mathbf{p}}^\dagger \right] \cdot \\ &\quad \left[ i\mathbf{p}' e^{-i(\omega_{\mathbf{p}'}t - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x})} a_{\mathbf{p}'} - i\mathbf{p}' e^{i(\omega_{\mathbf{p}'}t - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x})} a_{\mathbf{p}'}^\dagger \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} |\nabla\phi(\mathbf{x}, t)|^2 &= \frac{1}{2} \int \int \int \frac{d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{3 \cdot 2} \sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}'}}} \left[ i\mathbf{p} e^{-i(\omega_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} a_{\mathbf{p}} - i\mathbf{p} e^{i(\omega_{\mathbf{p}}t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} a_{\mathbf{p}}^\dagger \right] \cdot \\ &\quad \left[ i\mathbf{p}' e^{-i(\omega_{\mathbf{p}'}t - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x})} a_{\mathbf{p}'} - i\mathbf{p}' e^{i(\omega_{\mathbf{p}'}t - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{x})} a_{\mathbf{p}'}^\dagger \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} |\nabla\phi(\mathbf{x}, t)|^2 &= -\frac{1}{2} \int \int \int \frac{d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{3 \cdot 2} \sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}'}}} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}') \left[ -e^{-i(\omega_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{p}'})t} e^{i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'}^\dagger + e^{-i(\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{p}'})t} e^{i(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'} + \right. \\ &\quad \left. + e^{i(\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{p}'})t} e^{-i(\mathbf{p} + \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'}^\dagger - e^{i(\omega_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{p}'})t} e^{-i(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \cdot \mathbf{x}} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'} \right] \end{aligned}$$

Analogamente ao termo anterior, teremos uma delta de Dirac em cada termo, resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} |\nabla\phi(\mathbf{x}, t)|^2 &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} \left[ -|\mathbf{p}|^2 a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'}^\dagger - |\mathbf{p}|^2 e^{-2i\omega_{\mathbf{p}}t} a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} - |\mathbf{p}|^2 e^{2i\omega_{\mathbf{p}}t} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger - |\mathbf{p}|^2 a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} |\mathbf{p}|^2 \left[ a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}'}^\dagger + e^{-2i\omega_{\mathbf{p}}t} a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} + e^{2i\omega_{\mathbf{p}}t} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}'} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.0.4})$$

Por fim, nos resta calcular o último termo da equação 1.3.23:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mu^2 \phi(\mathbf{x}, t)^2 &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \left[ \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \mu^2 \left[ e^{-ip \cdot x} a_{\mathbf{p}} + e^{ip \cdot x} a_{\mathbf{p}}^\dagger \right] \right] \left[ \int \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}'}}} \left[ e^{-ip' \cdot x} a_{\mathbf{p}'} + e^{ip' \cdot x} a_{\mathbf{p}'}^\dagger \right] \right] \\ \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mu^2 \phi(\mathbf{x}, t)^2 &= \frac{1}{2} \int \int \int \frac{d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^{3 \cdot 2} \sqrt{\omega_{\mathbf{p}} \omega_{\mathbf{p}'}}} \mu^2 \left[ e^{-ip \cdot x} a_{\mathbf{p}} + e^{ip \cdot x} a_{\mathbf{p}}^\dagger \right] \left[ e^{-ip' \cdot x} a_{\mathbf{p}'} + e^{ip' \cdot x} a_{\mathbf{p}'}^\dagger \right] \end{aligned}$$

Seguindo os mesmos passos obtemos:

$$\frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \mu^2 \phi(\mathbf{x}, t)^2 = \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2\omega_{\mathbf{p}}} \mu^2 \left[ e^{-2i\omega_{\mathbf{p}}t} a_{\mathbf{p}} a_{-\mathbf{p}} + a_{\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}^\dagger + a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{\mathbf{p}} + e^{2i\omega_{\mathbf{p}}t} a_{\mathbf{p}}^\dagger a_{-\mathbf{p}}^\dagger \right]$$

# Apêndice C

## O operador de evolução temporal

O estudo da evolução temporal é essencial em qualquer teoria dinâmica, incluindo a Teoria Quântica de Campos (TQC). Nesta teoria, o operador de evolução temporal assume um papel fundamental, permitindo-nos calcular como o estado quântico do sistema e os operadores evoluem ao longo do tempo. Além disto, o operador de evolução temporal na representação de interação é utilizado para realizarmos alguns cálculos perturbativos. Tendo isto em vista, será necessário abordarmos a construção do operador de evolução temporal e as diferentes representações na mecânica quântica, de modo que possamos obter a série de Dyson na representação de interação. Tal série nos permitirá calcular o operador de evolução temporal de maneira perturbativa e futuramente desenvolver uma representação diagramática de seus termos a fim de simplificar os cálculos de amplitudes de espalhamento.

### C.1 O operador de evolução temporal

Suponhamos que temos um sistema o qual no instante  $t_0$  se encontra no estado  $|\psi(t_0)\rangle$ . No entanto, gostaríamos de saber este estado em outro instante de tempo  $t$ , ou seja, queremos uma transformação unitária  $U(t, t_0)$  que nos leve de  $|\psi(t_0)\rangle$  para  $|\psi(t)\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (\text{C.1.1})$$

No caso infinitesimal podemos escrever:

$$U(t + \delta t, t) |\psi(t)\rangle = |\psi(t + \delta t)\rangle \quad (\text{C.1.2})$$

$$(\text{C.1.3})$$

Assumindo que  $\delta t$  é pequeno, podemos expandir  $|\psi(t + \delta t)\rangle$  em uma série de Taylor ao redor de  $\delta t = 0$  e desprezar os termos de segunda ordem:

$$\begin{aligned} U(t + \delta t, t) |\psi(t)\rangle &= |\psi(t)\rangle + \delta t \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle \\ U(t + \delta t, t) |\psi(t)\rangle &= \left[ I + \delta t \frac{\partial}{\partial t} \right] |\psi(t)\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.1.4})$$

Nós sabemos que o hamiltoniano é o gerador das translações temporais e que sua ação em um estado é dada por:

$$H(t) |\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle \implies \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} H |\psi(t)\rangle \quad (\text{C.1.5})$$

Substituindo isto em C.1.4:

$$\begin{aligned} U(t + \delta t, t) |\psi(t)\rangle &= \left[ I - \frac{i}{\hbar} \delta t H \right] |\psi(t)\rangle \\ \implies U(t + \delta t, t) &= I - \frac{i}{\hbar} \delta t H \end{aligned} \quad (\text{C.1.6})$$

Note que este operador satisfaz a condição de ser unitário:

$$U(t + \delta t, t)U^\dagger(t + \delta t, t) = \left[ I - \frac{i}{\hbar}\delta t H \right] \left[ I + \frac{i}{\hbar}\delta t H^\dagger \right] = I + \frac{i}{\hbar}\delta t (H^\dagger - H) + \mathcal{O}(\delta t^2) \quad (\text{C.1.7})$$

Como a Hamiltoniana é um operador hermitiano e  $\mathcal{O}(\delta t^2)$  é desprezível:

$$U(t + \delta t, t)U^\dagger(t + \delta t, t) = I \quad (\text{C.1.8})$$

Além disto, ele apresenta as seguintes propriedades:

1.  $U(t_1 + \delta t_1, t_1)U(t_1 + \delta t_1 + \delta t_2, t_1 + \delta t_1) = U(t_1 + \delta t_1 + \delta t_2, t_1)$
2.  $\lim_{\delta t \rightarrow 0} U(t + \delta t, t) = I$
3.  $U^{-1}(t + \delta t, t) = U(t - \delta t, t)$

Outra propriedade sobre o operador é que ele obedece a equação de Schrodinger, uma vez que  $|\psi(t)\rangle$  também obedece:

$$H(t)|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle \quad (\text{C.1.9})$$

Utilizando que  $|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$ :

$$\begin{aligned} H(t)U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle \\ \implies H(t)U(t, t_0) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) \end{aligned} \quad (\text{C.1.10})$$

Pela definição de derivada, nós temos que  $\frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{U(t + \delta t, t_0) - U(t, t_0)}{\delta t}$ . Portanto:

$$H(t)U(t, t_0) = i\hbar \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{U(t + \delta t, t_0) - U(t, t_0)}{\delta t} \quad (\text{C.1.11})$$

Se mantivermos implicitamente que temos o limite de  $\delta t \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} H(t)U(t, t_0) &= i\hbar \frac{U(t + \delta t, t_0) - U(t, t_0)}{\delta t} \\ U(t + \delta t, t_0) &= \left[ I - \frac{i}{\hbar}\delta t H(t) \right] U(t, t_0) \end{aligned} \quad (\text{C.1.12})$$

Subtraindo  $\delta t$  em todos os instantes de tempo na equação acima, nós obtemos que:

$$U(t, t_0) = \left[ I - \frac{i}{\hbar}\delta t H(t - \delta t) \right] U(t - \delta t, t_0) \quad (\text{C.1.13})$$

Substituindo na equação C.1.12:

$$U(t + \delta t, t_0) = \left[ I - \frac{i}{\hbar}\delta t H(t) \right] \left[ I - \frac{i}{\hbar}\delta t H(t - \delta t) \right] U(t - \delta t, t_0) \quad (\text{C.1.14})$$

Podemos fazer esse procedimento recursivamente até chegarmos em  $U(t_0, t_0) = I$ :

$$\begin{aligned} U(t + \delta t, t_0) &= \left[ I - \frac{i}{\hbar}\delta t H(t) \right] \left[ I - \frac{i}{\hbar}\delta t H(t - \delta t) \right] \left[ I - \frac{i}{\hbar}\delta t H(t - 2\delta t) \right] \dots U(t_0, t_0) \\ U(t + \delta t, t_0) &= \left[ I - \frac{i}{\hbar}\delta t H(t) \right] \left[ I - \frac{i}{\hbar}\delta t H(t - \delta t) \right] \left[ I - \frac{i}{\hbar}\delta t H(t - 2\delta t) \right] \dots I \end{aligned} \quad (\text{C.1.15})$$

É importante ressaltar que estamos trabalhando com o caso mais geral possível, onde o Hamiltoniano depende do tempo e  $[H(t), H(t')] \neq 0$  para  $t \neq t'$ . Tal fato implica que ao realizarmos os produtos na

expressão acima, os termos que contam com mais de um Hamiltoniano estarão ordenados temporalmente, uma vez que o argumento temporal do operador  $H(t)$  sempre irá decrescer da esquerda para direita. Calculando os produtos e organizando por ordem em  $\delta t$ , obteremos a seguinte expressão:

$$U(t + \delta t, t_0) = I + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \left[ H(t) + H(t - \delta t) + H(t - 2\delta t) + \dots \right] \delta t + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \left[ H(t)H(t - \delta t) \right. \quad (\text{C.1.16})$$

$$\left. + H(t)H(t - 2\delta t) + \dots + H(t - \delta t)H(t - 2\delta t) + \dots \right] \delta t^2 + \dots \quad (\text{C.1.17})$$

Para cada ordem em  $\delta t$ , nós podemos escrever a soma do produto dos Hamiltonianos utilizando somatórias:

$$U(t + \delta t, t_0) = I + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \sum_{t_i=t_0}^t H(t_i) + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \sum_{t_i=t_0}^{t_i} \sum_{t'_j=t_0}^{t_i} H(t_i)H(t'_j) + \dots \quad (\text{C.1.18})$$

Aplicando o limite de  $\delta t \rightarrow 0$ , essas somas viram integrais e as variáveis  $t_i$  se tornam contínuas:

$$U(t, t_0) = I + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_{t_0}^t H(t) dt + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1)H(t_2) + \dots \quad (\text{C.1.19})$$

Esta forma do operador de evolução temporal é chamada de série de Dyson. No entanto, ainda podemos escrevê-la de uma maneira mais compacta através do uso do operador de ordenação temporal ( $T$ ), o qual atua da seguinte forma[17]:

$$\frac{1}{n!} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t dt_1 dt_2 \dots dt_n T [H(t_1)H(t_2)\dots H(t_n)] = \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t_1} \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_1 dt_2 \dots dt_n H(t_1)H(t_2)\dots H(t_n) \quad (\text{C.1.20})$$

Utilizando o operador de ordenação temporal na série de Dyson, nós podemos escrevê-la da seguinte maneira:

$$U(t, t_0) = I + \left(-\frac{i}{\hbar}\right) \int_{t_0}^t H(t) dt + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \frac{1}{2!} T \left[ \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H(t_1)H(t_2) \right] + \dots \quad (\text{C.1.21})$$

Como  $T[I] = I$  e  $T[\int H(t) dt] = \int H(t) dt$ :

$$U(t, t_0) = T \left[ e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t')} \right] \quad (\text{C.1.22})$$

Esta é a solução geral para o nosso operador de evolução em uma forma mais compacta e nos referiremos a ela como fórmula de Dyson. A partir da solução geral, podemos extrair alguns casos especiais, como por exemplo o operador de evolução temporal  $U_0(t, t_0)$  de um sistema cuja hamiltoniana  $H_0$  não depende do tempo:

$$U_0(t, t_0) = T \left[ e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 \int_{t_0}^t dt'} \right]$$

$$U_0(t, t_0) = T \left[ e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 (t-t_0)} \right] = e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 (t-t_0)}$$

Apesar de termos encontrado uma expressão geral para o operador de evolução temporal, é complicado calculá-lo quando temos um sistema com interações. Neste caso, iremos abordar o problema do ponto de vista da representação de interação da Mecânica Quântica, a qual discutiremos na próxima seção.

## C.2 As representações na Mecânica Quântica

Nesta seção iremos discutir brevemente as representações de Schrodinger e de Heisenberg da Mecânica Quântica, de modo que possamos introduzir a representação de interação. Tal representação é interessante porque ela simplifica a dependência temporal dos operadores, pois, como veremos mais adiante, eles

evoluem temporalmente segundo a parte livre da Hamiltoniana. Consequentemente, a representação de interação nos permite utilizar a expressão dos campos livres que derivamos anteriormente apesar de estarmos considerando um sistema que conta com interações. Além disto, a representação de interação será útil para desenvolvermos alguns conceitos de teoria de espalhamento na próxima seção.

Segundo a abordagem de Schrodinger, os estados dependem do tempo e evoluem segundo  $|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$ , enquanto que os operadores são independentes do tempo. O valor médio de um observável  $A$  na representação de Schrodinger é escrito como:

$$\begin{aligned} a_S(t) &= \langle \psi(t) | A | \psi(t) \rangle \\ a_S(t) &= \langle \psi(t_0) | U^\dagger(t, t_0) A U(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.2.1})$$

onde o operador de evolução temporal age diretamente sobre os estados. Na representação de Heisenberg, são os operadores que dependem do tempo e não os estados, ou seja, a evolução temporal é aplicada nos operadores, de modo que  $A(t) = U^\dagger(t, t_0) A(t_0) U(t, t_0)$ . Assim, o valor médio na visão de Heisenberg é escrito como:

$$\begin{aligned} a_H(t) &= \langle \psi | A(t) | \psi \rangle \\ a_H(t) &= \langle \psi | U^\dagger(t, t_0) A(t_0) U(t, t_0) | \psi \rangle \end{aligned} \quad (\text{C.2.2})$$

Seja  $t_0$  o instante inicial, então temos que  $|\psi(t_0)\rangle \equiv |\psi\rangle$  e  $A(t_0) \equiv A$ . Logo:

$$a(t) \equiv a_S(t) = \langle \psi(t_0) | U^\dagger(t, t_0) A(t_0) U(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle = a_H(t) \quad (\text{C.2.3})$$

Este resultado nos mostra que os valores médios de um observável é o mesmo em ambas as representações. Tal fato acontece pois a representação de Schrodinger é equivalente à de Heisenberg, visto que a diferença entre elas consiste apenas na interpretação de quem está evoluindo no tempo.

A representação de interação mistura conceitos da de Schrodinger e Heisenberg para construir um formalismo que facilite a solução de sistemas onde conseguimos separar a hamiltoniana escrevendo-a da seguinte maneira:

$$H = H_0 + H_I \quad (\text{C.2.4})$$

onde  $H_0$  é a hamiltoniana que contém a parte livre do sistema e  $H_I$  é a que contém a parte de interação. Além disto,  $H_0$  é independente do tempo e possui solução exata, enquanto que  $H_I$  pode depender do tempo e não sabemos resolvê-la de maneira exata. Na representação de interação, nós iremos definir que os operadores evoluem temporalmente como se só houvesse a hamiltoniana  $H_0$  e estivéssemos na representação de Heisenberg:

$$A_I(t) = U_0^\dagger(t, t_0) A(t_0) U_0(t, t_0) \quad (\text{C.2.5})$$

onde  $U_0(t, t_0)$  é o operador de evolução temporal associado a  $H_0$ . Os estados, assim como na representação de Schrodinger, também evoluirão no tempo, porém da seguinte forma:

$$|\psi_I(t)\rangle = U_I(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle = U_0^\dagger(t, t_0) U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (\text{C.2.6})$$

Note que se calcularmos o valor médio na representação de interação e utilizarmos essas definições, nós obteremos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} a(t)_I &= \langle \psi_I(t) | A_I(t) | \psi_I(t) \rangle \\ a(t)_I &= \langle \psi(t_0) | U^\dagger(t, t_0) U_0(t, t_0) U_0^\dagger(t, t_0) A(t_0) U_0(t, t_0) U_0^\dagger(t, t_0) U(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle = a(t)_S \end{aligned}$$

Portanto, vemos que a representação de interação é equivalente as de Schrodinger e Heisenberg. Para encontrarmos uma expressão para o operador de evolução temporal  $U_I(t, t_0) \equiv U_0^\dagger(t, t_0) U(t, t_0)$ , vamos voltar a definição da evolução temporal dos estados na representação de interação e fazer apenas uma evolução infinitesimal  $t_0 \rightarrow t_0 + \delta t$ :

$$|\psi_I(t_0 + \delta t)\rangle = U_0^\dagger(t_0 + \delta t, t_0) U(t_0 + \delta t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (\text{C.2.7})$$

Na seção anterior, nós vimos que infinitesimalmente, um operador de evolução temporal pode ser escrito como  $U(t_0 + \delta t, t_0) = I - \frac{i}{\hbar} \delta t H(t_0)$ . Portanto:

$$|\psi_I(t_0 + \delta t)\rangle = \left[ I + \frac{i}{\hbar} \delta t H_0 \right] \left[ I - \frac{i}{\hbar} \delta t H(t_0) \right] |\psi(t_0)\rangle \quad (\text{C.2.8})$$

Mantendo apenas os termos de primeira ordem e utilizando que  $H(t_0) = H_0 + H_I(t_0)$ :

$$\begin{aligned} |\psi_I(t_0 + \delta t)\rangle &= \left[ I + \frac{i}{\hbar} \delta t H_0 - \frac{i}{\hbar} \delta t H(t_0) \right] |\psi(t_0)\rangle \\ |\psi_I(t_0 + \delta t)\rangle &= \left[ I - \frac{i}{\hbar} \delta t H_I(t_0) \right] |\psi(t_0)\rangle \\ \frac{|\psi_I(t_0 + \delta t)\rangle - |\psi(t_0)\rangle}{\delta t} &= -\frac{i}{\hbar} H_I(t_0) |\psi(t_0)\rangle \end{aligned}$$

Como  $t_0$  é o instante inicial, nós temos que  $|\psi_I(t_0)\rangle = |\psi(t_0)\rangle$ . Logo:

$$\frac{|\psi_I(t_0 + \delta t)\rangle - |\psi_I(t_0)\rangle}{\delta t} = -\frac{i}{\hbar} H_I(t_0) |\psi_I(t_0)\rangle \quad (\text{C.2.9})$$

Aplicando o limite de  $\delta t \rightarrow 0$ , o lado esquerdo da equação acima corresponde a definição de uma derivada em  $t = t_0$ . Portanto:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} |\psi_I(t)\rangle \right|_{t=t_0} = -\frac{i}{\hbar} H_I(t) |\psi_I(t)\rangle \Big|_{t=t_0} \implies H_I(t) |\psi_I(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_I(t)\rangle \quad (\text{C.2.10})$$

Utilizando que  $|\psi_I(t)\rangle = U_I(t, t_0) |\psi_I(t_0)\rangle$ :

$$H_I(t) U_I(t, t_0) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_I(t, t_0) \quad (\text{C.2.11})$$

Na seção anterior, nós vimos que a solução mais geral de um operador de evolução temporal que obedece a equação de Schrodinger é a fórmula de Dyson, ou seja:

$$U_I(t, t_0) = T \left[ e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H_I(t')} \right] \quad (\text{C.2.12})$$

Esta é a expressão do operador de evolução temporal na representação de interação.

## Apêndice D

# Cálculo da relação entre seção de choque e amplitude de espalhamento

Na seção 4.2, nós vimos que a seção de choque e a amplitude de espalhamento são relacionadas pela seguinte expressão:

$$d\sigma = \int d^2b \left( \prod_{f=1}^n \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \right) \left( \prod_{j=\mathcal{A},\mathcal{B}} \int \int \frac{d^3\mathbf{k}_j}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_j}} \frac{d^3\mathbf{k}'_j}{(2\pi)^3 \sqrt{2E'_j}} \phi_j(\mathbf{k}_j) \phi_j^*(\mathbf{k}'_j) \right) e^{i(\mathbf{k}'_{\mathcal{B}} - \mathbf{k}_{\mathcal{B}}) \cdot \mathbf{b}}$$

$$(2\pi)^8 \delta^{(4)} \left( k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum_{f=1}^n p_f \right) \delta^{(4)} \left( k'_{\mathcal{A}} + k'_{\mathcal{B}} - \sum_{f=1}^n p_f \right) |\mathcal{M}(k_{\mathcal{A}}, k_{\mathcal{B}} \rightarrow p_f)|^2 \quad (\text{D.0.1})$$

Para simplificarmos esta expressão, iremos calcular as integrais presentes nela.

Assumindo que a probabilidade ( $\mathcal{P}(\mathbf{b})$ ) de interação entre os pacotes  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  decai suficientemente rápido com o aumento do parâmetro de impacto, podemos a integral em  $d^2b$  pode ser calculada de  $-\infty$  até  $+\infty$ . Além disto, como parâmetro de impacto pertence ao plano ortogonal a direção  $k^z$ , então nós temos que:

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2b e^{i(\mathbf{k}'_{\mathcal{B}} - \mathbf{k}_{\mathcal{B}}) \cdot \mathbf{b}} = \delta^{(2)}(\mathbf{k}_{\mathcal{B}}^{\perp} - \mathbf{k}'_{\mathcal{B}}^{\perp}) \quad (\text{D.0.2})$$

onde o índice  $\perp$  indica que o momento pertence ao plano perpendicular a direção  $k^z$ . Substituindo na expressão de  $d\sigma$ :

$$d\sigma = \left( \prod_{f=1}^n \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \right) \left( \prod_{j=\mathcal{A},\mathcal{B}} \int \int \frac{d^3\mathbf{k}_j}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_j}} \frac{d^3\mathbf{k}'_j}{(2\pi)^3 \sqrt{2E'_j}} \phi_j(\mathbf{k}_j) \phi_j^*(\mathbf{k}'_j) \right) \delta^{(2)}(\mathbf{k}_{\mathcal{B}}^{\perp} - \mathbf{k}'_{\mathcal{B}}^{\perp})$$

$$(2\pi)^{10} \delta^{(4)} \left( k_{\mathcal{A}} + k_{\mathcal{B}} - \sum_{f=1}^n p_f \right) \delta^{(4)} \left( k'_{\mathcal{A}} + k'_{\mathcal{B}} - \sum_{f=1}^n p_f \right) |\mathcal{M}(k_{\mathcal{A}}, k_{\mathcal{B}} \rightarrow p_f)|^2 \quad (\text{D.0.3})$$

Note que, ao integrarmos o termo  $\delta^{(2)}(\mathbf{k}_{\mathcal{B}}^{\perp} - \mathbf{k}'_{\mathcal{B}}^{\perp})$  em  $d^2k'_{\mathcal{A}}^{\perp}$  e  $d^2k'_{\mathcal{B}}^{\perp}$ , nós obteremos trivialmente que  $k'_{\mathcal{A}}^{\perp} = k_{\mathcal{A}}^{\perp}$ . Consequentemente, nos resta apenas as integrais em  $dk'_{\mathcal{A}}^z$  e  $dk'_{\mathcal{B}}^z$ :

$$\int \int d^3\mathbf{k}'_{\mathcal{A}} d^3\mathbf{k}'_{\mathcal{B}} \delta^{(4)} \left( k'_{\mathcal{A}} + k'_{\mathcal{B}} - \sum_{f=1}^n p_f \right) \delta^{(2)}(\mathbf{k}_{\mathcal{B}}^{\perp} - \mathbf{k}'_{\mathcal{B}}^{\perp}) = \int \int dk'_{\mathcal{A}}^z dk'_{\mathcal{B}}^z \delta \left( k'_{\mathcal{A}}^z + k'_{\mathcal{B}}^z - \sum_{f=1}^n p_f^z \right) \delta(E'_{\mathcal{A}} + E'_{\mathcal{B}} - \sum_{f=1}^n E_f)$$

$$\int \int d^3\mathbf{k}'_{\mathcal{A}} d^3\mathbf{k}'_{\mathcal{B}} \delta^{(4)} \left( k'_{\mathcal{A}} + k'_{\mathcal{B}} - \sum_{f=1}^n p_f \right) \delta^{(2)}(\mathbf{k}_{\mathcal{B}}^{\perp} - \mathbf{k}'_{\mathcal{B}}^{\perp}) = \int dk'_{\mathcal{A}}^z \delta(E'_{\mathcal{A}} + E'_{\mathcal{B}} - \sum_{f=1}^n E_f) \Big|_{k_{\mathcal{A}}^z = \sum_{f=1}^n p_f^z - k'_{\mathcal{B}}^z} \quad (\text{D.0.4})$$

Utilizando que  $\int dx \delta(f(x)) = \frac{1}{\left| \frac{df(x_i)}{dx} \right|}$ , onde  $f(x_i) = 0$ :

$$\int \int d^3\mathbf{k}'_A d^3\mathbf{k}'_B \delta^{(4)} \left( k'_A + k'_B - \sum_{f=1}^n p_f \right) \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_B - \mathbf{k}'_A) = \left| \frac{\partial}{\partial k'^z_A} \left( E'_A + E'_B - \sum_{f=1}^n E_f \right) \right|^{-1}_{k'^z_B = \sum_{f=1}^n p_f - k'^z_A}$$

$$\int \int d^3\mathbf{k}'_A d^3\mathbf{k}'_B \delta^{(4)} \left( k'_A + k'_B - \sum_{f=1}^n p_f \right) \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_B - \mathbf{k}'_A) = \left| \frac{\partial E'_A}{\partial k'^z_A} + \frac{\partial E'_B}{\partial k'^z_A} \right|^{-1}_{k'^z_B = \sum_{f=1}^n p_f - k'^z_A} \quad (\text{D.0.5})$$

Como  $E'_j = \sqrt{k'^2_j + m_j^2}$  e  $k'^z_B = \sum_{f=1}^n p_f - k'^z_A$ , então nós temos que  $\frac{\partial E'_A}{\partial k'^z_A} = \frac{k'^z_A}{\sqrt{k'^2_A + m_A^2}} = \frac{k'^z_A}{E'_A}$  e  $\frac{\partial E'_B}{\partial k'^z_A} = -\frac{\partial E'_B}{\partial k'^z_B} = -\frac{k'^z_B}{E'_B}$ . Portanto:

$$\int \int d^3\mathbf{k}'_A d^3\mathbf{k}'_B \delta^{(4)} \left( k'_A + k'_B - \sum_{f=1}^n p_f \right) \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_B - \mathbf{k}'_A) = \left| \frac{k'^z_A}{E'_A} - \frac{k'^z_B}{E'_B} \right|^{-1} \quad (\text{D.0.6})$$

Nós sabemos que  $v_j^z = \frac{k_j^z}{E_j}$ . Logo:

$$\int \int d^3\mathbf{k}'_A d^3\mathbf{k}'_B \delta^{(4)} \left( k'_A + k'_B - \sum_{f=1}^n p_f \right) \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_B - \mathbf{k}'_A) = \frac{1}{|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \quad (\text{D.0.7})$$

Como nossos pacotes de ondas iniciais possuem apenas momento linear na direção do eixo z, este resultado pode ser generalizado para:

$$\int \int d^3\mathbf{k}'_A d^3\mathbf{k}'_B \delta^{(4)} \left( k'_A + k'_B - \sum_{f=1}^n p_f \right) \delta^{(2)}(\mathbf{k}'_B - \mathbf{k}'_A) = \frac{1}{|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \quad (\text{D.0.8})$$

Substituindo este resultado na expressão da seção de choque diferencial (equação D.0.3):

$$d\sigma = \left( \prod_{f=1}^n \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \right) \int \int \frac{d^3\mathbf{k}_A}{(2\pi)^3 2E_A} \frac{d^3\mathbf{k}_B}{(2\pi)^3 2E_B} \frac{|\phi_A(\mathbf{k}_A)|^2 |\phi_B(\mathbf{k}_B)|^2}{|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( k_A + k_B - \sum_{f=1}^n p_f \right) |\mathcal{M}(k_A, k_B \rightarrow p_f)|^2 \quad (\text{D.0.9})$$

No espaço de momentos, os pacotes de onda  $\phi_A$  e  $\phi_B$  que caracterizam o estado inicial, são construídos de modo que suas funções de onda apresentem um pico estreito centrado em  $\mathbf{p}_A$  e  $\mathbf{p}_B$ , respectivamente. Deste modo, todas as funções suaves de  $\mathbf{k}_A$  e  $\mathbf{k}_B$  podem ser aproximadas por seu valor em  $\mathbf{p}_A$  e  $\mathbf{p}_B$ .

$$d\sigma = \left( \prod_{f=1}^n \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \right) \frac{(2\pi)^4 |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow p_f)|^2}{4E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int \int \frac{d^3\mathbf{k}_A}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{k}_B}{(2\pi)^3} |\phi_A(\mathbf{k}_A)|^2 |\phi_B(\mathbf{k}_B)|^2 \delta^{(4)} \left( k_A + k_B - \sum_{f=1}^n p_f \right) \quad (\text{D.0.10})$$

Apesar de a delta de Dirac não ser uma função suave,  $k_A + k_B$  pode ser aproximado para o seu valor central  $p_A + p_B$ , de modo que  $\delta^{(4)} \left( k_A + k_B - \sum_{f=1}^n p_f \right) \approx \delta^{(4)} \left( p_A + p_B - \sum_{f=1}^n p_f \right)$ . Consequentemente:

$$d\sigma = \left( \prod_{f=1}^n \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \right) \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_A + p_B - \sum_{f=1}^n p_f \right) |\mathcal{M}(p_A, p_B \rightarrow p_f)|^2}{4E_A E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} \int \int \frac{d^3\mathbf{k}_A}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{k}_B}{(2\pi)^3} |\phi_A(\mathbf{k}_A)|^2 |\phi_B(\mathbf{k}_B)|^2 \quad (\text{D.0.11})$$

Utilizando que  $\langle \phi_A \phi_B | \phi_A \phi_B \rangle = \int \int \frac{d^3\mathbf{k}_A}{(2\pi)^3} \frac{d^3\mathbf{k}_B}{(2\pi)^3} |\phi_A(\mathbf{k}_A)|^2 |\phi_B(\mathbf{k}_B)|^2 = 1$ :

$$d\sigma = \left( \prod_{f=1}^n \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{f=1}^n p_f \right) \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} |\mathcal{M}(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}} \rightarrow p_f)|^2 \quad (\text{D.0.12})$$

$$d\sigma = d\Pi_n \frac{1}{4E_{\mathcal{A}} E_{\mathcal{B}} |\mathbf{v}_{\mathcal{A}} - \mathbf{v}_{\mathcal{B}}|} |\mathcal{M}(p_{\mathcal{A}}, p_{\mathcal{B}} \rightarrow p_f)|^2 \quad (\text{D.0.13})$$

Onde:

$$d\Pi_n = \left( \prod_{f=1}^n \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_{\mathcal{A}} + p_{\mathcal{B}} - \sum_{f=1}^n p_f \right) \quad (\text{D.0.14})$$

é chamado de diferencial de espaço de fase invariante de Lorentz.

### D.0.1 O caso de $n = 2$

Para compreendermos melhor o diferencial de espaço de fase invariante de Lorentz, vamos calculá-lo para o caso em que duas partículas de quadrimomentos  $p_1$  e  $p_2$  são espalhadas em outras duas, de quadrimomentos  $p_3$  e  $p_4$ , ou seja:

$$p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4 \quad (\text{D.0.15})$$

Neste caso, a expressão de  $d\Pi_2$  é:

$$d\Pi_2 = \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} (2\pi)^4 \delta^{(4)} (p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \quad (\text{D.0.16})$$

A delta de Dirac pode ser reescrita como  $\delta^{(4)} (p_1 + p_2 - p_3 - p_4) = \delta^{(3)} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \delta (E_1 + E_2 - E_3 - E_4)$ . Portanto:

$$d\Pi_2 = \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} (2\pi)^4 \delta^{(3)} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \delta (E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \quad (\text{D.0.17})$$

A fim de simplificarmos a expressão podemos ir para o referencial do centro de massa, onde  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$  e  $E_1 + E_2 = E_{CM}$ . Deste modo:

$$\begin{aligned} d\Pi_2 &= \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4} (2\pi)^4 \delta^{(3)} (-\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \delta (E_{CM} - E_3 - E_4) \\ d\Pi_2 &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{E_3} \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{E_4} \delta^{(3)} (\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) \delta (E_3 + E_4 - E_{CM}) \end{aligned} \quad (\text{D.0.18})$$

Agora podemos integrar em  $d^3 \mathbf{p}_4$ :

$$d\Pi_2 = \frac{1}{16\pi^2} \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{E_3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{E_4} \delta^{(3)} (\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4) \delta (E_3 + E_4 - E_{CM}) \quad (\text{D.0.19})$$

A integral do termo  $\delta^{(3)} (\mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4)$  nos garante que o momento total é conservado, uma vez que  $\mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4$ . Logo:

$$d\Pi_2 = \frac{1}{16\pi^2} \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{E_3 E_4} \delta (E_3 + E_4 - E_{CM}) \quad (\text{D.0.20})$$

Em coordenadas esféricas,  $d^3 \mathbf{p}_3 = p_f^2 dp_f d\Omega$ , onde  $p_f = |\mathbf{p}_3| = |\mathbf{p}_4|$ . Substituindo isto e integrando em  $dp_f$ :

$$d\Pi_2 = \frac{1}{16\pi^2} d\Omega \int \frac{dp_f}{E_3 E_4} p_f^2 \delta (E_3 + E_4 - E_{CM}) \quad (\text{D.0.21})$$

Fazendo a mudança de variável  $x = E_3 + E_4 - E_{CM}$ , o diferencial  $dx$  pode ser escrito como:

$$dx = \frac{dx}{dp_f} dp_f = dp_f \frac{d}{dp_f} (E_3 + E_4 - E_{CM}) = dp_f \left( \frac{dE_3}{dp_f} + \frac{dE_4}{dp_f} \right) \quad (\text{D.0.22})$$

Utilizando que  $E_3 = \sqrt{p_f^2 + m_3^2}$  e  $E_4 = \sqrt{p_f^2 + m_4^2}$ :

$$\begin{aligned} dx &= dp_f \left( \frac{p_f}{E_3} + \frac{p_f}{E_4} \right) = dp_f p_f \frac{(E_3 + E_4)}{E_3 E_4} \\ \implies dp_f &= dx \frac{E_3 E_4}{p_f (E_3 + E_4)} \end{aligned} \quad (\text{D.0.23})$$

Substituindo a mudança de variável na integral:

$$d\Pi_2 = \frac{1}{16\pi^2} d\Omega \int_{m_3+m_4-E_{CM}}^{+\infty} \frac{dx}{E_3 + E_4} p_f \delta(x) \quad (\text{D.0.24})$$

Por conservação de energia,  $E_3 + E_4 = E_1 + E_2 = E_{CM}$ . Logo:

$$d\Pi_2 = \frac{1}{16\pi^2} d\Omega \frac{p_f}{E_{CM}} \int_{m_3+m_4-E_{CM}}^{+\infty} \frac{dx}{\delta}(x) \quad (\text{D.0.25})$$

Utilizando que  $\int_{m_3+m_4-E_{CM}}^{+\infty} \frac{dx}{\delta}(x) = \Theta(x) \Big|_{m_3+m_4-E_{CM}}^{+\infty}$ , onde  $\Theta(x)$  é a função degrau de Heaviside:

$$\begin{aligned} d\Pi_2 &= \frac{1}{16\pi^2} d\Omega \frac{p_f}{E_{CM}} \Theta(x) \Big|_{m_3+m_4-E_{CM}}^{+\infty} \\ d\Pi_2 &= \frac{1}{16\pi^2} d\Omega \frac{p_f}{E_{CM}} (\Theta(+\infty) - \Theta(m_3 + m_4 - E_{CM})) \\ d\Pi_2 &= \frac{1}{16\pi^2} d\Omega \frac{p_f}{E_{CM}} (\Theta(+\infty) - \Theta(-(E_{CM} - m_3 - m_4))) \end{aligned} \quad (\text{D.0.26})$$

Como  $\Theta(+\infty) = 1$  e  $\Theta(-(E_{CM} - m_3 - m_4)) = 1 - \Theta(E_{CM} - m_3 - m_4)$ , então:

$$\begin{aligned} d\Pi_2 &= \frac{1}{16\pi^2} d\Omega \frac{p_f}{E_{CM}} (1 - 1 + \Theta(E_{CM} - m_3 - m_4)) \\ d\Pi_2 &= d\Omega \frac{1}{16\pi^2} \frac{p_f}{E_{CM}} \Theta(E_{CM} - m_3 - m_4) \end{aligned} \quad (\text{D.0.27})$$

Este é o diferencial de espaço de fase invariante de Lorentz para o espalhamento  $2 \rightarrow 2$ . Para calcularmos sua seção de choque infinitesimal, basta substituírmos este resultado na equação 4.2.16:

$$\begin{aligned} d\sigma_{CM} &= d\Omega \frac{1}{16\pi^2} \frac{p_f}{E_{CM}} \Theta(E_{CM} - m_3 - m_4) \frac{1}{4E_1 E_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} |\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4)|^2 \\ \implies \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{CM} &= \frac{1}{16\pi^2} \frac{p_f}{E_{CM}} \frac{1}{4E_1 E_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|} |\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4)|^2 \Theta(E_{CM} - m_3 - m_4) \end{aligned} \quad (\text{D.0.28})$$

Nós vimos anteriormente que a velocidade relativa  $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$  pode ser escrita como:

$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| = \left| \frac{\mathbf{p}_1}{E_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{E_2} \right| \quad (\text{D.0.29})$$

Utilizando que  $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$  e  $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| \equiv p_0$ :

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| &= |\mathbf{p}_1| \left| \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right| \\ |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| &= p_0 \left| \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \right| \\ |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| &= p_0 \left| \frac{E_{CM}}{E_1 E_2} \right| \\ |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| &= p_0 \frac{E_{CM}}{E_1 E_2} \end{aligned} \quad (\text{D.0.30})$$

Substituindo este resultado na expressão da seção de choque infinitesimal:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{p_f}{p_0 E_{CM}^2} |\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4)|^2 \Theta(E_{CM} - m_3 - m_4) \quad (\text{D.0.31})$$

Essa é a seção de choque infinitesimal de um espalhamento  $2 \rightarrow 2$  no referencial do centro de massa. Para o caso em que todas as partículas tenham a mesma massa  $m$ , a conservação de energia nos diz que:

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4 \implies 2\sqrt{p_0^2 + m^2} = 2\sqrt{p_f^2 + m^2} \implies p_0 = p_f \quad (\text{D.0.32})$$

Portanto, neste caso a seção de choque infinitesimal calculada no centro de massa se torna:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{1}{E_{CM}^2} |\mathcal{M}(p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4)|^2 \Theta(E_{CM} - m_3 - m_4) \quad (\text{D.0.33})$$

## Apêndice E

# A identidade algébrica associada a fórmula de redução de LSZ

No capítulo 4, utilizamos a seguinte identidade para derivarmos a fórmula de redução de LSZ:

$$i \int d^4x e^{ip_\mu x^\mu} (\square + m^2) \phi(x) = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} [a_{\mathbf{p}}(+\infty) - a_{\mathbf{p}}(-\infty)] \quad (\text{E.0.1})$$

A fim de demonstrarmos esta identidade, iremos calcular o seu lado esquerdo da equação acima. Note que  $\square + m^2 = \partial_0^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 = \partial_0^2 + \omega_{\mathbf{p}}^2$ . Logo:

$$i \int d^4x e^{ip_\mu x^\mu} (\square + m^2) \phi(x) = \int d^4x i e^{ip_\mu x^\mu} (\partial_0^2 + \omega_{\mathbf{p}}^2) \phi(x) \quad (\text{E.0.2})$$

Além disto, temos que:

$$i e^{ip_\mu x^\mu} (\partial_0^2 + \omega_{\mathbf{p}}^2) \phi(x) = \left[ e^{ip_\mu x^\mu} (i\partial_0^2 + \omega_{\mathbf{p}} \partial_0) + i\omega_{\mathbf{p}} e^{ip_\mu x^\nu} (i\partial_0 + \omega_{\mathbf{p}}) \right] = \partial_0 \left[ e^{ip_\mu x^\mu} (i\partial_0 + \omega_{\mathbf{p}}) \phi(x) \right] \quad (\text{E.0.3})$$

Deste modo:

$$i \int d^4x e^{ip_\mu x^\mu} (\square + m^2) \phi(x) = \int d^4x \partial_0 \left[ e^{ip_\mu x^\mu} (i\partial_0 + \omega_{\mathbf{p}}) \phi(x) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} dx^0 \partial_0 \left[ e^{i\omega_{\mathbf{p}} x^0} \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} (i\partial_0 + \omega_{\mathbf{p}}) \phi(x) \right] \quad (\text{E.0.4})$$

Observe que na integral temporal, o integrando consiste em uma derivada total no tempo, o que implica que o resultado só dependerá do campo nos limites de integração ( $x^0 = \pm\infty$ ). Para continuar o cálculo, usaremos a expressão do campo escalar, conforme discutido no capítulo 1:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[ a_{\mathbf{k}}(x^0) e^{-ik^\mu x_\mu} + a_{\mathbf{k}}^\dagger(x^0) e^{ik^\mu x_\mu} \right] \quad (\text{E.0.5})$$

Substituindo este resultado na equação E.0.4, a integral sobre as coordenadas espaciais se torna:

$$\int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} (i\partial_0 + \omega_{\mathbf{p}}) \phi(x) = \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} (i\partial_0 + \omega_{\mathbf{p}}) \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left[ a_{\mathbf{k}}(x^0) e^{-ik^\mu x_\mu} + a_{\mathbf{k}}^\dagger(x^0) e^{ik^\mu x_\mu} \right] \quad (\text{E.0.6})$$

Como comentamos anteriormente, a região relevante para a integral E.0.4 é  $x^0 = \pm\infty$  e nesta região os campos são aproximadamente livres, de modo que  $\partial_0 a_{\mathbf{p}}(x_0) = 0$ . Logo:

$$\begin{aligned} \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} (i\partial_0 + \omega_{\mathbf{p}}) \phi(x) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \left[ \left( \frac{\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{p}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \right) a_{\mathbf{k}}(x^0) e^{-ik^\mu x_\mu} + \left( \frac{\omega_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \right) a_{\mathbf{k}}^\dagger(x^0) e^{ik^\mu x_\mu} \right] \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[ \left( \frac{\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{p}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \right) a_{\mathbf{k}}(x^0) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} x^0} \int d^3x e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\omega_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \right) a_{\mathbf{k}}^\dagger(x^0) e^{i\omega_{\mathbf{k}} x^0} \int d^3x e^{-i(\mathbf{p}+\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \right] \quad (\text{E.0.7}) \end{aligned}$$

Utilizando que  $\int d^3x e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{k})$ :

$$\begin{aligned} \int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} (i\partial_0 + \omega_{\mathbf{p}}) \phi(x) &= \int d^3\mathbf{k} \left[ \delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{k}) \left( \frac{\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{p}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \right) a_{\mathbf{k}}(x^0) e^{-i\omega_{\mathbf{k}}x^0} + \delta^3(\mathbf{p}+\mathbf{k}) \left( \frac{\omega_{\mathbf{p}} - \omega_{\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \right) a_{\mathbf{k}}^\dagger(x^0) e^{i\omega_{\mathbf{k}}x^0} \right] \\ &= \left( \frac{\omega_{\mathbf{p}} + \omega_{\mathbf{p}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \right) a_{\mathbf{p}}(x^0) e^{-i\omega_{\mathbf{p}}x^0} + \left( \frac{\omega_{\mathbf{p}} - \omega_{-\mathbf{p}}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}}} \right) a_{\mathbf{p}}^\dagger(x^0) e^{i\omega_{\mathbf{p}}x^0} \end{aligned} \quad (\text{E.0.8})$$

Como  $\omega_{-\mathbf{p}} = \omega_{\mathbf{p}}$ :

$$\int d^3x e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} (i\partial_0 + \omega_{\mathbf{p}}) \phi(x) = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}(x^0) e^{-i\omega_{\mathbf{p}}x^0} \quad (\text{E.0.9})$$

Substituindo este resultado na equação E.0.4:

$$i \int d^4x e^{ip_\mu x^\mu} (\square + m^2) \phi(x) = \int d^4x \partial_0 \left[ e^{ip^\mu x_\mu} (i\partial_0 + \omega_{\mathbf{p}}) \phi(x) \right] = \sqrt{2\omega_{\mathbf{p}}} [a_{\mathbf{p}}(+\infty) - a_{\mathbf{p}}(-\infty)] \quad (\text{E.0.10})$$

Como queríamos demonstrar.

## Apêndice F

# Derivação de algumas regras de Feynman

### F.1 O propagador de Feynman do campo escalar

No capítulo 5, definimos o propagador de Feynman do campo escalar como:

$$D_{ij} \equiv \overbrace{\langle 0 | \phi_0(x_1) \phi_0(x_2) | 0 \rangle} = \begin{cases} \langle 0 | [\phi_0^{(+)}(x_1), \phi_0^{(-)}(x_2)] | 0 \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 (2\omega_{\mathbf{p}})} e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)}, & \text{se } x_1^0 > x_2^0 \\ \langle 0 | [\phi_0^{(+)}(x_2), \phi_0^{(-)}(x_1)] | 0 \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 (2\omega_{\mathbf{p}})} e^{-ip \cdot (x_2 - x_1)}, & \text{se } x_2^0 > x_1^0 \end{cases} \quad (\text{F.1.1})$$

Com o auxílio da função degrau de Heaviside:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (\text{F.1.2})$$

a definição do propagador pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 (2\omega_{\mathbf{p}})} \left[ e^{-ip \cdot (x_1 - x_2)} \Theta(x_1^0 - x_2^0) + e^{-ip \cdot (x_2 - x_1)} \Theta(x_2^0 - x_1^0) \right] \\ &= \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 (2\omega_{\mathbf{p}})} \left[ e^{-i\omega_{\mathbf{p}}(x_1^0 - x_2^0)} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \Theta(x_1^0 - x_2^0) + e^{-i\omega_{\mathbf{p}}(x_2^0 - x_1^0)} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \Theta(x_2^0 - x_1^0) \right] \end{aligned} \quad (\text{F.1.3})$$

Como  $\omega_{\mathbf{p}} = \omega_{-\mathbf{p}}$  e estamos integrando sobre todo o espaço, a integral é simétrica e conseqüentemente é a mesma se feita sobre  $d^3 \mathbf{p}$  ou  $-d^3 \mathbf{p}$ , o que implica que podemos trocar  $-\mathbf{p}$  por  $\mathbf{p}$  no primeiro termo da integral. Portanto:

$$D_{ij} = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3 (2\omega_{\mathbf{p}})} e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} \left[ e^{-i\omega_{\mathbf{p}}(x_1^0 - x_2^0)} \Theta(x_1^0 - x_2^0) + e^{i\omega_{\mathbf{p}}(x_1^0 - x_2^0)} \Theta(x_2^0 - x_1^0) \right] \quad (\text{F.1.4})$$

Para simplificarmos esta expressão, utilizaremos a seguinte identidade[19]:

$$e^{-i\omega_{\mathbf{p}}(x_1^0 - x_2^0)} \Theta(x_1^0 - x_2^0) + e^{i\omega_{\mathbf{p}}(x_1^0 - x_2^0)} \Theta(x_2^0 - x_1^0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-2\omega_{\mathbf{p}}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 \frac{e^{ip^0(x_1^0 - x_2^0)}}{(p^0)^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2 + i\varepsilon} \quad (\text{F.1.5})$$

Substituindo em F.1.4:

$$D_{ij} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} dp^0 e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)} e^{ip^0(x_1^0 - x_2^0)} \frac{i}{(p^0)^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2 + i\varepsilon} \quad (\text{F.1.6})$$

Utilizando que  $(p^0)^2 - \omega_{\mathbf{p}}^2 = p^2 - m^2$ :

$$D_{ij} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{ip \cdot (x_1 - x_2)} \quad (\text{F.1.7})$$

## F.2 O propagador de Feynman de Férmons

O propagador de Feynman dos férmions é definido como[17]:

$$S_F(x-y) \equiv \overline{\psi(x)\psi(y)} = \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle = \begin{cases} \langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle, & x_0 > y_0 \\ -\langle 0|\bar{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle, & y_0 > x_0 \end{cases} \quad (\text{F.2.1})$$

Vamos calcular o caso  $x_0 > y_0$  utilizando as expressões do campo de Dirac quantizados (equações 2.5.2 e 2.5.3):

$$S_F(x-y) = \sum_{s=r=1}^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}} \langle 0| \left[ b_{\mathbf{p}}^s u^s(p) e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} + d_{\mathbf{p}}^{s\dagger} v^s(p) e^{ip_{\mu}x^{\mu}} \right] \left[ b_{\mathbf{p}'}^r \dagger u^{r\dagger}(p') e^{ip'_{\mu}x^{\mu}} + d_{\mathbf{p}'}^r v^{r\dagger}(p') e^{-ip'_{\mu}x^{\mu}} \right] |0\rangle \quad (\text{F.2.2})$$

Utilizando que  $d_{\mathbf{p}'}^r |0\rangle = 0$  e  $\langle 0|d_{\mathbf{p}}^{s\dagger} = 0$ :

$$S_F(x-y) = \sum_{s=r=1}^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \frac{d^3\mathbf{p}'}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}} e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} e^{ip'_{\mu}x^{\mu}} u^s(p) \bar{u}^r(p') \langle 0|b_{\mathbf{p}}^s b_{\mathbf{p}'}^{r\dagger}|0\rangle \quad (\text{F.2.3})$$

Como  $\langle 0|b_{\mathbf{p}}^s b_{\mathbf{p}'}^{r\dagger}|0\rangle = \langle 0|\{b_{\mathbf{p}}^s, b_{\mathbf{p}'}^{r\dagger}\}|0\rangle = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta^{sr}$ :

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip_{\mu}(x^{\mu}-y^{\mu})} u^s(p) \bar{u}^s(p) \quad (\text{F.2.4})$$

Nós sabemos que  $u^s(p)\bar{u}^s(p) = \not{p} + m$ . Logo:

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip_{\mu}(x^{\mu}-y^{\mu})} (\not{p} + m) \quad (\text{F.2.5})$$

Podemos reescrever esta integral utilizando a seguinte identidade[4]:

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}}} e^{-ip_{\mu}(x^{\mu}-y^{\mu})} = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip_{\mu}(x^{\mu}-y^{\mu})} \quad (\text{F.2.6})$$

Para provar esta identidade basta calcularmos a integral em  $p^0$  no plano complexo e utilizar a fórmula de Cauchy. Substituindo este resultado em  $S_F(x-y)$ :

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip_{\mu}(x^{\mu}-y^{\mu})} \quad (\text{F.2.7})$$

Note que o lado direito da equação acima é a transformação de Fourier do propagador para o espaço de posição. Portanto, vemos que o propagador de Feynman para férmions no espaço de momentos é dado por:

$$\tilde{S}_F(p) = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (\text{F.2.8})$$

Para o caso  $y^0 > x^0$  o processo é análogo.

### F.3 O propagador de Feynman do fóton

O propagador de Feynman dos férmions é definido como[17]:

$$S_\gamma(x-y) \equiv \overline{A_\mu(x)A_\nu(y)} - \langle 0|TA_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle = \begin{cases} \langle 0|A_\mu(x)A_\nu(y)|0\rangle, & x_0 > y_0 \\ \langle 0|A_\nu(y)A_\mu(x)|0\rangle, & y_0 > x_0 \end{cases} \quad (\text{F.3.1})$$

Vamos calcular o caso  $x^0 > y_0$  utilizando a expressão do campo do fóton quantizado (equação 3.1.16):

$$S_\gamma(x-y) = \int \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\mathbf{k}'}}} \sum_{s=r=1}^2 \langle 0| \left[ \epsilon_\mu^s(k)a_{\mathbf{k}}^s e^{-ik_\alpha x^\alpha} + \epsilon_\mu^s(k)^* a_{\mathbf{k}}^{s\dagger} e^{ik_\alpha x^\alpha} \right] |0\rangle \\ \left[ \epsilon_\nu^r(k')a_{\mathbf{k}'}^r e^{-ik'_\alpha x^\alpha} + \epsilon_\nu^r(k')^* a_{\mathbf{k}'}^{r\dagger} e^{ik'_\alpha x^\alpha} \right] \quad (\text{F.3.2})$$

Utilizando que  $a_{\mathbf{k}}^s |0\rangle = 0$  e  $\langle 0|a_{\mathbf{k}}^{s\dagger} = 0$ :

$$S_\gamma(x-y) = \int \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3\sqrt{2E_{\mathbf{k}'}}} \left[ \sum_{s=r=1}^2 \epsilon_\mu^s(k)\epsilon_\nu^r(k')^* \langle 0|a_{\mathbf{k}}^s a_{\mathbf{k}'}^{r\dagger}|0\rangle e^{-i(k_\alpha x^\alpha - k'_\alpha y^\alpha)} \right] \quad (\text{F.3.3})$$

Como  $\langle 0|a_{\mathbf{k}}^s a_{\mathbf{k}'}^{r\dagger}|0\rangle = \langle 0|[a_{\mathbf{k}}^s, a_{\mathbf{k}'}^{r\dagger}]|0\rangle = (2\pi)^3 \delta^{sr} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ :

$$S_\gamma(x-y) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3(2E_{\mathbf{k}})} \left[ \sum_{s=1}^2 \epsilon_\mu^s(k)\epsilon_\nu^s(k)^* e^{-ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \right] \quad (\text{F.3.4})$$

Utilizando que  $\sum_{s=1}^2 \epsilon_\mu^s(k)\epsilon_\nu^s(k)^* = -g_{\mu\nu}$ [17]. Portanto:

$$S_\gamma(x-y) = -g_{\mu\nu} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3(2E_{\mathbf{k}})} e^{-ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \\ = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} e^{-ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \quad (\text{F.3.5})$$

Note que o lado direito da equação acima é a transformação de Fourier do propagador para o espaço de posição. Portanto, vemos que o propagador de Feynman para o fóton, no espaço de momentos, é dado por:

$$\tilde{S}_\gamma(k) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (\text{F.3.6})$$

Para o caso  $y^0 > x^0$  o processo é análogo.

# Apêndice G

## Cálculo das correções radiativas

No capítulo 6, seção 6.3, vimos que parte da amplitude de espalhamento de um férmion por um campo eletromagnético externo pode ser escrita como:

$$\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu u(p) = 2iQ^2 e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') \frac{(\not{k}\gamma^\mu \not{k}' - 2m(k+k')^\mu + m^2\gamma^\mu)}{(k'^2 - m^2 + i\varepsilon)(k^2 - m^2 + i\varepsilon)((k-p)^2 + i\varepsilon)} u(p) \quad (\text{G.0.1})$$

Para simplificarmos esta expressão, podemos utilizar os parâmetros de Feynman[17, 25] (equação G.0.2) a fim de transformarmos o denominador da expressão acima em um polinômio de quarto grau em  $k$ , elevado ao cubo. Tais parâmetros são definidos como:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 dx_2 \dots dx_n \frac{(n-1)!}{(x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n)^n} \delta\left(\sum_i x_i - 1\right) \quad (\text{G.0.2})$$

Para  $n = 3$ , podemos fazer  $A_1 = (k'^2 - m^2 + i\varepsilon)$ ,  $A_2 = (k^2 - m^2 + i\varepsilon)$  e  $A_3 = ((k-p)^2 + i\varepsilon)$

$$\frac{1}{(k'^2 - m^2 + i\varepsilon)(k^2 - m^2 + i\varepsilon)((k-p)^2 + i\varepsilon)} = 2 \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \frac{1}{D^3} \quad (\text{G.0.3})$$

Onde:

$$D = x_1(k'^2 - m^2) + x_2(k^2 - m^2) + x_3(k-p)^2 + (x_1 + x_2 + x_3)i\varepsilon \quad (\text{G.0.4})$$

Com este truque, nós podemos reescrever a equação G.0.1 da seguinte forma:

$$\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu u(p) = iQ^2 e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 2\delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \frac{N^\mu}{D^3} \quad (\text{G.0.5})$$

Onde:

$$N^\mu = 2\bar{u}(p')(\not{k}\gamma^\mu \not{k}' - 2m(k+k')^\mu + m^2\gamma^\mu)u(p) \quad (\text{G.0.6})$$

O primeiro passo para calcularmos  $\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu u(p)$  é fazer a seguinte mudança de variável:

$$l = k + x_2 q - x_3 p \quad (\text{G.0.7})$$

onde  $q = k' - k$ . Para realizarmos tal mudança, precisamos reescrever o denominador em função desta nova variável. Para isto, temos que simplificá-lo. Devido a delta de Dirac presente na integral, temos que  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ , a expressão de  $D$  (equação G.0.4) pode ser escrita como:

$$D = x_1(k'^2 - m^2) + x_2(k^2 - m^2) + x_3(k-p)^2 + i\varepsilon \quad (\text{G.0.8})$$

Para eliminarmos  $k'$  da equação, podemos utilizar que  $k' = k + q$  e conseqüentemente  $k'^2 = (k+q)^2 = k^2 + q^2 + 2k^\nu q_\nu$ . Assim:

$$\begin{aligned}
D &= x_1(k^2 + q^2 + 2k^\nu q_\nu - m^2) + x_2(k^2 - m^2) + x_3(k^2 + p^2 - 2k^\nu p_\nu) + i\varepsilon \\
&= k^2(x_1 + x_2 + x_3) + 2k^\nu(x_2q - x_3p)_\mu - m^2(x_1 + x_2) + x_2q^2 + x_3p^2 + i\varepsilon \\
&= k^2 + 2k^\nu(x_2q - x_3p)_\mu - m^2(x_1 + x_2) + x_2q^2 + x_3p^2 + i\varepsilon
\end{aligned} \tag{G.0.9}$$

Agora vamos subtrair  $l^2 = (k + x_2q - x_3p)^2 = k^2 + 2k^\nu(x_2q - x_3p)_\nu + x_2^2q^2 + x_3^2p^2 - 2x_2x_3p^\nu q_\nu$  dos dois lados da equação acima:

$$\begin{aligned}
D - l^2 &= -m^2(x_1 + x_2) + x_2q^2 + x_3p^2 + i\varepsilon - x_2^2q^2 - x_3^2p^2 + 2x_2x_3p^\nu q_\nu \\
&= q^2x_2(1 - x_2) + p^2x_3(1 - x_3) + 2x_2x_3p^\nu q_\nu - m^2(1 - x_3) + i\varepsilon
\end{aligned} \tag{G.0.10}$$

Como  $p$  é o quadrimomento do férmion associado ao campo de Dirac de massa  $m$ , nós temos que  $p^2 = m^2$ . Logo:

$$\begin{aligned}
D - l^2 &= q^2x_2(x_1 + x_3) - m^2(1 - x_3)^2 + 2x_2x_3p^\nu q_\nu + i\varepsilon \\
&= q^2x_1x_2 - m^2(1 - x_3)^2 + x_2x_3(q^2 + 2p^\nu q_\nu) + i\varepsilon
\end{aligned} \tag{G.0.11}$$

Utilizando a conservação de momento nos vértices do diagrama 6.2, nós temos que  $p' = p + q$ , o que aliado ao fato de que  $p^2 = p'^2 = m^2$ , nos permite obter a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}
p'^2 &= p^2 + q^2 + 2p^\nu q_\nu \\
m^2 &= m^2 + q^2 + 2p^\nu q_\nu \\
q^2 + 2p^\nu q_\nu &= 0
\end{aligned} \tag{G.0.12}$$

Aplicando esta identidade na equação G.0.11:

$$D - l^2 = q^2x_1x_2 - m^2(1 - x_3)^2 + i\varepsilon \tag{G.0.13}$$

Por convenção, vamos definir uma nova grandeza  $\Delta \equiv -q^2x_1x_2 + m^2(1 - x_3)^2$ . Substituindo na equação:

$$\begin{aligned}
D - l^2 &= -\Delta + i\varepsilon \\
\implies D &= l^2 - \Delta + i\varepsilon
\end{aligned} \tag{G.0.14}$$

Após aplicarmos a mudança de variável em  $D$ , o próximo passo é reescrever o numerador  $N^\mu$  em função de  $l$ . Para isto, podemos substituir na equação G.0.6 que  $k' = k + q$  e também  $k = l - qx_2 + x_3p$ , pela definição de  $l$ . Assim, podemos expressar  $N^\mu$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
N^\mu &= 2\bar{u}(p') [(l^\nu \gamma_\nu - \not{q}x_2 + \not{p}x_3)\gamma^\mu (l^\rho \gamma_\rho - \not{q}(1 - x_2) + \not{p}x_3) - 4m(l - qx_2 + px_3)^\mu - 2mq^\mu + m^2\gamma^\mu] u(p) \\
&= 2\bar{u}(p') [l^\nu \gamma_\nu \gamma^\mu l^\rho \gamma_\rho + l^\nu \gamma_\nu \gamma^\mu (-\not{q}(1 - x_2) + \not{p}x_3) + (-\not{q}x_2 + \not{p}x_3)\gamma^\mu l^\nu \gamma_\nu + (-\not{q}x_2 + \not{p}x_3)\gamma^\mu (-\not{q}(1 - x_2) + \not{p}x_3) \\
&\quad + m^2\gamma^\mu - 2m(2l - q(1 - 2x_2) - 2px_3)^\mu] u(p)
\end{aligned} \tag{G.0.15}$$

Para simplificarmos esta expressão, é importante notarmos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu}{D^3} = 0 \tag{G.0.16}$$

Isso ocorre porque a integral é calculada em um intervalo simétrico e o integrando  $\frac{l^\mu}{D^3}$  é uma função ímpar em relação a  $l$ , uma vez que  $D$  é par e  $l^\mu$  é ímpar. Com este resultado, nós podemos ver que qualquer termo do numerador proporcional a  $l^\mu$  não contribuirá para o resultado final. Conseqüentemente, podemos desprezar os termos lineares em  $l^\mu$  na expressão de  $N^\mu$  (equação G.0.15):

$$N^\mu = 2\bar{u}(p') \left[ l^\nu \gamma_\nu \gamma^\mu l^\rho \gamma_\rho + (-\not{q}x_2 + \not{p}x_3)\gamma^\mu(-\not{q}(1-x_2) + \not{p}x_3) + m^2\gamma^\mu - 2m(-q(1-2x_2) - 2px_3)^\mu \right] u(p) \quad (\text{G.0.17})$$

Outra propriedade que nos permite simplificar  $N^\mu$  é que a integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu l^\nu}{D^3} \quad (\text{G.0.18})$$

não deve depender da direção de  $l^\mu$  no espaço dos quadrimomentos, pois todas as componentes de  $k^\mu$  são integradas sob todos os valores possíveis. Isto implica que a integral deve depender apenas da sua contração escalar  $l^2$ . Portanto, podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu l^\nu}{D^3} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \frac{l^2}{D^3} \quad (\text{G.0.19})$$

onde o fator  $\frac{1}{4}$  aparece devido a  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . Tendo isto em vista, nós podemos utilizar que  $l^\mu l^\nu = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} l^2$  em  $N^\mu$ . Portanto:

$$\begin{aligned} N^\mu &= 2\bar{u}(p') \left[ \frac{1}{4} g^{\nu\rho} \gamma_\nu \gamma^\mu \gamma_\rho l^2 + (-\not{q}x_2 + \not{p}x_3)\gamma^\mu(-\not{q}(1-x_2) + \not{p}x_3) + m^2\gamma^\mu - 2m(-q(1-2x_2) - 2px_3)^\mu \right] u(p) \\ &= 2\bar{u}(p') \left[ -\frac{1}{2} l^2 \gamma^\mu + M^\mu + m^2\gamma^\mu - 2m(-q(1-2x_2) - 2px_3)^\mu \right] u(p) \end{aligned} \quad (\text{G.0.20})$$

Para que tenhamos uma visualização limpa, iremos nos ater ao segundo termo da equação acima e depois retomamos a expressão completa:

$$M^\mu = 2\bar{u}(p')(-\not{q}x_2 + \not{p}x_3)\gamma^\mu(-\not{q}(1-x_2) + \not{p}x_3)u(p) \quad (\text{G.0.21})$$

Utilizando que  $\not{p}u(p) = mu(p)$  no último termo do segundo parêntesis e que  $p = p' - q$  no primeiro parêntesis:

$$M^\mu = 2\bar{u}(p')(-\not{q}x_2 + \not{p}'x_3 - \not{q}x_3)\gamma^\mu(-\not{q}(1-x_2) + mx_3)u(p) \quad (\text{G.0.22})$$

Como  $\bar{u}(p')\not{p}' = \bar{u}(p')m$ :

$$M^\mu = 2\bar{u}(p')(-\not{q}(x_2 + x_3) + mx_3)\gamma^\mu(-\not{q}(1-x_2) + mx_3)u(p) \quad (\text{G.0.23})$$

Lembrando que  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ , nós temos que  $x_2 + x_3 = 1 - x_1$ . Logo:

$$\begin{aligned} M^\mu &= 2\bar{u}(p')(-\not{q}'(1-x_1) + mx_3)\gamma^\mu(-\not{q}(1-x_2) + mx_3)u(p) \\ &= 2\bar{u}(p')(q_\nu q_\rho \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho (1-x_1)(1-x_2) + m\not{q}\gamma^\mu x_3(1-x_1) + m\gamma^\mu \not{q}x_3(1-x_2) + m^2 x_3^2 \gamma^\mu)u(p) \end{aligned} \quad (\text{G.0.24})$$

Note que o produto de matrizes  $\gamma^\mu$  do primeiro termo podem ser escritas como[17]:

$$\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho = g^{\nu\mu} \gamma^\rho + g^{\mu\rho} \gamma^\nu - g^{\rho\nu} \gamma^\mu - i\epsilon^{\sigma\nu\mu\rho} \gamma_\sigma \gamma^5 \quad (\text{G.0.25})$$

onde  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ . Deste modo:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')q_\nu q_\rho \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho u(p) &= q_\nu q_\rho (g^{\nu\mu} \gamma^\rho + g^{\mu\rho} \gamma^\nu - g^{\rho\nu} \gamma^\mu - i\epsilon^{\sigma\nu\mu\rho} \gamma_\sigma \gamma^5) \\ &= \bar{u}(p')(2q^\mu \not{q} - q^2 \gamma^\mu)u(p) \\ &= \bar{u}(p')(2q^\mu \not{p}' - 2q^\mu \not{p} - q^2 \gamma^\mu)u(p) \\ &= \bar{u}(p')(2q^\mu m - 2q^\mu m - q^2 \gamma^\mu)u(p) \\ &= \bar{u}(p')(-q^2 \gamma^\mu)u(p) \end{aligned} \quad (\text{G.0.26})$$

onde utilizamos que  $q_\nu q_\rho i \epsilon^{\sigma\nu\mu\rho} \gamma_\sigma \gamma^5 = 0$ , pois temos a contração de uma matriz simétrica com outra antissimétrica. Substituindo este resultado na equação G.0.24:

$$M^\mu = 2\bar{u}(p')(q^2\gamma^\mu(1-x_1)(1-x_2) + m\cancel{q}\gamma^\mu x_3(x_1-1) + m\gamma^\mu\gamma^\nu q_\nu x_3(1-x_2) + m^2 x_3^2 \gamma^\mu)u(p) \quad (\text{G.0.27})$$

Utilizando a álgebra de Clifford  $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$  no terceiro termo:

$$\begin{aligned} M^\mu &= 2\bar{u}(p')(q^2\gamma^\mu(1-x_1)(1-x_2) + m\cancel{q}\gamma^\mu x_3(x_1-1) + m(2q^\mu - \cancel{q}\gamma^\mu)x_3(1-x_2) + m^2 x_3^2 \gamma^\mu)u(p) \\ &= 2\bar{u}(p')(q^2\gamma^\mu(1-x_1)(1-x_2) + m\cancel{q}\gamma^\mu x_3(x_1+x_2-2) + 2mq^\mu x_3(1-x_2) + m^2 x_3^2 \gamma^\mu)u(p) \\ &= 2\bar{u}(p')(q^2\gamma^\mu(1-x_1)(1-x_2) - m\cancel{q}\gamma^\mu x_3(x_3+1) + 2mq^\mu x_3(1-x_2) + m^2 x_3^2 \gamma^\mu)u(p) \end{aligned} \quad (\text{G.0.28})$$

Note que:

$$\bar{u}(p')\cancel{q}\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p')(\cancel{p}' - \cancel{p})\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p')(m\gamma^\mu - \cancel{p}\gamma^\mu)u(p) \quad (\text{G.0.29})$$

Através da álgebra de Clifford, nós temos que  $\cancel{p}\gamma^\mu = 2p^\mu - \gamma^\mu\cancel{p}$ . Logo:

$$\bar{u}(p')\cancel{q}\gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p')(m\gamma^\mu - 2p^\mu + m\gamma^\mu)u(p) = \bar{u}(p')(2m\gamma^\mu - 2p^\mu)u(p) \quad (\text{G.0.30})$$

Substituindo este resultado em  $M^\mu$  (equação G.0.28):

$$\begin{aligned} M^\mu &= 2\bar{u}(p') [q^2\gamma^\mu(1-x_1)(1-x_2) - m(2m\gamma^\mu - 2p^\mu)x_3(x_3+1) + 2mq^\mu x_3(1-x_2) + m^2 x_3^2 \gamma^\mu] u(p) \\ &= 2\bar{u}(p') [\gamma^\mu (q^2(1-x_1)(1-x_2) - m^2 x_3(x_3+2)) + 2q^\mu m x_3(1-x_1) + 2p^\mu m x_3(x_3+1)] u(p) \end{aligned} \quad (\text{G.0.31})$$

Agora iremos retornar para o numerador  $N^\mu$  substituindo o resultado acima na equação G.0.20 e reorganizando-a:

$$\begin{aligned} N^\mu &= 2\bar{u}(p') [\gamma^\mu \left( -\frac{1}{2}l^2 + q^2(1-x_1)(1-x_2) + m^2(1-x_3^2 - 2x_3) \right) + 2mp^\mu x_3(x_3-1) \\ &\quad + 2mq^\mu [x_3(1-x_2) - (1-2x_2)]] u(p) \end{aligned} \quad (\text{G.0.32})$$

Utilizando que  $x_1 + x_2 + x_3 + 3 = 1$  e que  $q = p' - p$ , obtemos que:

$$N^\mu = 2\bar{u}(p') [\gamma^\mu \left( -\frac{1}{2}l^2 + q^2(1-x_1)(1-x_2) + m^2(1-x_3^2 - 2x_3) \right) + m(p' + p)^\mu x_3(x_3-1) + mq^\mu(2-x_3)(x_2-x_1)] u(p) \quad (\text{G.0.33})$$

Note que o último termo é uma função ímpar em  $x_2$  e  $x_1$  e  $D$  é uma função par dessas duas variáveis. Deste modo, quando integrarmos este  $\frac{mq^\mu(2-x_3)(x_2-x_1)}{D^3}$  em um intervalo simétrico em  $x_1$  e  $x_2$ , o resultado deve ser 0. Portanto, podemos desprezar o último termo da equação acima:

$$N^\mu = 2\bar{u}(p') [\gamma^\mu \left( -\frac{1}{2}l^2 + q^2(1-x_1)(1-x_2) + m^2(1-x_3^2 - 2x_3) \right) + m(p' + p)^\mu x_3(x_3-1)] u(p) \quad (\text{G.0.34})$$

Pela identidade de Gordon[17], nós temos que:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) &= \bar{u}(p') \left[ \frac{(p' + p)^\mu}{2m} + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p) \\ \implies \bar{u}(p')(p' + p)^\mu u(p) &= 2m\bar{u}(p') \left[ \gamma^\mu - i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p) \end{aligned} \quad (\text{G.0.35})$$

Substituindo este resultado na equação G.0.34:

$$N^\mu = 2\bar{u}(p') \left[ \gamma^\mu \left( -\frac{1}{2}l^2 + q^2(1-x_1)(1-x_2) + m^2(1+x_3^2 - 4x_3) \right) + 2m^2 i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} x_3(x_3-1) \right] u(p) \quad (\text{G.0.36})$$

Inserindo esta expressão e a de  $D$  (equação G.0.14) na equação G.0.5, nós temos a mudança de variável de  $k$  para  $l$ :

$$\bar{u}(p') \delta \Gamma^\mu u(p) = iQ^2 e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 2 \frac{\delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1)}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} 2\bar{u}(p') \left[ \gamma^\mu \left( -\frac{1}{2}l^2 + q^2(1-x_1)(1-x_2) + m^2(1+x_3^2 - 4x_3) \right) + 2m^2 i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} x_3(x_3-1) \right] u(p) \quad (\text{G.0.37})$$

Definindo as seguintes funções:

$$\delta Q_f \equiv iQ^2 |e|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 4 \frac{\delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1)}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} \left( -\frac{1}{2}l^2 + q^2(1-x_1)(1-x_2) + m^2(1+x_3^2 - 4x_3) \right) \quad (\text{G.0.38})$$

$$\delta g \equiv iQ^2 e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 4 \frac{\delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1)}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} 2m^2 x_3(x_3 - 1) \quad (\text{G.0.39})$$

a expressão de  $\bar{u}(p') \delta \Gamma^\mu u(p)$  pode ser reescrita como:

$$\bar{u}(p') \delta \Gamma^\mu u(p) = \delta Q_f \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) + \delta g \bar{u}(p') i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} u(p) \quad (\text{G.0.40})$$

Esta é a expressão simplificada que utilizamos no capítulo 6.

### G.0.1 Cálculo da correção $\delta g$

Além de simplificarmos a expressão de  $\bar{u}(p') \delta \Gamma^\mu u(p)$ , também iremos calcular a função  $\delta g$  que nos dará a correção para o momento magnético. Partindo da definição de  $\delta g$  (equação G.0.39):

$$\delta g = iQ^2 e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 4 \frac{\delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1)}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} 2m^2 x_3(x_3 - 1) \quad (\text{G.0.41})$$

Fazendo o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  e utilizando  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$

$$\delta g = \frac{iQ^2}{\pi^3} \alpha \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) 2m^2 x_3(x_3 - 1) \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 l \frac{1}{(l^2 - \Delta)^3} \quad (\text{G.0.42})$$

Para resolvermos a integral em  $l$  iremos utilizar um truque chamado de rotação de Wick[17]. Tal método consiste em rotacionar o contorno da integral em  $l^0$  por um ângulo  $\frac{\pi}{2}$  no sentido anti-horário, ou seja, mudar o contorno do eixo real para o eixo imaginário. No entanto, isto só é possível devido ao integrando cair suficientemente rápido para  $|l^0|$  grande e o contorno não interceptar os polos ao longo da rotação. A grande vantagem deste truque é que ele permite realizarmos a integral em coordenadas esféricas, pois transforma  $l$  em um quadrimomento Euclidiano, contornando o sinal negativo presente na métrica de Minkowski. Para realizarmos esta rotação, basta fazermos a mudança de variável:

$$l^0 = i l_E^0, \quad \mathbf{l} = \mathbf{l}_E \quad (\text{G.0.43})$$

Aplicando a rotação de Wick integral em  $l$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^4 l \frac{1}{(l^2 - \Delta)^3} = -i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4 l_E \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^3} = -i \int d\Omega_4 \int_0^{+\infty} dl_E \frac{l_E^3}{(l_E^2 + \Delta)^3} \quad (\text{G.0.44})$$

onde  $\int d\Omega_4$  a área da superfície de uma esfera em quatro dimensões, a qual sabemos que vale  $2\pi^2$ . Fazendo a mudança de variável  $w = l_e^2 + \Delta$  e conseqüentemente  $dw = 2l_E dl_E$ :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} d^4l \frac{1}{(l^2 - \Delta)^3} &= -2i\pi^2 \int_{\Delta}^{+\infty} dw \frac{w - \Delta}{w^3} \\
&= -2i\pi^2 \int_{\Delta}^{+\infty} dw (w^{-3} - \Delta w^{-3}) \\
&= -2i\pi^2 \left( -w^{-1} + \frac{\Delta}{2} w^{-2} \right) \Big|_{\Delta}^{+\infty} \\
&= -i\pi^2 \frac{1}{\Delta}
\end{aligned} \tag{G.0.45}$$

Substituindo este resultado na expressão de  $a_f$  (equação G.0.42):

$$\delta g = \frac{Q^2 \alpha}{\pi} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \frac{2m^2 x_3 (x_3 - 1)}{\Delta} \tag{G.0.46}$$

Como o fóton não tem massa, então  $q^2 = 0$ , o que implica que  $\Delta = m^2(1 - x_3)^2$ . Portanto:

$$\begin{aligned}
\delta g &= \frac{Q^2 \alpha}{\pi} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \frac{x_3}{(1 - x_3)} \\
&= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx_3 \int_0^{1-x_3} dx_2 \frac{x_3}{(1 - x_3)} \\
&= \frac{Q^2 \alpha}{\pi} \int_0^1 dx_3 x_3 \\
&= \frac{Q^2 \alpha}{2\pi}
\end{aligned} \tag{G.0.47}$$

Como discutido no capítulo 6, este é o valor da correção radiativa para o momento magnético de um férmion carregado.

## Apêndice H

# Cálculo das correções radiativas além do Modelo Padrão

No capítulo 7, vimos que a amplitude relacionada ao diagrama 7.1 é dada por:

$$(2\pi)\delta(p^0 - p'^0) i\mathcal{M}_{NP}^{(1)} = -iQ_F|e|\bar{u}(p')\delta\Gamma_{NP}^\mu u(p)\tilde{A}_\mu^{cl}(p' - p) \quad (\text{H.0.1})$$

Onde:

$$\bar{u}(p')\delta\Gamma_{NP}^\mu u(p) = i\frac{\lambda_R^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p') \frac{(\not{k}'\gamma^\mu\not{k} + m_F^2\gamma^\mu)(1 + \gamma^5)}{(k'^2 - m_F^2 + i\varepsilon)(k^2 - m_F^2 + i\varepsilon)((k-p)^2 - m_S^2 + i\varepsilon)} u(p) \quad (\text{H.0.2})$$

Utilizando os parâmetros de Feynman[17], podemos reescrever o denominador da expressão acima como:

$$\frac{1}{(k'^2 - m_F^2 + i\varepsilon)(k^2 - m_F^2 + i\varepsilon)((k-p)^2 - m_S^2 + i\varepsilon)} = 2 \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \frac{1}{D_{NP}^3} \quad (\text{H.0.3})$$

Onde:

$$D_{NP} = x_1(k'^2 - m_F^2) + x_2(k^2 - m_F^2) + x_3((k-p)^2 - m_S^2) + (x_1 + x_2 + x_3)i\varepsilon \quad (\text{H.0.4})$$

Com este truque, podemos reescrever a equação H.0.2 da seguinte forma:

$$\bar{u}(p')\delta\Gamma_{NP}^\mu u(p) = i\frac{\lambda_R^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 2\delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \frac{N_{NP}^\mu}{D_{NP}^3} \quad (\text{H.0.5})$$

Onde:

$$N_{NP}^\mu = \bar{u}(p')(\not{k}'\gamma^\mu\not{k} + m_F^2\gamma^\mu)(1 + \gamma^5)u(p) \quad (\text{H.0.6})$$

Analogamente ao caso do Modelo Padrão, o primeiro passo para calcularmos  $\bar{u}(p')\delta\Gamma_{NP}^\mu u(p)$  é fazer a seguinte mudança de variável:

$$l = k + x_2q - x_3p \quad (\text{H.0.7})$$

onde  $q = k' - k$ . Para reescrevermos o denominador em função desta nova variável é preciso simplificá-lo primeiro. Devido a delta de Dirac presente em H.0.2, temos que  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$  e conseqüentemente a equação H.0.4 pode ser escrita como:

$$D_{NP} = x_1(k'^2 - m_F^2) + x_2(k^2 - m_F^2) + x_3((k-p)^2 - m_S^2) + i\varepsilon \quad (\text{H.0.8})$$

Para eliminarmos  $k'$  da equação, podemos utilizar que  $k' = k + q$  e conseqüentemente  $k'^2 = k^2 + q^2 + 2k^\nu q_\nu$ . Assim:

$$\begin{aligned} D_{NP} &= x_1(k^2 + q^2 + 2k^\nu q_\nu - m_F^2) + x_2(k^2 - m_F^2) + x_3(k^2 + p^2 - 2k^\nu p_\nu - m_S^2) + i\varepsilon \\ &= k^2(x_1 + x_2 + x_3) + 2k^\nu(x_2q - x_3p)_\nu - m_F^2(x_1 + x_2) + x_2q^2 + x_3(p^2 - m_S^2) + i\varepsilon \end{aligned} \quad (\text{H.0.9})$$

Agora vamos subtrair  $l^2 = (k + x_2q - x_3p)^2 = k^2 + 2k^\nu(x_2q - x_3p)_\nu + x_2^2q^2 + x_3^2p^2 - 2x_2x_3p^\nu q_\nu$  dos dois lados da equação acima:

$$\begin{aligned} D_{NP} - l^2 &= -m_F^2(x_1 + x_2) + x_2q^2 + x_3(p^2 - m_S^2) + i\varepsilon - x_2^2q^2 - x_3^2p^2 + 2x_2x_3p^\nu q_\nu \\ &= q^2x_2(1 - x_2) + p^2x_3(1 - x_3) + 2x_2x_3p^\nu q_\nu - m_F^2(1 - x_3) - x_3m_S^2 + i\varepsilon \end{aligned} \quad (\text{H.0.10})$$

Como  $p$  é o quadrimomento do férmion associado ao campo de Dirac de massa  $m_f$ , nós temos que  $p^2 = m_f^2$ . Logo:

$$\begin{aligned} D_{NP} - l^2 &= q^2x_2(x_1 + x_3) + m_f^2x_3(1 - x_3) + 2x_2x_3p^\nu q_\nu - m_F^2(1 - x_3) - x_3m_S^2 + i\varepsilon \\ &= q^2x_1x_2 + x_2x_3(q^2 + 2p^\nu q_\nu) + x_3(m_F^2 - m_f^2(1 - x_3) - m_S^2) - m_F^2 + i\varepsilon \end{aligned} \quad (\text{H.0.11})$$

Utilizando a conservação de momento nos vértices do diagrama 7.1, nós temos que  $p' = p + q$ , o que aliado ao fato de que  $p^2 = p'^2 = m_f^2$ , nos permite obter a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} p'^2 &= p^2 + q^2 + 2p^\nu q_\nu \\ m^2 &= m^2 + q^2 + 2p^\nu q_\nu \\ q^2 + 2p^\nu q_\nu &= 0 \end{aligned} \quad (\text{H.0.12})$$

Aplicando esta identidade na equação H.0.11:

$$D_{NP} - l^2 = q^2x_1x_2 + x_3(m_F^2 + m_f^2(1 - x_3) - m_S^2) - m_F^2 + i\varepsilon \quad (\text{H.0.13})$$

Para simplificar as notações, vamos definir uma nova grandeza  $\Delta_{FSS} \equiv -q^2x_1x_2 - x_3(m_F^2 + m_f^2(1 - x_3) - m_S^2) + m_F^2$ :

$$\begin{aligned} D_{NP} - l^2 &= -\Delta_{FSS} + i\varepsilon \\ \implies D_{NP} &= l - \Delta_{FSS} + i\varepsilon \end{aligned} \quad (\text{H.0.14})$$

Após aplicarmos a mudança de variável em  $D_{NP}$ , o próximo passo é reescrever o numerador  $N_{FSS}^\mu$  em função de  $l$ . Para isto, podemos substituir na equação H.0.6 que  $k' = k + q$  e também  $k = l - qx_2 + x_3p$ , pela definição de  $l$ . Assim, podemos expressar  $N_{NP}^\mu$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} N_{FSS}^\mu &= \bar{u}(p') [(l^\rho \gamma_\rho + \not{q}(1 - x_2) + \not{p}x_3)\gamma^\mu (l^\nu \gamma_\nu - \not{q}x_2 + \not{p}x_3) + m_F^2 \gamma^\mu] [1 + \gamma^5] u(p) \\ &= \bar{u}(p') [l^\rho \gamma_\rho \gamma^\mu l^\nu \gamma_\nu + l^\rho \gamma_\rho \gamma^\mu (\not{q}x_2 + \not{p}x_3) + (-\not{q}(1 - x_2) + \not{p}x_3)\gamma^\mu l^\nu \gamma_\nu + (\not{q}(1 - x_2) + \not{p}x_3)\gamma^\mu (-\not{q}x_2 + \not{p}x_3) \\ &\quad + m_F^2 \gamma^\mu] [1 + \gamma^5] u(p) \end{aligned} \quad (\text{H.0.15})$$

Para simplificarmos esta expressão, é importante notarmos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu}{D_{NP}^3} = 0 \quad (\text{H.0.16})$$

Isso ocorre porque a integral é calculada em um intervalo simétrico e o integrando  $\frac{l^\mu}{D_{NP}^3}$  é uma função ímpar em relação a  $l$ , uma vez que  $D_{FSS}$  é par e  $l^\mu$  é ímpar. Com este resultado, nós podemos ver que qualquer termo do numerador proporcional a  $l^\mu$  não contribuirá para o resultado final. Conseqüentemente, podemos desprezar os termos lineares em  $l^\mu$  na expressão de  $N_{NP}^\mu$  (equação H.0.15):

$$N_{NP}^\mu = \bar{u}(p') [l^\rho \gamma_\rho \gamma^\mu l^\nu \gamma_\nu + (\not{q}(1-x_2) + \not{p}x_3) \gamma^\mu (-\not{q}x_2 + \not{p}x_3) + m_F^2 \gamma^\mu] [1 + \gamma^5] u(p) \quad (\text{H.0.17})$$

Outra propriedade que nos permite simplificar  $N_{NP}^\mu$  é que a integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu l^\nu}{D^3} \quad (\text{H.0.18})$$

não deve depender da direção de  $l^\mu$  no espaço dos quadrimomentos, pois todas as componentes de  $k^\mu$  são integradas sob todos os valores possíveis. Isto implica que a integral deve depender apenas da sua contração escalar  $l^2$ . Portanto, podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu l^\nu}{D^3} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{4} g^{\mu\nu} \frac{l^2}{D^3} \quad (\text{H.0.19})$$

onde o fator  $\frac{1}{4}$  aparece devido a  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ . Tendo isto em vista, nós podemos utilizar que  $l^\mu l^\nu = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} l^2$  em  $N_{FSS}^\mu$ . Portanto:

$$\begin{aligned} N_{NP}^\mu &= \bar{u}(p') \left[ \frac{1}{4} g^{\rho\nu} \gamma_\rho \gamma^\mu \gamma_\nu l^2 + (\not{q}(1-x_2) + \not{p}x_3) \gamma^\mu (-\not{q}x_2 + \not{p}x_3) + m_F^2 \gamma^\mu \right] [1 + \gamma^5] u(p) \\ &= \bar{u}(p') \left[ -\frac{1}{2} \gamma^\mu l^2 + (\not{q}(1-x_2) + \not{p}x_3) \gamma^\mu (-\not{q}x_2 + \not{p}x_3) + m_F^2 \gamma^\mu \right] u(p) \\ &\quad + \bar{u}(p') \left[ -\frac{1}{2} \gamma^\mu l^2 + (\not{q}(1-x_2) + \not{p}x_3) \gamma^\mu (-\not{q}x_2 + \not{p}x_3) + m_F^2 \gamma^\mu \right] \gamma^5 u(p) \\ &= \bar{u}(p') \left[ -\frac{1}{2} \gamma^\mu l^2 + M_{NP}^\mu + m_F^2 \gamma^\mu \right] u(p) + \mathcal{O}(\bar{u}(p') \gamma^5 u(p)) \end{aligned} \quad (\text{H.0.20})$$

onde utilizamos que  $g^{\rho\nu} \gamma_\rho \gamma^\mu \gamma_\nu = \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu = -2\gamma^\mu$ . Para que tenhamos uma visualização limpa, iremos trabalhar separadamente no seguinte termo:

$$M_{NP}^\mu = \bar{u}(p') (\not{q}(1-x_2) + \not{p}x_3) \gamma^\mu (\not{q}x_2 + \not{p}x_3) u(p) \quad (\text{H.0.21})$$

$$(\text{H.0.22})$$

Utilizando que  $\not{p}u(p) = m_f u(p)$ ,  $\bar{u}(p') \not{p}' = \bar{u}(p') m_f$  e  $p = p' - q$ :

$$\begin{aligned} M_{NP}^\mu &= \bar{u}(p') (\not{q}(1-x_2-x_3) + m_f x_3) \gamma^\mu (-\not{q}x_2 + m_f x_3) u(p) \\ &= \bar{u}(p') [-q_\nu q_\rho \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho x_2 x_1 + m_f \not{q} \gamma^\mu x_3 x_1 - m_f \gamma^\mu \not{q} x_2 x_3 + m_f^2 x_3^2 \gamma^\mu] u(p) \end{aligned} \quad (\text{H.0.23})$$

Como demonstrado no cálculo da correção para o Modelo Padrão (equação G.0.26),  $\bar{u}(p') q_\nu q_\rho \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho u(p) = \bar{u}(p') (-q^2 \gamma^\mu) u(p)$ . Portanto:

$$M_{NP}^\mu = \bar{u}(p') [q^2 \gamma^\mu x_2 x_1 + m_f \not{q} \gamma^\mu x_3 x_1 - m_f \gamma^\mu \not{q} x_2 x_3 + m_f^2 x_3^2 \gamma^\mu] u(p) \quad (\text{H.0.24})$$

Utilizando a álgebra de Clifford  $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$  no terceiro termo:

$$\begin{aligned} M_{NP}^\mu &= \bar{u}(p') [q^2 \gamma^\mu x_2 x_1 + m_f \not{q} \gamma^\mu x_3 x_1 - m_f (2q^\mu - \not{q} \gamma^\mu) x_2 x_3 + m_f x_3^2 \gamma^\mu] u(p) \\ &= \bar{u}(p') [q^2 \gamma^\mu x_2 x_1 + m_f \not{q} \gamma^\mu x_3 (x_1 + x_2) - 2m_f q^\mu x_2 x_3 + m_f^2 x_3^2 \gamma^\mu] u(p) \end{aligned} \quad (\text{H.0.25})$$

Nós já vimos que  $\bar{u}(p') \not{q} \gamma^\mu u(p) = \bar{u}(p') (2m_f \gamma^\mu - 2p^\mu) u(p)$  (equação G.0.30). Logo:

$$\begin{aligned} M_{NP}^\mu &= \bar{u}(p') [q^2 \gamma^\mu x_2 x_1 + m_f (2m_f \gamma^\mu - 2p^\mu) x_3 (x_1 + x_2) - 2m_f q^\mu x_2 x_3 + m_f^2 x_3^2 \gamma^\mu] u(p) \\ &= \bar{u}(p') [q^2 \gamma^\mu x_2 x_1 + m_f^2 \gamma^\mu x_3 (2(x_1 + x_2) + x_3) - 2m_f p^\mu x_3 (x_1 + x_2) - 2m_f q^\mu x_2 x_3] u(p) \end{aligned} \quad (\text{H.0.26})$$

Lembrando que  $q^\mu = (p' - p)^\mu$ :

$$M_{NP}^\mu = \bar{u}(p') \left[ q^2 \gamma^\mu x_2 x_1 + m_f^2 \gamma^\mu x_3 (2(x_1 + x_2) + x_3) - 2m_f x_2 x_3 (p' + p)^\mu - 2m_f p^\mu x_3 (x_2 - x_1) \right] u(p) \quad (\text{H.0.27})$$

Note que o último termo é uma função ímpar em  $x_2$  e  $x_1$  e  $D_{FSS}$  é uma função par dessas duas variáveis. Deste modo, quando integrarmos este  $\frac{2m_f p^\mu x_3 (x_2 - x_1)}{D_{NP}^3}$  em um intervalo simétrico em  $x_1$  e  $x_2$ , o resultado deve ser 0. Portanto, podemos desprezar o último termo da equação acima:

$$M_{NP}^\mu = \bar{u}(p') \left[ q^2 \gamma^\mu x_2 x_1 + m_f^2 \gamma^\mu x_3 (2(x_1 + x_2) + x_3) - 2m_f x_2 x_3 (p' + p)^\mu \right] u(p) \quad (\text{H.0.28})$$

Pela identidade de Gordon[17], nós temos que:

$$\bar{u}(p')(p' + p)^\mu u(p) = 2m \bar{u}(p') \left[ \gamma^\mu - i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p) \quad (\text{H.0.29})$$

Substituindo este resultado na equação H.0.28:

$$\begin{aligned} M_{NP}^\mu &= \bar{u}(p') \left[ q^2 \gamma^\mu x_2 x_1 + m_f^2 \gamma^\mu x_3 (2(x_1 + x_2) + x_3) - 4m_f^2 x_2 x_3 \left( \gamma^\mu - i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right) \right] u(p) \\ &= \bar{u}(p') \left[ \gamma^\mu (q^2 x_2 x_1 + m_f^2 x_3 (2(x_1 - x_2) + x_3)) + 4m_f^2 x_2 x_3 i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p) \end{aligned} \quad (\text{H.0.30})$$

Agora iremos retornar para o numerador  $N_{NP}^\mu$  substituindo o resultado acima na equação H.0.20 e reorganizando-a:

$$N_{NP}^\mu = \bar{u}(p') \left[ \gamma^\mu \left( -\frac{1}{2} l^2 + q^2 x_2 x_1 + m_f^2 x_3 (2(x_1 - x_2) + x_3) + m_F^2 \right) + 4m_f^2 x_2 x_3 i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p) + \mathcal{O}(\bar{u}(p') \gamma^5 u(p)) \quad (\text{H.0.31})$$

Inserindo esta expressão e a de  $D_{NP}$  (equação H.0.14) na equação H.0.5, temos a mudança de variável de  $k$  para  $l$ :

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \delta \Gamma_{NP}^\mu u(p) &= i \frac{\lambda_R^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 2 \frac{\delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1)}{(l^2 - \Delta_{FSS} + i\varepsilon)^3} \left\{ \bar{u}(p') \left[ \gamma^\mu \left( -\frac{1}{2} l^2 + q^2 x_2 x_1 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + m_f^2 x_3 (2(x_1 - x_2) + x_3) + m_F^2 \right) + 4m_f^2 x_2 x_3 i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p) + \mathcal{O}(\bar{u}(p') \gamma^5 u(p)) \right\} \end{aligned} \quad (\text{H.0.32})$$

Definindo as seguintes funções:

$$\delta Q_{NP} \equiv i \frac{\lambda_R^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1)}{(l^2 - \Delta_{FSS} + i\varepsilon)^3} \left( -\frac{1}{2} l^2 + q^2 x_2 x_1 + m_f^2 x_3 (2(x_1 - x_2) + x_3) + m_F^2 \right) \quad (\text{H.0.33})$$

$$\delta g_{NP} \equiv i \frac{\lambda_R^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1)}{(l^2 - \Delta_{FSS} + i\varepsilon)^3} 4m_f^2 x_2 x_3 \quad (\text{H.0.34})$$

a expressão de  $\bar{u}(p') \delta \Gamma_{NP}^\mu u(p)$  pode ser escrita como:

$$\bar{u}(p') \delta \Gamma_{NP}^\mu u(p) = \delta Q_{NP} \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) + \delta g_{NP} \bar{u}(p') i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} u(p) + \mathcal{O}(\bar{u}(p') \gamma^5 u(p)) \quad (\text{H.0.35})$$

Esta é a expressão simplificada que utilizamos no capítulo 7.

## H.1 Cálculo da contribuição $\delta g_{NP}$

Além de simplificarmos a expressão de  $\bar{u}(p')\delta\Gamma_{NP}^\mu u(p)$ , também iremos calcular a função  $\delta g_{NP}$  que nos dará a contribuição do diagrama 7.1 para a correção para o momento magnético. Partindo da definição de  $\delta g_{NP}$  (equação H.0.34) e fazendo tomando o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\delta g_{NP} = i \frac{\lambda_R^2}{2(2\pi)^4} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1)}{(l^2 - \Delta_{FFS} + i\varepsilon)^3} 4m_f^2 x_2 x_3 \int_{-\infty}^{+\infty} d^4l \frac{1}{(l^2 - \Delta_{FFS})^3} \quad (\text{H.1.1})$$

No apêndice G, demonstramos através da rotação de Wick que para uma função  $\Delta$  que não depende de  $l$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^4l \frac{1}{(l^2 - \Delta)^3} = -i\pi^2 \frac{1}{\Delta} \quad (\text{H.1.2})$$

Deste modo, como  $\Delta_{FFS}$  também não depende de  $l$ , podemos substituir este resultado na equação H.1.1:

$$\delta g_{NP} = \frac{\lambda_R^2 m_f^2}{8\pi^2} \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \frac{x_2 x_3}{\Delta_{FFS}} \quad (\text{H.1.3})$$

Como o fóton não tem massa, então  $q^2 = 0$ , o que implica que  $\Delta_{FFS} = m_F^2 - x_3(m_F^2 + m_f^2(1-x^3) - m_S^2)$ . Portanto:

$$\begin{aligned} \delta g_{NP} &= \frac{\lambda_R^2 m_f^2}{16\pi^2} \int_0^1 dx_3 dx_2 dx_1 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \frac{x_2 x_3}{m_F^2 - x_3(m_F^2 + m_f^2(1-x^3) - m_S^2)} \\ &= \frac{\lambda_R^2 m_f^2}{16\pi^2 m_S^2} \int_0^1 dx_3 \frac{x_3}{\frac{m_F^2}{m_S^2} - x_3 \left( \frac{m_F^2}{m_S^2} + \frac{m_f^2}{m_S^2}(1-x^3) - 1 \right)} \int_0^{1-x_3} dx_2 x_2 \\ &= \frac{\lambda_R^2 m_f^2}{16\pi^2 m_S^2} \int_0^1 dx_3 \frac{x_3(1-x_3)^2}{\frac{m_F^2}{m_S^2} - x_3 \left( \frac{m_F^2}{m_S^2} + \frac{m_f^2}{m_S^2}(1-x^3) - 1 \right)} \end{aligned} \quad (\text{H.1.4})$$

Considerando o limite em que as partículas além do Modelo Padrão são muito pesadas, temos que  $m_S \gg m_F$ , e conseqüentemente  $\frac{m_F^2}{m_S^2} \approx 0$ . Além disso, vamos definir  $\kappa \equiv \frac{m_F^2}{m_S^2}$ . Assim:

$$\begin{aligned} \delta g_{NP} &= \frac{\lambda_R^2 m_f^2}{16\pi^2 m_S^2} \int_0^1 dx_3 \frac{x_3(1-x_3)^2}{\kappa - x_3(\kappa - 1)} \\ &= \frac{\lambda_R^2 m_f^2}{16\pi^2 m_S^2} \int_0^1 dx_3 \left[ -\frac{x_3^2}{(\kappa - 1)} + \frac{(\kappa - 2)}{(\kappa - 1)^2} x - \frac{\kappa}{(\kappa - 1)^3} \frac{1}{(x_3(\kappa - 1) - \kappa)} - \frac{1}{(\kappa - 1)^3} \right] \\ &= \frac{\lambda_R^2 m_f^2}{16\pi^2 m_S^2} \left[ -\frac{1}{(\kappa - 1)} \int_0^1 dx_3 x_3^2 + \frac{(\kappa - 2)}{(\kappa - 1)^2} \int_0^1 dx_3 x - \frac{\kappa}{(\kappa - 1)^3} \int_0^1 dx_3 \frac{1}{(x_3(\kappa - 1) - \kappa)} - \frac{1}{(\kappa - 1)^3} \int_0^1 dx_3 \right] \\ &= \frac{\lambda_R^2 m_f^2}{16\pi^2 m_S^2} \left[ -\frac{1}{3(\kappa - 1)} + \frac{(\kappa - 2)}{2(\kappa - 1)^2} + \frac{\kappa}{(\kappa - 1)^3} \int_0^1 dx_3 \frac{1}{(\kappa - x_3(\kappa - 1))} - \frac{1}{(\kappa - 1)^3} \right] \end{aligned} \quad (\text{H.1.5})$$

Fazendo  $u = \kappa - x_3(\kappa - 1)$  e  $du = -(\kappa - 1)dx$  na penúltima integral:

$$\begin{aligned} \delta g_{NP} &= \frac{\lambda_R^2 m_f^2}{16\pi^2 m_S^2} \left[ -\frac{1}{3(\kappa - 1)} + \frac{(\kappa - 2)}{2(\kappa - 1)^2} + \frac{\kappa}{(\kappa - 1)^4} \int_1^\kappa du \frac{1}{u} - \frac{1}{(\kappa - 1)^3} \right] \\ &= \frac{\lambda_R^2 m_f^2}{16\pi^2 m_S^2} \left[ -\frac{1}{3(\kappa - 1)} + \frac{(\kappa - 2)}{2(\kappa - 1)^2} + \frac{\kappa}{(\kappa - 1)^4} \ln \kappa - \frac{1}{(\kappa - 1)^3} \right] \\ &= \frac{\lambda_R^2 m_f^2}{16\pi^2 m_S^2} \left[ \frac{-2(\kappa - 1)^3 + 3(\kappa - 2)(\kappa - 1)^2 + 6\kappa \ln \kappa - 6(\kappa - 1)}{6(\kappa - 1)^4} \right] \\ &= \frac{\lambda_R^2 m_f^2}{96\pi^2 m_S^2} \frac{(2 + 3\kappa - 6\kappa^2 + \kappa^3 + 6\kappa \ln \kappa)}{(1 - \kappa)^4} \end{aligned} \quad (\text{H.1.6})$$

Como discutido no capítulo 7, essa contribuição representa uma correção radiativa ao momento magnético de um férmion do Modelo Padrão quando adicionamos um férmion carregado e um escalar a esse modelo.

# Bibliografia

- [1] D. P. Aguillard et al. Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.20 ppm. 8 2023.
- [2] T. Aoyama et al. The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model. *Phys. Rept.*, 887:1–166, 2020.
- [3] Peter Athron, Csaba Balázs, Douglas H. J. Jacob, Wojciech Kotlarski, Dominik Stöckinger, and Hyejung Stöckinger-Kim. New physics explanations of  $a_\mu$  in light of the FNAL muon  $g - 2$  measurement. *JHEP*, 09:080, 2021.
- [4] Sidney Coleman. *Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory*. WSP, Hackensack, 12 2018.
- [5] Wolfgang Rindler. *Relativity: special, general, and cosmological*. American Association of Physics Teachers, 2003.
- [6] Jun John Sakurai and Richard L Liboff. *Modern quantum mechanics*. American Association of Physics Teachers, 1986.
- [7] Vladimir Fock. Konfigurationsraum und zweite quantelung. *Zeitschrift für Physik*, 75(9):622–647, 1932.
- [8] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, and Frank Laloe. *Quantum Mechanics, Volume 1*, volume 1. 1986.
- [9] Jerry B Marion. *Classical dynamics of particles and systems*. Academic Press, 2013.
- [10] Herbert Goldstein, Charles Poole, and John Safko. *Classical mechanics*. American Association of Physics Teachers, 2002.
- [11] Ruben Aldrovandi and JG Pereira. *Classical fields*. 2004.
- [12] Francis E Low. *Classical field theory: electromagnetism and gravitation*. John Wiley & Sons, 2008.
- [13] Jorge José and Eugene Saletan. *Classical dynamics: a contemporary approach*. American Association of Physics Teachers, 2000.
- [14] Anthony Zee. *Group theory in a nutshell for physicists*, volume 17. Princeton University Press, 2016.
- [15] Howard Georgi. *Lie algebras in particle physics: from isospin to unified theories*. Taylor & Francis, 2000.
- [16] Anthony Zee. *Quantum field theory in a nutshell*, volume 7. Princeton university press, 2010.
- [17] Michael E Peskin. *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018.
- [18] Young Suh Kim and Marilyn Noz. *Theory and applications of the Poincaré group*, volume 17. Springer Science & Business Media, 1986.
- [19] Matthew D Schwartz. *Quantum field theory and the standard model*. Cambridge university press, 2014.
- [20] Ramamurti Shankar. *Principles of quantum mechanics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [21] Valery Rubakov. *Classical theory of gauge fields*. Princeton University Press, 2009.
- [22] Horatiu Nastase. *Introduction to quantum field theory*. Cambridge University Press, 2019.
- [23] Mark Srednicki. *Quantum field theory*. Cambridge University Press, 2007.

- [24] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 3 2014.
- [25] Steven Weinberg. *The quantum theory of fields: Foundations*. Cambridge university press, 2002.
- [26] Wolfgang Pauli. Zur quantenmechanik des magnetischen elektrons. In *Wolfgang Pauli*, pages 282–305. Springer, 1988.
- [27] James M Wilkes. The pauli and lé vy-leblond equations, and the spin current density. *European Journal of Physics*, 41(3):035402, apr 2020.
- [28] D. Hanneke, S. Fogwell, and G. Gabrielse. New measurement of the electron magnetic moment and the fine structure constant. *Phys. Rev. Lett.*, 100:120801, Mar 2008.
- [29] Tatsumi Aoyama, Toichiro Kinoshita, and Makiko Nio. Theory of the anomalous magnetic moment of the electron. *Atoms*, 7(1), 2019.
- [30] B. Abi and *et al.* Measurement of the positive muon anomalous magnetic moment to 0.46 ppm. *Physical Review Letters*, 126(14), apr 2021.
- [31] Michel Davier, Andreas Hoecker, Bogdan Malaescu, and Zhiqing Zhang. Reevaluation of the hadronic vacuum polarisation contributions to the Standard Model predictions of the muon  $g - 2$  and  $\alpha(m_Z^2)$  using newest hadronic cross-section data. *Eur. Phys. J. C*, 77(12):827, 2017.
- [32] G. W. Bennett and *et al.* Final report of the e821 muon anomalous magnetic moment measurement at BNL. *Physical Review D*, 73(7), apr 2006.
- [33] Kevin R. Lynch. Extended electroweak interactions and the muon  $g - 2$ . *Phys. Rev. D*, 65:053006, 2002.
- [34] P. A. Zyla et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, 2020(8):083C01, 2020.