

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC
CAMPUS SANTO ANDRÉ
BACHARELADO EM FÍSICA

SERGIO BARBOSA JUNIOR

**PRINCÍPIOS DA GRAVITAÇÃO: UMA INTRODUÇÃO À
RELATIVIDADE GERAL**

SANTO ANDRÉ

2023

SERGIO BARBOSA JUNIOR

PRINCÍPIOS DA GRAVITAÇÃO: UMA INTRODUÇÃO À
RELATIVIDADE GERAL

Monografia apresentada à Universidade
Federal do ABC como parte das exigências
para a aprovação na disciplina Trabalho de
Conclusão de Curso.

Orientador: Ricardo Paszko

SANTO ANDRÉ

2023

Dedico este trabalho ao meu pai Sergio, minha mãe Magda e minha irmã Tamiris que me apoiaram nos bons e maus momentos.

—

"Olhar o céu, as nuvens, a lua e as estrelas realmente faz com que eu me sinta calma e esperançosa."
(Anne Frank)

Resumo

Tendo em vista que a bibliografia de relatividade geral é quase que totalmente restrita à língua inglesa, este trabalho de conclusão de curso, escrito na forma de uma monografia, tem como objetivo servir de referência sobre relatividade geral na língua portuguesa. Para tanto, este trabalho cobre um pequeno resumo sobre a história da astronomia e da gravitação. Além disso, revisamos os principais conceitos da física newtoniana e da relatividade especial. Cobrimos um capítulo inteiro sobre a matemática dos espaços curvos e discutimos os principais motivos pelo qual a relatividade geral foi formulada através de uma interpretação geométrica da gravidade. Nos últimos capítulos, abordamos soluções da relatividade geral e suas aplicações.

Palavras-chaves: Gravitação, Relatividade, UFABC.

Sumário

1	Prefácio	7
2	Introdução	9
3	Espaço e Tempo Newtoniano	17
3.1	Princípio de Relatividade de Galileu	18
3.2	Espaço e Tempo de Newton	21
3.3	Gravitação Universal	22
4	Relatividade Especial	27
4.1	Velocidade da Luz	27
4.2	Transformações de Lorentz	29
4.3	Espaço-Tempo de Minkowski	33
4.4	Quadrivetores	36
4.5	Mecânica Relativística	38
4.6	Forma Tensorial das Equações de Maxwell	42
4.7	Tensor de Energia-Momento	46
5	Espaços Curvos	49
5.1	Princípio da Equivalência	49
5.2	Leis de Transformação	52
5.3	Álgebra Tensorial	56
5.4	Definições	57
5.5	Variedade	59
5.6	Derivada Covariante	61
5.7	Transporte Paralelo e Geodésicas	67
5.8	Tensor de Curvatura	69
6	Relatividade Geral	73
6.1	Equação de Einstein	73
6.2	Aproximação Newtoniana	76
6.3	Quantidades Conservadas	78
6.4	Vetores de Killing	80
7	Espaço-Tempo de Schwarzschild	82
7.1	Dedução	82
7.2	Geodésicas	84
7.3	Estrelas	88
8	Buracos Negros	92
8.1	Singularidades	93
8.2	Buraco Negro de Schwarzschild	94
8.3	Coordenadas de Kruskal	98

8.4	Teoremas Importantes	100
8.5	Buracos Negros Giratórios	101
8.6	Termodinâmica de Buracos Negros	103
9	Cosmologia	105
9.1	Princípio Cosmológico	107
9.2	Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	109
9.3	Equações de Friedmann	114
9.4	O Nosso Universo	119
10	Teoria Quântica de Campos em um Espaço-Tempo Curvo	123
10.1	Princípios da Mecânica Quântica	123
10.2	Teoria Quântica de Campos no Espaço-Tempo Plano	128
10.3	Teoria Quântica de Campos no Espaço-Tempo Curvo	131
10.4	Efeito Unruh	133
10.5	Radiação Hawking	137
10.6	Paradoxo da Informação	140
	Referências	141

1 Prefácio

Caro leitor, este trabalho de conclusão de curso foi realizado pensando em você, estudante de física e matemática que deseja aprender sobre relatividade geral, mas não está muito confiante em por onde e como começar. A literatura sobre relatividade geral é extensa e rica, mas está limitada à língua inglesa. Mesmo que você seja capaz de ler em inglês, muitas vezes estes livros não conseguem se fazer entender, se perdendo na didática, fazendo com que o tema pareça mais complexo do que realmente é. Por isso, ao invés de cativar o leitor, mostrando o quão incrível e bonita a física pode ser, acaba frustrando e espantando a maioria dos leitores.

Entretanto, antes de tudo, preciso confirmar que a teoria geral da relatividade é mesmo complexa e difícil. Mas não é impossível. Como tudo na vida, exige-se esforço. Lembre-se do efeito Dunning-Kruger: se estiver achando algo fácil é porque provavelmente não o entendeu direito. Mas, se estiver se sentindo um estúpido, é porque estamos avançando. Admitir ignorância é um passo importante na obtenção de conhecimento. O que pode aprender quem acha que sabe tudo? Mas não se sinta mal, com o tempo e dedicação conseguirá ter a confiança de dizer que domina o assunto, mesmo admitindo que é terrivelmente complexo.

Depois de ter criticado a maioria dos livros-texto de física, que muitas vezes se esquecem da didática, reconheço que coloco este trabalho em uma posição de expectativa maior do que deveria. Não sou nenhum especialista em didática e nunca dei uma aula. Mas, tenho a vantagem de, enquanto escrevo este texto, ainda sou um estudante universitário exatamente como você. Ainda luto com a completa confusão quando não entendo uma matéria. Ainda sinto a pressão e ansiedade para ter as melhores notas, às vezes esquecendo que o principal objetivo é aprender. Depois de ter estudado sobre relatividade geral por um ano inteiro durante a minha graduação, as principais dificuldades do tema ainda se encontram frescas na minha mente. Não prometo que este texto seja fácil e nem de longe o melhor sobre o tema, mas o escrevi pensando que seria o livro que eu gostaria de ler se este fosse o meu primeiro contato com a relatividade geral.

Para que você seja capaz de entender as próximas páginas, é esperado que domine o cálculo diferencial e integral em uma e várias variáveis, bem como álgebra linear. Também é recomendado que você tenha estudado mecânica clássica e eletromagnetismo. Nada mais é necessário para aprender relatividade geral. Devo lembrar que este texto tem a pretensão de ser apenas uma introdução à relatividade geral. Depois de lê-lo, creio que consiga atacar os aspectos mais complexos da teoria através de livros mais avançados, se tiver interesse. Espero que este trabalho seja útil para você,

que possa expandir os seus horizontes sobre o nosso maravilhoso universo, e que o ajude a conquistar os seus objetivos na vida.

2 Introdução

A gravidade é uma das quatro forças fundamentais da natureza, junto com o eletromagnetismo, a força forte e a força fraca. O eletromagnetismo lida com eletricidade, magnetismo, atração e repulsão de cargas, ímãs e luz. A força forte é a interação entre os quarks e glúons no interior dos átomos que mantém os núcleos estáveis. A força fraca é a interação que explica os processos de decaimento radioativo. E a gravidade é a força de atração que mantém os planetas girando ao redor do Sol e as estrelas unidas às suas galáxias.

A força forte e fraca são interações restritas à escala subatômica. Isso acontece porque são fenômenos que enfraquecem muito rapidamente com a distância. O eletromagnetismo afeta tanto as menores quanto as maiores escalas. Está presente sempre onde existe um acúmulo expressivo de cargas. Mas como a maior parte da matéria é neutra, ou seja, as cargas positivas sempre estão muito próximas das cargas negativas, o eletromagnetismo não consegue competir com a gravidade na escala dos planetas, estrelas e galáxias.

Pode passar despercebido para a maioria das pessoas, mas a gravidade é uma força realmente fraca, a mais fraca de todas. Levante qualquer objeto com as mãos e você terá vencido toda a força gravitacional da Terra com este gesto! Para qualquer interação envolvendo partículas fundamentais, a gravidade é tão tênue que pode ser desprezada. Entretanto, como a gravidade é uma força que alcança longas distâncias e cujo efeito é perceptível em grandes acúmulos de matéria, ela reina soberana nas maiores escalas do universo.

Pensamentos sobre a origem da ordem natural provavelmente são tão antigos quanto a espécie humana e inspiraram a religião e a filosofia tanto quanto a ciência. No passado, tínhamos maior contato com a natureza, então observações como: o Sol sempre nasce no leste e se põe no oeste, a posição do Sol relativo ao fundo estelar muda com o passar do tempo e se repete em um período de tempo chamado ano, a Lua muda de aparência com o passar dos dias conforme as suas fases, organizar o tempo nos ajuda a saber quando é o momento de plantar e de colher e quando vai ser a próxima cheia do rio. Esses padrões pareciam estar dizendo alguma coisa para os nossos ancestrais. Eles estavam longe de serem bobos. Por isso, os antigos se preocupavam tanto em construir estruturas astronômicas para marcar a passagem do tempo no calendário. Era uma questão de sobrevivência.

O primeiro que sistematizou um modelo de universo foi Aristóteles, no século IV a.C. O seu universo estava centrado na Terra, como é sensato deduzir, já que o

chão nos parece muito firme e parado, e o Sol, a Lua e as estrelas parecem girar ao nosso redor. Segundo Aristóteles, a matéria que modela a Terra é constituída de quatro elementos: fogo, água, terra e ar. O céu e o resto do universo eram compostos do quinto elemento chamado éter. Para ele, um objeto só pode se mover se existir uma força que o impele continuamente. Se a força cessa, então o movimento acaba. É claro que lhe faltava o conceito de inércia e de atrito. A explicação de gravidade para Aristóteles era muito simples: alguns corpos têm um lugar natural que é a Terra, portanto, são atraídos para ela; enquanto outros corpos tem um lugar natural que é o céu, por isso se afastam da Terra, como os gases. Para ele e muitos gregos, o Sol e os planetas eram esferas perfeitas que descreviam movimentos circulares perfeitos ao redor da Terra. Aparentemente, Aristóteles gostava bastante de círculos.



Figura 1 – Sistema geocêntrico. Harmonia Macrocosmica, Andreas Cellarius, 1660.

Entretanto, havia um sério problema com o sistema geocêntrico de Aristóteles. Haviam sete planetas que não se comportavam como as outras estrelas, que descreviam círculos perfeitos no céu. Os planetas são Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno. Urano e Netuno só foram descobertos após a invenção do telescópio. Ainda assim, é notável que os antigos identificaram os planetas e a ordem correta deles. São chamados de planetas, ou seja, errantes em grego, pois seu movimento pelo céu é errático. Marte, por exemplo, e os outros planetas externos, exibem um movimento retró-

grado pelo céu, se movendo junto com as outras estrelas, mas de repente se movendo para trás antes de voltar na direção original. Para resolver este problema, o matemático Ptolomeu no século II d.C. construiu um sistema complicado baseado em epiciclos e deferentes, onde o planeta se move em uma órbita circular (epiciclo) ao redor de um ponto que se move em um círculo ao redor da Terra (deferente). Impressionante que o modelo ptolomaico é relativamente preciso para as observações que se dispunham na época. Por isso, e por questões filosóficas e religiosas, o modelo acabou sendo adotado pela Igreja Católica e sobreviveu por toda a Idade Média sem contestações.

O modelo geocêntrico só foi desafiado no século XVI com o surgimento do modelo heliocêntrico, muito mais simples. Embora a ideia não fosse original, remontando à Aristarco de Samos no século III a.C., foi Nicolau Copérnico quem criou um modelo aceitável, colocando o Sol no centro do universo e a Terra e os outros planetas girando ao seu redor. Com este modelo, Copérnico foi capaz de calcular os raios das órbitas dos planetas e o período orbital com uma precisão notável. O modelo heliocêntrico também explicava de um modo mais satisfatório o movimento retrógrado de Marte e dos outros planetas externos. Por estar em uma órbita mais afastada do Sol, o planeta externo se move mais lentamente do que a Terra. Portanto, quando a Terra ultrapassa o planeta externo, o planeta é visto no céu como se estivesse se movendo para trás. Apesar do sucesso em explicar as observações, a obra de Copérnico irritou muita gente. Em 1600, o defensor do modelo heliocêntrico Giordano Bruno foi queimado na fogueira por ordem da Igreja Católica.

Entretanto, o modelo de Copérnico possuía algumas pequenas falhas quando postas à prova com observações meticulosas. Os dados astronômicos mais precisos antes da invenção do telescópio foram coletados por Tycho Brahe durante toda a sua vida, a olho nu, mas com instrumentos precisos e um método rigoroso. Usando destes dados, Johannes Kepler, com um imenso amor pela perfeição matemática e um profundo respeito pela observação, decidiu melhorar o modelo de Copérnico. Sua principal mudança foi abandonar a ideia das órbitas circulares em favor das órbitas elípticas. Suas três leis possuem uma notável concordância com os valores atuais de período orbital, raio e excentricidade das órbitas dos planetas. As três leis de Kepler são as seguintes:

1ª Lei: *"As órbitas descritas pelos planetas ao redor do Sol são elipses com o Sol em um dos focos."*

2ª Lei: *"A reta que liga o planeta ao Sol descreve áreas iguais em tempos iguais."*

3ª Lei: *"Os quadrados dos períodos de revolução de dois planetas quaisquer estão entre si como os cubos de suas distâncias médias do Sol."* Ou seja, se T é o período, o tempo que o planeta leva para completar uma órbita, e R é o raio médio da órbita, então $T^2 / R^3 =$ constante para todos os planetas.

A primeira lei desafia a ideia da perfeição circular que remonta aos gregos an-

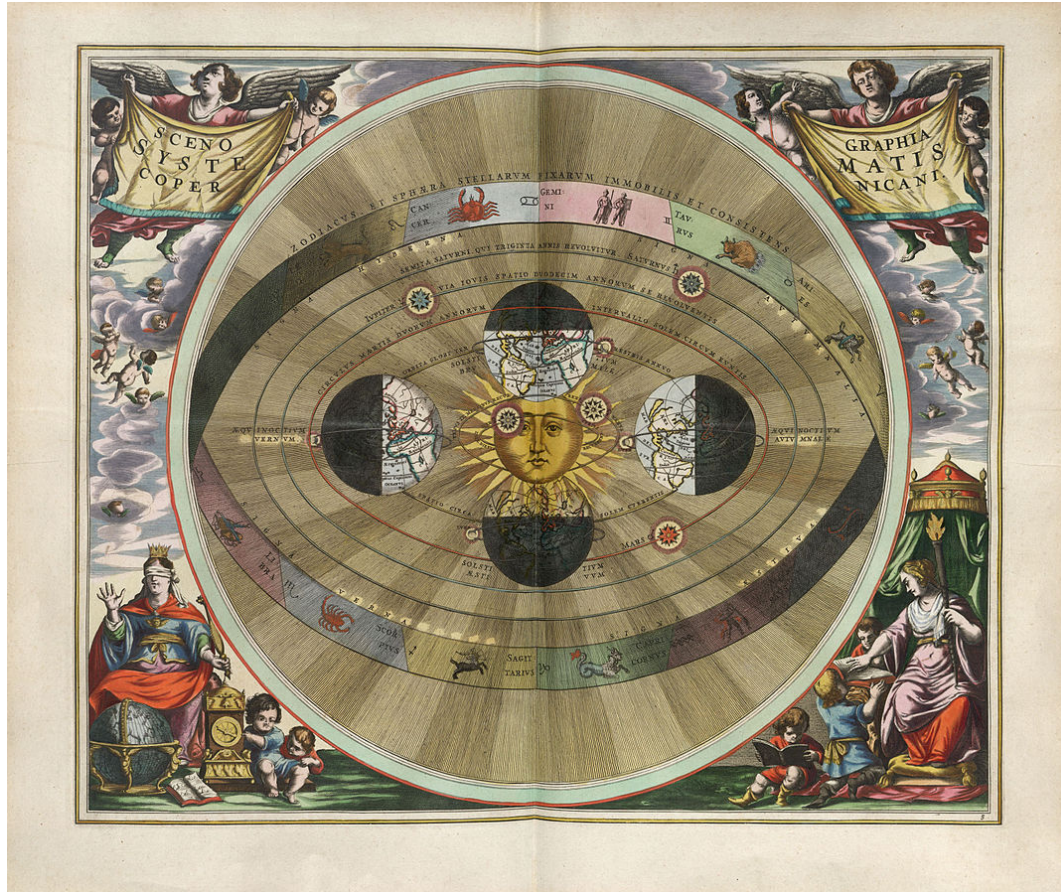


Figura 2 – Modelo heliocêntrico. Harmonia Macrocosmica, Andreas Cellarius, 1660.

tigos. Kepler se remoeu muito antes de aceitar que deveria abandonar as órbitas circulares frente às observações. Sua aceitação da realidade ao invés do dogma é a base da ciência moderna. A segunda lei descreve a mudança na velocidade dos planetas em seu trajeto em torno do Sol. Quando próximos ao Sol, o planeta se move mais rapidamente do que quando afastado, quando desacelera. Já a terceira lei relaciona as órbitas e períodos orbitais entre os planetas. Tanto a segunda quanto a terceira leis faziam Kepler imaginar se poderia existir uma força originada no Sol que fazia os planetas se moverem do jeito que o fazem. Entretanto, Kepler não foi capaz de identificar esta força corretamente.

A grande revolução na astronomia veio quando a tecnologia se tornou uma extensão dos nossos olhos, expandindo enormemente o universo possível de ser observado, quando Hans Lippershey inventou o telescópio em 1608. Galileu Galilei, logo que ficou sabendo, criou a sua própria versão muito mais poderosa e apontou para o céu. Com o telescópio, Galileu observou as crateras e montanhas da Lua e as manchas no Sol, provando que os objetos celestiais não são tão perfeitos e distintos da matéria terrena quanto se pensava. Galileu também percebeu que existem uma infinidade de estrelas que não são visíveis a olho nu. Também descobriu quatro estrelinhas muito próximas de Júpiter que, com o passar do tempo, mudavam de posição e pareciam gi-

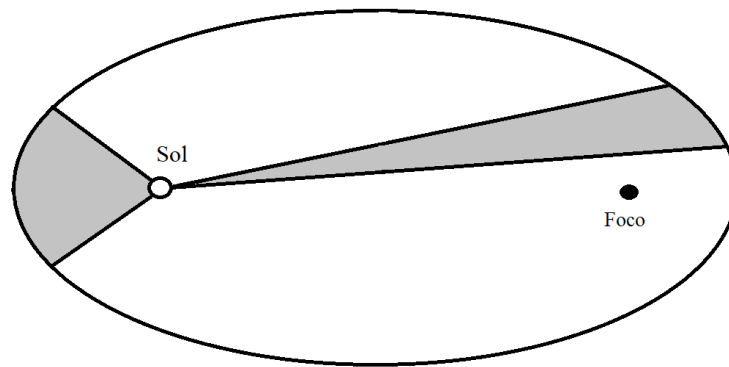


Figura 3 – A primeira lei de Kepler afirma que os planetas se movem em elipses com o Sol em um dos focos. A segunda lei de Kepler diz que a linha que liga o Sol ao planeta descreve áreas iguais em tempos iguais. Ou seja, o planeta leva o mesmo tempo para percorrer as áreas cinzas, que são iguais. Portanto, o planeta é mais rápido quando próximo ao Sol e mais lento quando mais distante do Sol.

rar ao redor do planeta. As quatro estrelinhas eram as luas Ganimedes, Europa, Calisto e Io, que foram uma evidência contra o modelo geocêntrico que insistia que tudo girava ao redor da Terra. Outra grande descoberta foi a observação que Vênus tem fases iguais as da Lua, fato que é inexplicável pelo modelo geocêntrico. Galileu defendeu com unhas e dentes o modelo heliocêntrico e não teve medo de irritar pessoas tão poderosas como o Papa. Por essa heresia, o idoso Galileu foi obrigado a se retratar pela Igreja Católica e ficou em prisão domiciliar até o final da vida.

A primeira teoria da gravidade realmente bem-sucedida foi formulada por Isaac Newton, no século XVII. Além da gravitação, Newton lançou as bases da dinâmica do movimento dos corpos no livro mais famoso da ciência moderna junto com *A Origem das Espécies* de Charles Darwin, *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, publicada em 1687. Newton também fez contribuições para a óptica, como a sua descoberta mais famosa, que a luz branca é composta de todas as outras cores. Como se não fosse o bastante, Newton inventou o cálculo diferencial e integral, essencial para o avanço da matemática e da física.

Na física newtoniana, o espaço e o tempo são entidades separadas e fixas. O espaço é euclidiano, tridimensional e plano, não afetando o movimento dos corpos e não sendo afetado por eles. O espaço de Newton é como um palco para todos os acontecimentos do universo. O tempo é uma constante, seguindo à mesma taxa para todos os observadores que tem um relógio para acompanhar.

Para Newton, a gravidade é uma força de atração entre massas que age a distância. Esta força é maior quanto maior são as massas e diminui se aumentarmos a distância elas. Com a Lei da Gravitação Universal e as suas leis da dinâmica, Newton

conseguiu derivar as leis de Kepler que governam o movimento dos planetas ao redor do Sol. Esta é facilmente uma das maiores façanhas da história da ciência!

Com a sua nova física, Newton foi capaz de explicar com precisão as marés, causadas pelo gradiente da força gravitacional da Lua sobre a Terra. Usando da física newtoniana, Edmond Halley identificou e calculou a órbita do cometa que foi denominado em sua homenagem, e previu com sucesso a próxima vez que ele apareceria nos céus. No século XIX, John Couch Adams e Urbain Le Verrier independente, usando as leis de Newton, previram a existência de um planeta que estava perturbando a órbita de Urano. Não demorou até que Netuno fosse descoberto na região do céu muito próxima ao que foi calculada. Para coroar todo esse sucesso, não foi necessário nada mais do que a física newtoniana para lançar satélites ao espaço e chegarmos até a Lua e além.



Figura 4 – Foto da Terra nascendo atrás da Lua durante a missão Apollo 8. NASA, 1968.

Entretanto, no século XIX, uma anomalia na órbita do planeta Mercúrio foi des-

coberta. É a precessão do periélio, ou seja, o ponto da órbita mais próximo do Sol (periélio) mudava ligeiramente de posição (precessão) com o passar do tempo. Na verdade, todos os planetas apresentam a precessão do periélio, mas em Mercúrio este efeito é o maior de todos e possível de ser mensurado. A maior parte da precessão do periélio de Mercúrio é completamente explicada pela perturbação gravitacional provocado por outros planetas do sistema solar. Entretanto, ainda haviam 43 segundos de arco de precessão que careciam de explicação. Foi proposto a existência de um planeta mais interno e próximo ao Sol, que poderia influenciar a órbita de Mercúrio, chamado de Vulcano. O planeta hipotético nunca foi encontrado. Mas, no início do século XX, Albert Einstein provou que a sua nova teoria da gravidade poderia explicar a anomalia. Foi o primeiro de muitos sucessos da relatividade geral, culminando com a confirmação, durante o eclipse em 1919, da deflexão da luz pela gravidade do Sol.

Na relatividade geral, o tempo e o espaço são tratados de forma diferente da teoria de Newton, pois são entidades físicas dinâmicas conectadas, formando um continuum espaço-tempo, que respondem à presença de matéria e energia de forma a se curvar. A curvatura do espaço-tempo, por outro lado, afeta o movimento das partículas, causando o que aparenta ser a força da gravidade. Nas palavras de John Wheeler: "O espaço-tempo diz a matéria como se mover e a matéria diz ao espaço-tempo como se curvar" (WHEELER, 2000).



Figura 5 – Buraco Negro supermassivo no centro da galáxia M87. Event Horizon Telescope collaboration et al. 2019

Mas o que levou Einstein a conceber a relatividade geral? Ele queria conciliar a gravidade com a relatividade especial, desenvolvida em seu ano miraculoso de 1905, quando publicou quatro artigos que lançaram as bases da física moderna. Como ve-

remos com mais detalhes, na relatividade especial, nenhuma interação pode acontecer mais rápido do que a luz. Entretanto, na teoria de Newton, o campo gravitacional pode mudar instantaneamente. Além disso, a gravitação newtoniana não é invariante sob uma transformação de coordenadas arbitrária, ou seja, não tem a mesma aparência para todos os observadores.

Apesar de ter sido substituída pela relatividade geral como a teoria da gravidade padrão da física, a teoria de Newton ainda é muito precisa e amplamente utilizada. Na verdade, a teoria de Newton é um caso particular da relatividade geral, quando o campo gravitacional é fraco, estático e as velocidades são muito menores do que a velocidade da luz.

Porém, existem fenômenos astronômicos que só podem ser explicados usando a relatividade geral. Por exemplo, o desvio para o vermelho no espectro das galáxias descoberto por Edwin Hubble nos anos 1920. Fato que é explicado pela expansão do universo, que é uma previsão da teoria de Einstein. Outro fenômeno importante previsto pela relatividade geral são as ondas gravitacionais, perturbações que se propagam pelo espaço-tempo na forma de ondas, detectadas em 2015 pelo experimento LIGO. Além disso, existem os buracos negros, formados quando estrelas massivas, no fim das suas vidas, colapsam sobre si mesmas. A descoberta de explosões de raios-X nos anos 1960 deram fôlego ao estudo dos buracos negros que antes eram apenas uma curiosidade teórica da relatividade geral. Os buracos negros são feitos de pura geometria e, embora atualmente tenhamos certeza da sua existência, ainda não os entendemos completamente. Não se preocupe, veremos mais detalhes sobre estes objetos fascinantes nos próximos.

3 Espaço e Tempo Newtoniano

Na disciplina da física chamada mecânica, o objetivo principal é compreender o movimento dos corpos e, se tivermos sucesso, sermos capazes de realizar previsões a respeito da evolução futura de uma determinada partícula ou sistema de partículas.

Para tanto, devemos começar com a definição básica de posição. A posição de um corpo nada mais é do que a sua localização no espaço. Entretanto, surge uma questão importante: a sua localização em relação ao quê? Antes de pensarmos em posições, devemos decidir um ponto onde tudo pode ser medido em relação a ele. Não existe uma escolha certa ou errada, pois, pelo que sabemos, o universo não possui um centro definido. Mas temos de ser inteligentes, escolhendo um referencial que facilite a solução do problema em que estamos trabalhando. Por exemplo, se estamos estudando o movimento parabólico de um projétil, é natural colocar o nosso referencial no ponto em que o projétil partiu quando foi lançado, pois as equações são simplificadas. Da mesma forma, se queremos descrever o movimento de um planeta em torno do Sol, é natural definirmos o referencial no centro do Sol (ou melhor, no centro de massa compartilhado entre o planeta e o Sol), pois as equações ficam muito mais fáceis.

Definido o ponto que usaremos de referencia, podemos juntar três réguas, ou três hastes de tamanho bem definido para criarmos três eixos. Para fazer isso, colamos uma haste na outra de forma que fiquem mutualmente perpendiculares, ou seja, uma haste deve fazer um ângulo de 90° em relação à outra, como mostrado na Figura 6. Desta forma, criamos três eixos, que chamamos de altura, largura e profundidade, ou simplesmente x , y e z .

Depois que os três eixos foram construídos, partindo de um ponto O , podemos definir a posição de um ponto P em relação à O . Como fazemos isso? Fácil, vamos andar até P , partindo de O e seguindo apenas caminhos que sejam linhas retas paralelas aos eixos. Por exemplo, partindo de O , podemos andar sobre o eixo x até uma distância Δx , depois seguimos numa linha reta paralela ao eixo y até uma distância Δy e, finalmente, seguindo uma linha reta paralela ao eixo z percorrendo uma distância Δz chegamos em P . Portanto, o ponto P está localizado na tripla ordenada $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$. Mas como sabemos a distância que percorremos em cada reta? Simples, carregamos uma régua conosco e medimos nossos passos.

O fato de precisarmos de três números para especificar posições quer nos dizer alguma coisa sobre o espaço. Quando se diz que o espaço é tridimensional, se quer dizer que qualquer sistema de coordenadas que podemos imaginar e que seja capaz de definir rótulos para cada ponto no espaço, especifica a localização dos pontos em

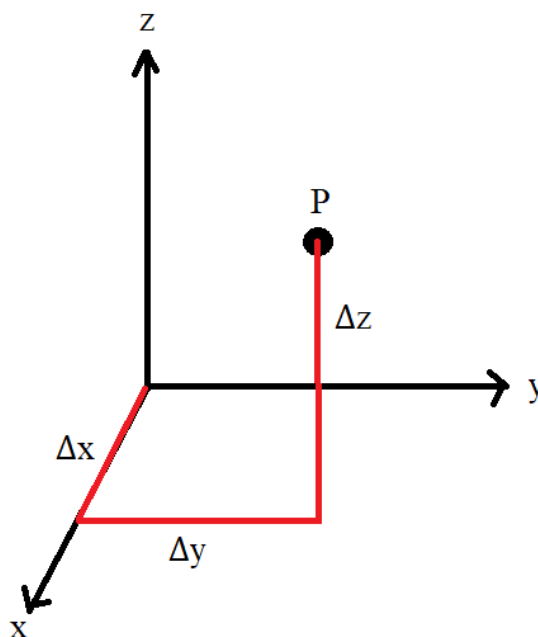


Figura 6 – Sistema de coordenadas que pode ser usado como referencial para definir posições e distâncias.

relação à uma certa origem O com uma tripla de números.

Mas, a menos que uma partícula esteja sempre parada (em repouso) em um mesmo ponto relativo à origem O , devemos saber a posição da partícula em um determinado instante de tempo. Aqui fica a dúvida: o que é o tempo? Sejam pragmáticos, o tempo é o que um relógio mede. Mas, o que é um relógio? É qualquer coisa ou mecanismo que tenha um movimento repetitivo e que completa este movimento em um intervalo de tempo constante. Veja, o quanto a nossa definição é redundante. O fato é que ninguém sabe direito o que é o tempo além do que a nossa biologia e o senso comum nos dota. Sabemos que ele passa sem parar e nunca volta, mas não queremos entrar em detalhes filosóficos. O importante é que tenhamos um relógio confiável e conectado ao nosso referencial para que sejamos capazes de descrever o movimento com o passar do tempo.

3.1 Princípio de Relatividade de Galileu

É extremamente injusto chamarmos a mecânica clássica de mecânica newtoniana, já que muitos outros grandes cientistas tiveram a sua contribuição. Por isso que Newton disse: "Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes". Um destes gigantes com certeza foi Galileu, o criador do princípio da relatividade. Sim, Galileu é o autor do princípio da relatividade e não Einstein.

Em seu livro, "Diálogo sobre os Dois Principais Sistemas do Mundo", Galileu defende o sistema heliocêntrico, argumentando contra uma suposição dos apoiadores do geocentrismo. Para eles, a Terra deveria estar parada, já que se ela se movesse, perceberíamos o seu movimento, sentiríamos o vento soprando em nossos rostos, os pássaros e qualquer objeto jogado para o alto seria deixado para trás pelo movimento da Terra. É intuitivo supor estas coisas, mas Galileu rebateu com o experimento do barco. Encerrado dentro da cabine de um barco sem visão para o exterior, esteja o barco parado ou em movimento uniforme sem solavancos, tudo dentro da cabine se comportará normalmente. Moscas, borboletas e outros animalzinhos voadores voarão na mesma velocidade em todas as direções. Ao saltar de pés juntos para o alto, você aterrissará no mesmo lugar que estava. Se jogar algo para o seu amigo, não precisará de mais ou menos força para jogar em uma direção ou em outra. Um objeto solto do alto do mastro, quando visto por um observador no barco, cairá em linha reta. Logo, um observador dentro do barco, sem uma janela para observar o exterior, não saberá se o barco está em movimento ou parado (NUSSENZVEIG, 2013).

Esta é uma experiência que todos nós já tivemos. Se você estiver em um avião em voo, que se move em linha reta e não está acelerando ou desacelerando, tudo dentro do avião acontece como se ele estivesse parado e, se os comissários de bordo permitirem, você até pode caminhar normalmente. Nada indicará que você está voando à 800 km/h em relação ao chão. Este é o famoso *princípio de relatividade de Galileu*: "os resultados de qualquer experimento realizado por um observador em um sistema referencial inercial não dependem da sua velocidade relativa para outros observadores que não estão envolvidos no experimento". Em outras palavras, as leis da mecânica são idênticas em todos os referenciais inerciais. Portanto, é impossível detectar o movimento retilíneo e uniforme em relação a outro referencial inercial com base em qualquer experiência realizada.

Mas, o que é um referencial inercial? A resposta mais simples, são os referenciais que se movem em velocidade constante uns em relação aos outros e cuja segunda lei de Newton tem a forma mais simples, $\vec{F} = m\vec{a}$. Perceba que a lei de Newton nesta forma não é válida em referenciais não-inerciais, ou seja, acelerados.

Em um referencial inercial, na ausência de forças, a aceleração é nula. Não é o caso para referenciais acelerados. Pense que você está em um carro em movimento, sentado no banco do passageiro, e de repente o motorista pisa no freio. Você sentirá uma força o puxando para frente e o cinto o pressionará. Mas, na visão de um referencial inercial no chão, não existe uma força o projetando para frente. Para ele, tudo que existe é o efeito da inércia que faz com que o seu corpo tenda a seguir um movimento retilíneo e uniforme. Entretanto, na sua visão como passageiro, sentirá uma força, mas você está em um referencial acelerado, logo se trata de uma força de inércia.

Outro exemplo de força de inércia é a força centrífuga. Imagine-se novamente em um carro que está fazendo uma curva. Você sentirá uma força puxando o seu corpo para o lado. Visto por um referencial inercial, não há força alguma, apenas o efeito da inércia que faz com que o seu corpo tenda a manter a direção da velocidade original. Outro exemplo de força de inércia é a força de Coriolis que desempenha um papel importante no clima no planeta já que, como a Terra gira em seu próprio eixo, estamos em um referencial rotativo, ou seja, acelerado.

Os referenciais inerciais são privilegiados, pois não precisam de forças de inércia para uma descrição completa do movimento. Basta a segunda lei de Newton e veja porquê.

Suponha um referencial inercial S . Um referencial S' que se move com velocidade constante u em relação à S também é um referencial inercial. Isso é lógico, pois o quadro S' não acelera em relação a S , então uma partícula livre ainda descreverá um movimento retilíneo e uniforme em relação a S' . Supondo que a origem dos dois referenciais coincidam no instante inicial e S' se move apenas na direção x , como podemos observar na Figura 7, podemos deduzir a seguinte relação entre as coordenadas de S e S' :

$$x' = x - ut \quad (3.1)$$

$$y' = y \quad (3.2)$$

$$z' = z \quad (3.3)$$

$$t' = t, \quad (3.4)$$

chamadas de *transformações de Galileu*. Derivando a Equação 3.1 em relação ao tempo, temos:

$$v' = v - u, \quad (3.5)$$

conhecida como a *lei de composição de velocidades*. Esta lei faz muito sentido. Por exemplo, imagine que você está em um trem em movimento com uma velocidade u seguindo na direção norte. Se você jogar uma bola com velocidade v' na mesma direção, qual será a velocidade v para um observador parado fora do trem? Seguindo a lógica, a velocidade da bola v será a soma da velocidade do trem u com a velocidade da bola em relação ao trem v' , $v = v' + u$.

Derivando a Equação 3.5 novamente em relação ao tempo, e lembrando que u é uma constante, temos

$$a' = a. \quad (3.6)$$

Ou seja, a aceleração é igual para todos os referenciais inerciais. Implicando que a força também será igual para todos os referenciais inerciais:

$$F' = F, \quad (3.7)$$

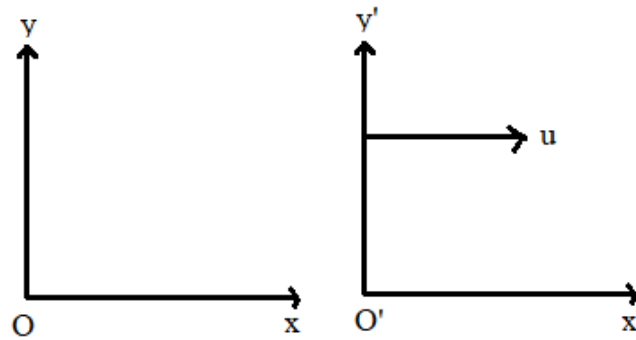


Figura 7 – Eixos dos referenciais S e S' com origens em O e O' , respectivamente. O referencial S' se move com velocidade u na direção do eixo x em relação à S .

pois as massas são constantes. Portanto, dizemos que a segunda lei de Newton, $F = ma$, é invariante sob transformações de Galileu. Como a segunda lei de Newton não muda nos referenciais inerciais, a física e todos os experimentos realizados devem ser idênticos para todos os referenciais inerciais, pois não existem referenciais inerciais privilegiados. Novamente, o princípio de relatividade de Galileu.

3.2 Espaço e Tempo de Newton

Vimos que os referenciais inerciais são especiais, já que preservam a forma da lei de Newton e não apresentam forças de inércia. Também vimos que os referenciais inerciais são aqueles que se movem com velocidade retilínea e uniforme em relação à outros referenciais inerciais. Mas esta definição é redundante, já que precisamos definir um referencial inercial primordial para encontrar os outros referenciais inerciais. Mas, se este referencial inercial primordial realmente existe, como encontrá-lo?

Para Newton, os referenciais inerciais não são acelerados em relação ao espaço absoluto. Entretanto, não temos acesso aos movimentos absolutos em relação ao espaço absoluto. Portanto, Newton diz que a melhor aproximação é definir referenciais inerciais como aqueles que se movem uniformemente em relação ao referencial ligado às estrelas distantes, ditas fixas. É óbvio que na maior parte das situações não precisamos ser tão meticulosos. Se a situação for adequada, podemos aproximar a Terra ou o centro de massa do sistema solar como um referencial inercial, por exemplo, quando o efeito das forças de inércia forem desprezíveis.

Em sua obra-prima, *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, Newton inicia fazendo algumas definições muito importantes antes de introduzir as suas Leis da Dinâmica. Ele começa falando sobre o tempo. Em suas próprias palavras: "O tempo absoluto, verdadeiro e matemático, por si mesmo e por sua própria natureza, flui uniformemente sem relação com qualquer coisa externa". Então, Newton continua, agora

definindo o espaço: "O espaço absoluto, em sua própria natureza, sem relação com qualquer coisa externa, permanece sempre similar e imóvel"(NEWTON, 2008).

Nestas definições, Newton estabelece o palco onde todos os eventos do universo se desenrolam. O espaço newtoniano é euclidiano, ou seja, plano. O tempo é absoluto. Dois observadores portando relógios previamente sincronizados irão medir o mesmo intervalo de tempo entre eventos.

Definimos um evento como um ponto (x, y, z) no espaço que acontece em um tempo t . No espaço e tempo absolutos de Newton, quaisquer dois eventos ocorrendo ao mesmo tempo para um observador, são simultâneos para todos os observadores. Portanto, existe uma fatia absoluta de espaço onde todos os eventos são simultâneos para um determinado momento do tempo, que chamamos de superfície de simultaneidade.

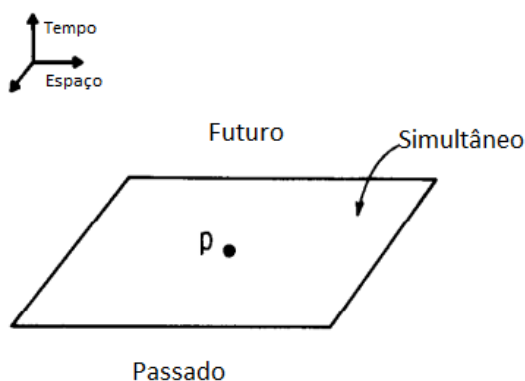


Figura 8 – Espaço e tempo na física newtoniana. Dado um evento p , todos os outros eventos estão no futuro de p , ou no passado de p ou são simultâneos à p . Essas possibilidades são mutuamente exclusivas para todos os observadores (WALD, 2010).

3.3 Gravitação Universal

A lei da gravitação universal, formulada por Newton, afirma que a força gravitacional de atração entre duas partículas, de massa m_1 e m_2 , é proporcional ao produto das massas e inversamente ao quadrado da distância, $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, entre as partículas:

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}, \quad (3.8)$$

onde $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ é a constante gravitacional universal. O vetor $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ é a posição da partícula de massa m_1 e $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ é a posição da partícula de massa m_2 . Lembre-se, o versor \hat{r} é a normalização do vetor \vec{r} :

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}, \quad (3.9)$$

onde $r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ é a magnitude.

Para calcularmos a aceleração gravitacional \vec{g} que uma partícula de massa m_1 sofre devido à influência gravitacional de m_2 , usamos a segunda lei de Newton:

$$m_1 \vec{g} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \hat{r}. \quad (3.10)$$

Podemos cancelar m_1 dos dois lados da equação, de modo que a aceleração gravitacional não depende da massa que está sofrendo a atração gravitacional:

$$\vec{g} = -\frac{Gm_2}{r^2} \hat{r}. \quad (3.11)$$

Este fato é conhecido desde Galileu - cujo experimento na torre de Pisa provavelmente não passa de lenda, assim como Newton e a maçã. Galileu observou que todos os corpos caem na Terra com a mesma aceleração. Isto faz com que a gravidade seja uma força realmente especial. A força elétrica, por exemplo, depende da carga elétrica q . Entretanto, a gravidade depende da própria massa inercial da segunda lei de Newton. Esta observação, que a massa inercial e gravitacional são idênticas, levou Einstein a supor que a gravidade é um efeito que decorre da própria geometria do espaço. No Capítulo 6 veremos isso com mais detalhes.

Exercício 1. Usando a lei da gravitação universal e a expressão para a força centrípeta

$$F = \frac{mv^2}{R}, \quad (3.12)$$

derive a terceira lei de Kepler para uma órbita circular de raio R .

Para uma fonte gravitacional consistindo de um grupo de partículas, a Equação 3.11 será a soma da contribuição vetorial de cada partícula:

$$\vec{g} = -G \sum_i \frac{m_i}{r_i^2} \hat{r}_i. \quad (3.13)$$

Para uma distribuição contínua de massa, tomamos o limite do contínuo onde o somatório se torna uma integral e m_i se torna um diferencial de massa dm . Como $dm = \rho dV$, temos que realizar uma integral sob todo o volume da distribuição de massa:

$$\vec{g} = -G \int \frac{\rho(r') \hat{r}'}{r'^2} dV'. \quad (3.14)$$

Exercício 2. Usando a Equação 3.11, mostre que a aceleração gravitacional \vec{g} é um campo conservativo, ou seja,

$$\vec{\nabla} \times \vec{g} = 0. \quad (3.15)$$

Dica: use coordenadas esféricas.

Todo campo conservativo pode ser escrito como o gradiente de um campo escalar. Então, a aceleração gravitacional pode ser escrita em função de um campo potencial Φ :

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi. \quad (3.16)$$

Trabalhar com funções escalares é muito mais fácil do que com vetores. Seria incrível se conseguíssemos encontrar uma equação diferencial para o potencial Φ . O leitor familiarizado com a eletrostática deve se lembrar da lei de Gauss na forma integral para o campo elétrico \vec{E} :

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (3.17)$$

onde a integral é realizada em uma superfície fechada.

O campo gravitacional é, em todos os efeitos, idêntico ao campo elétrico da eletrostática, com a diferença que a carga gravitacional é a massa e que a gravidade é sempre atrativa, pois as massas são sempre positivas. Portanto, podemos deduzir uma lei de Gauss para a gravidade, onde a integral de superfície da aceleração gravitacional deve ser proporcional à massa no interior da superfície:

$$\int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi GM, \quad (3.18)$$

onde o fator $4\pi G$ deve ser colocado para ser possível deduzirmos a aceleração devido a uma partícula pontual, Equação 3.11. Substituindo a Equação 3.16 e lembrando que $dM = \rho dV$:

$$\int_S \vec{\nabla}\Phi \cdot d\vec{S} = 4\pi G \int_V \rho dV. \quad (3.19)$$

Agora, vamos usar o Teorema do Divergente:

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}, \quad (3.20)$$

para podermos igualar as integrais de volume dessa forma:

$$\int_V (\nabla^2 \Phi) dV = 4\pi G \int_V \rho dV. \quad (3.21)$$

Se as integrais são realizadas no mesmo volume, então a igualdade continua válida, e encontramos a Equação de Poisson para a gravidade:

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho.} \quad (3.22)$$

Exercício 3. Usando a Equação de Poisson, mostre que o potencial para uma partícula,

$$\Phi = -\frac{GM}{r}, \quad (3.23)$$

satisfaz a Equação de Laplace,

$$\nabla^2\Phi = 0, \quad (3.24)$$

ou seja, a Equação de Poisson no vácuo, em uma região do espaço onde $\rho = 0$.

Exercício 4. Vamos resolver o problema de Kepler, onde temos o movimento de um planeta com massa m em torno do Sol de massa M , devido a interação gravitacional. O sistema de coordenadas natural para o problema são as coordenadas polares. O vetor aceleração é duas vezes a derivada no tempo da posição $\ddot{\vec{r}} = \frac{d^2}{dt^2}(r\hat{r})$, onde os versores das coordenadas polares são:

$$\hat{r} = \cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y} \quad (3.25)$$

$$\hat{\theta} = -\sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{y}. \quad (3.26)$$

Calcule a aceleração, tomando o cuidado de derivar os versores no tempo. Usando a Equação 3.10, você deverá encontrar duas equações, uma para cada componente vetorial:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{GMm}{r^2} \quad (3.27)$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0. \quad (3.28)$$

Verifique que a segunda equação pode ser simplificada desta forma:

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = \frac{dL}{dt} = 0, \quad (3.29)$$

onde L é o momento angular do planeta, que é uma constante, é conservado durante todo o movimento. Substituindo $\dot{\theta}$ de $L = mr^2\dot{\theta}$ na primeira equação, encontramos:

$$\ddot{r} - \frac{L^2}{m^2r^3} = -\frac{GM}{r^2}. \quad (3.30)$$

Fazendo a seguinte substituição $r \rightarrow u^{-1}$, e usando a regra da cadeia, prove que:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{L}{m} \frac{du}{d\theta} \quad (3.31)$$

e

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{L^2u^2}{m^2} \frac{d^2u}{d\theta^2}. \quad (3.32)$$

Substitua a última expressão na Equação 3.30, para encontrar uma equação diferencial de u em função de θ :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{GMm^2}{L^2}. \quad (3.33)$$

Verifique que esta é a equação do oscilador harmônico mais uma constante e tem como solução:

$$u(\theta) = A \cos(\theta) + \frac{GMm^2}{L^2}. \quad (3.34)$$

Em termos de $r(\theta)$, temos a equação da elipse com excentricidade e :

$$r(\theta) = \frac{1}{\frac{GMm^2}{L^2}(e \cos(\theta) + 1)}, \quad (3.35)$$

provando a primeira lei de Kepler.

4 Relatividade Especial

A teoria especial da relatividade surgiu no início do século XX, junto com a mecânica quântica. As duas teorias apareceram na tentativa de explicar dois experimentos que desafiavam as teorias clássicas: o experimento de Michelson-Morley e a radiação de corpo negro. A relatividade especial foi criada a partir dos trabalhos de Hendrik Lorentz, Henri Poincaré, Albert Einstein, Hermann Minkowski e outros. Mas a necessidade de reformular a mecânica clássica surgiu um pouco antes, com o eletromagnetismo.

4.1 Velocidade da Luz

Todo os fenômenos elétricos e magnéticos clássicos podem ser resumidos nas quatro Equações de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right), \quad (4.4)$$

onde \vec{E} e \vec{B} são os campos elétricos e magnéticos, respectivamente. A densidade de carga elétrica é ρ e a densidade de corrente é \vec{J} . As constantes ϵ_0 é a permissividade do vácuo e μ_0 é a permeabilidade do vácuo.

Vamos analisar cada uma das equações. A primeira, lei de Gauss para a eletrostática, diz que o campo elétrico é gerado por uma fonte de densidade de carga. A segunda equação, a versão da lei de Gauss para a magnetostática, afirma que não existem monopólos magnéticos. A terceira equação, conhecida como lei de Faraday, diz que um campo elétrico pode ser induzido através da variação de um campo magnético. Finalmente, a última equação, chamada de lei de Ampere, afirma que um campo magnético pode ser gerado através de cargas em movimento, ou a variação de um campo elétrico. O último termo da lei de Ampere, chamada de corrente de deslocamento, é uma correção de Maxwell colocada na mão que permite a existência de um fenômeno muito importante: as ondas eletromagnéticas.

No vácuo, sem a presença de cargas elétricas ($\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$), as equações de

Maxwell se tornam mais simétricas:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (4.5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.6)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.7)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (4.8)$$

Tomando a lei de Faraday, vamos aplicar o rotacional:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{B}). \quad (4.9)$$

Usando a identidade:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}, \quad (4.10)$$

sabendo que o divergente de \vec{E} é zero no vácuo e substituindo o rotacional de \vec{B} da lei de Ampere, temos:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (4.11)$$

Esta é uma equação de onda para o campo elétrico \vec{E} . Fazendo o mesmo procedimento, agora para o campo magnético, calculando o rotacional da lei de Ampere, encontramos a mesma equação de onda para \vec{B} . As condições das equações de Maxwell dizem que o campo elétrico deve estar acoplado com o campo magnético, oscilando em fase perpendiculares à direção de propagação, formando as ondas eletromagnéticas. Analisando a forma da Equação 4.11, vemos que a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas é:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \simeq 3.10^8 \text{ m/s}. \quad (4.12)$$

Quando James Clerk Maxwell viu este valor, sabia que se tratava da velocidade de propagação da luz. A conclusão foi natural: a luz é uma onda eletromagnética.

Entretanto, surge uma questão importante: c é a velocidade da luz em relação ao quê? As Equações de Maxwell não especificam um referencial na qual a velocidade da luz é c . Se tratando de uma equação de onda em uma corda, por exemplo, sabemos que a velocidade da onda é a sua velocidade de propagação em relação à corda. Da mesma, a velocidade do som é a sua velocidade em relação ao meio em que se propaga, ou seja, o ar. Qual o meio em que a luz se propaga? A luz pode se propagar no vácuo, sabemos disso, pois vemos a luz de estrelas e galáxias distantes que atravessa o espaço vazio. Portanto, os físicos no final do século XIX e início do XX achavam que deveria haver um meio invisível pelo qual a luz se propaga, que permeia todo o espaço, chamado éter.

Se a luz respeita a lei de composição de velocidades e c é a velocidade da luz em relação ao éter, então qualquer observador com velocidade v em relação ao éter

deve medir uma velocidade da luz $c' = c - v$. Mas, resumindo a história, o éter nunca foi detectado. Para deixar tudo mais misterioso, nenhuma variação desse tipo foi detectada na velocidade da luz. Em especial, o experimento de Michelson-Morley foi de suma importância. Neste experimento, foi usado um interferômetro, aproveitando da velocidade de translação da Terra em torno do Sol, para medir uma pequena alteração na velocidade da luz. Se a luz realmente respeitasse a lei de composição de velocidades, seria possível medir uma variação na velocidade da luz durante diferentes épocas do ano, já que a Terra estaria se movendo em diferentes direções em relação ao éter. O resultado foi negativo. A luz simplesmente não respeita as transformações de Galileu e despreza a lei de composição de velocidades.

Ainda houveram tentativas engenhosas para salvar o éter. Lorentz, por exemplo, sugeriu que o vento de éter causava uma contração no comprimento do braço do interferômetro, explicando o resultado negativo de Michelson e Morley. Porém, lembre-se da Navalha de Occam: entre duas hipóteses igualmente possíveis, escolha a mais simples, ou aquela com o menor número de suposições. O universo prefere a simplicidade. Se o éter não foi detectado, pode ser porque ele não existe. Não há diferença entre um éter indetectável e um éter inexistente. Se a luz não sofre variação em sua velocidade, deve ser porque é uma constante para todo mundo. Foi exatamente esse pensamento que levou Einstein a postular o *princípio da universalidade da velocidade da luz*: "a velocidade da luz relativo a qualquer observador inercial é c , independentemente do movimento da fonte da luz relativo ao observador" (SCHUTZ, 2022). Este pequeno postulado nos levou a uma completa reformulação dos nossos conceitos de espaço e tempo.

4.2 Transformações de Lorentz

O primeiro conceito newtoniano que é revisto com a relatividade especial é a simultaneidade absoluta. Considere dois referenciais inerciais, S e S' , onde S' se move com velocidade u em relação à S . Suponha que no instante inicial, as origens O e O' coincidem. Imagine que, neste instante, é emitido um sinal que se propaga em todas as direções, fazendo uma frente de onda esférica centrada em $O = O'$. Por causa do *princípio da universalidade da velocidade da luz*, S e S' verão a frente de onda se expandir com a mesma velocidade, logo, a esfera estará centrada em O para S e em O' para S' . "Como é possível que a mesma esfera tenha dois centros diferentes?", foi o paradoxo que Einstein pensou (NUSSENZVEIG, 2014).

Para responder esta questão, devemos antes nos perguntar o que é uma frente de onda? É uma superfície de simultaneidade em que todos os pontos recebem o sinal luminoso ao mesmo tempo. Logo, se a esfera da frente de onda não é igual, ou seja, a superfície de simultaneidade dos dois referenciais não é a mesma, então resol-

vemos o problema. É claro, resolvemos o problema ao custo de abandonarmos a ideia de simultaneidade absoluta.

Tudo isso parece bizarro, mas pense nisso: como podemos realmente saber que dois eventos distantes são simultâneos? Só podemos saber que um evento aconteceu quando a informação sobre ele, seja luz visível, ondas de rádio, etc, chega até nós. Partindo disso, Einstein nos mostra uma forma de saber quando dois eventos são simultâneos. Se um evento A , que acontece no ponto P_A no instante t_A , marcado pela emissão de um sinal luminoso, e um evento B acontece em P_B no instante t_B e também emite um sinal luminoso, dizemos que A é simultâneo à B se os sinais luminosos se encontram no ponto médio do segmento de reta que liga os pontos P_A e P_B . É uma definição totalmente razoável, se você parar para pensar. Mas, perceba que ela depende do ponto médio do segmento P_AP_B que, por sua vez, depende do referencial. Logo, referenciais inerciais diferentes, em estados de movimento distintos, irão ter uma noção diferente de simultaneidade.

Imagine dois observadores, João e Maria, sendo que João está sentado no centro de um trem em movimento e Maria está parada ao lado dos trilhos. Imagine também que, no exato momento em que João está passando por Maria dois raios caem nas extremidades opostas do trem. Os raios são sinais luminosos dos eventos A e B . Maria, que está no centro das distâncias entre os raios, verá as luzes ao mesmo tempo, e concluirá que os raios caíram no mesmo instante, ou seja, os eventos A e B são simultâneos. Agora, veja as coisas pelo ponto de vista de João. Ele está viajando em direção ao sinal luminoso de um raio e se distanciando do sinal luminoso do outro raio. Como a luz tem uma velocidade finita, João verá primeiro o raio relacionado com o evento A e depois o raio relacionado com o evento B . Concluirá, portanto, que o evento A aconteceu antes do evento B , logo, não são simultâneos. Se houver outra personagem na história, Joana, viajando em um trem na direção contrária à João, irá concluir que o evento B aconteceu antes do evento A . Quem está certo? Todos, no seu próprio ponto de vista. Esta é a relatividade da simultaneidade, que desafia os conceitos preestabelecidos de tempo, presente, passado e futuro.

Precisamos de um novo arcabouço matemático para descrever os eventos na perspectiva do princípio da constância da velocidade da luz. Por onde começamos? Um bom começo é encontrar uma transformação entre referenciais inerciais que possa substituir as transformações de Galileu. Um ótimo ponto de partida é analisar o problema do início da seção, onde temos os referenciais S e S' , com S' se movendo com velocidade uniforme v , onde as origens O e O' coincidem no instante inicial. Para um sinal luminoso emitido em $O = O'$ no instante $t = t' = 0$, a frente de onda irá se expandir como uma esfera com raio $r = ct$ em S e raio $r' = ct'$ em S' , com velocidade c

para ambos os referenciais. A frente de onda deve satisfazer as equações das esferas:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \quad (4.13)$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0. \quad (4.14)$$

Uma transformação entre coordenadas $(t, x, y, z) \rightarrow (t', x', y', z')$ deve satisfazer essas equações. Podemos levar boas páginas de álgebra trabalhosa, até encontrarmos o resultado que leva o nome do seu descobridor: as *transformações de Lorentz*

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (4.15)$$

$$y' = y \quad (4.16)$$

$$z' = z \quad (4.17)$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right), \quad (4.18)$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ é o fator de Lorentz. Apenas observando, podemos notar uma grande diferença entre as transformações de Lorentz e de Galileu. Em Lorentz, o tempo não é absoluto, mas é transformado e depende de t e x , o que justifica a relatividade da simultaneidade. Perceba também que, quando $v \ll c$, as transformações de Lorentz tendem às transformações de Galileu. Ou seja, os efeitos relativísticos só se tornam relevantes quanto mais v se aproxima da velocidade da luz. Além disso, as transformações de Lorentz só fazem sentido quando $v < c$. Aparentemente, a velocidade da luz é um limite de velocidade cósmico.

Exercício 5. Mostre que a equação de onda EM é invariante sob transformações de Lorentz, ou seja, mantém a mesma forma em todos os referenciais inerciais. Dica: use a regra da cadeia

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (4.19)$$

Usando as transformações de Lorentz, podemos derivar novos fenômenos fascinantes. Por exemplo, vamos calcular o intervalo de tempo $\Delta t'$ que se passa para S' em função de Δt que é o quanto se passa em S . O intervalo de tempo $\Delta t'$ é simplesmente a diferença entre dois tempos, t'_A e t'_B medidos no relógio de S , ou seja, $\Delta t' = t'_B - t'_A$. Usando as transformações de Lorentz, temos:

$$\Delta t' = t'_B - t'_A = \gamma(t_B - t_A - \frac{v}{c^2}(x_B - x_A)) \quad (4.20)$$

$$\Rightarrow \Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right). \quad (4.21)$$

O intervalo Δx é simplesmente a distância que o referencial S' percorreu no tempo Δt , ou seja, $\Delta x = v\Delta t$. Portanto,

$$\Delta t' = \gamma \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \Delta t \quad (4.22)$$

$$\Rightarrow \Delta t' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t. \quad (4.23)$$

Perceba que, para v não nulo, $\Delta t' < \Delta t$. Este é o fenômeno conhecido como *dilatação temporal*: relógios em movimento batem mais lentamente do que relógios em repouso. Este é um fenômeno muito observado nos raios cósmicos. Sabemos que as partículas múons são produzidos quando raios cósmicos colidem com os átomos da atmosfera e uma fração deles chega na superfície. A vida média em laboratório, o tempo que o múon leva para decair, é tão rápido que, mesmo um múon viajando a uma velocidade próxima a da luz, não conseguiria chegar na superfície a tempo. Entretanto, a vida média é um tempo que deve ser tomado no referencial de repouso do múon. Para o referencial na Terra, o tempo é muito maior, devido a dilatação temporal, tornando possível a detecção do múon na superfície.

Além da dilatação temporal, existe outro fenômeno intrigante. Suponha uma barra em movimento, com comprimento próprio medido em seu próprio referencial de repouso de $l_0 = x'_B - x'_A$. Usando as transformações de Lorentz:

$$l_0 = x'_B - x'_A = \gamma(x_B - x_A - v(t_B - t_A)). \quad (4.24)$$

Perceba que para fazer uma medição, é necessário que as duas extremidades da barra estejam em x_B e x_A no mesmo instante, ou seja, simultaneamente, de modo que $t_B = t_A$. Portanto,

$$l_0 = \gamma(x_B - x_A) = \gamma l \quad (4.25)$$

$$\Rightarrow l = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} l_0. \quad (4.26)$$

Observe que, para v não nulo, $l < l_0$. Esta é a *contração de Lorentz-Fitzgerald*: o comprimento de uma barra em movimento é menor do que o seu comprimento próprio.

Exercício 6. Usando as transformações de Lorentz, derive a lei de composição de velocidades relativística:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2} u_x} \quad (4.27)$$

$$u'_y = \frac{u_y}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2} u_x)} \quad (4.28)$$

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma(1 - \frac{v}{c^2} u_x)} \quad (4.29)$$

A partir do Exercício 6, perceba que, diferente da lei da composição de velocidades das transformações de Galileu, as transformações de Lorentz afetam todas as componentes da velocidade. Isso acontece porque, para calcular a velocidade u'_y , por exemplo, fazemos dy'/dt' . Embora $dy' = dy$, $dt' \neq dt$.

Outro fato interessante dessa nova lei de composição de velocidade é vermos o que acontece quando $u_x = c$, ou seja, o referencial S mede a velocidade da luz. Fazendo uso da Equação 4.27, temos que $u'_x = c$. Ou seja, a velocidade da luz é uma constante para todos os referenciais inerciais, obedecendo o princípio da universalidade da velocidade da luz de Einstein.

4.3 Espaço-Tempo de Minkowski

Vimos que medições de tempo e comprimentos são relativos e dependem do referencial. Entretanto, nem tudo é relativo na teoria da relatividade. Suponha dois eventos, $A = (t_A, x_A, y_A, z_A)$ e $B = (t_B, x_B, y_B, z_B)$ em S . Calculamos o intervalo espaço-temporal entre esses dois eventos:

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2, \quad (4.30)$$

onde $\Delta t = t_A - t_B$, $\Delta x = x_A - x_B$, etc. Agora, calcule as coordenadas dos eventos A e B em S' , de acordo com as transformações de Lorentz. Substitua os eventos transformados na Equação 4.30. Você deve obter:

$$\Delta s'^2 = -c^2 \Delta t'^2 + \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2. \quad (4.31)$$

O intervalo espaço-temporal é igual em todos os referenciais inerciais. Esta é a *invariância do intervalo espaço-temporal* entre dois eventos:

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2, \quad (4.32)$$

que destaca uma estrutura absoluta para todos os referenciais inerciais da relatividade especial.

Vale notar que o intervalo espaço-temporal é como a fórmula para determinar distâncias entre pontos na geometria euclidiana, com a diferença que o coeficiente de Δt^2 é sempre negativo. Em alguns livros você verá os sinais trocados, coeficientes negativos para as coordenadas espaciais Δx , Δy e Δz , e sinal positivo para Δt . Isto é apenas uma convenção que terá o mesmo resultado no final das contas. O importante é que a coordenada temporal e as coordenadas espaciais tenham essa diferença, que expressa que o tempo é fundamentalmente diferente do espaço, já que ele sempre passa e nunca podemos ficar em repouso em relação ao tempo. Além disso, devemos multiplicar o

tempo pela velocidade da luz c , que é uma constante em todos os referenciais inerciais e serve de fator de conversão de unidades de tempo para comprimento.

Agora, suponha que os eventos A e B estejam infinitamente próximos. Logo, os deltas serão convertidos em diferenciais e teremos a seguinte estrutura invariante sob transformações de Lorentz:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (4.33)$$

Esta é a métrica do *espaço-tempo de Minkowski*, e contém toda a informação acerca da estrutura do espaço e tempo na relatividade especial. Veja o que Minkowski disse depois de descobrir esta estrutura elegante: "Daqui por diante, o espaço, e o tempo, como entidade separada, estão fadados a se dissiparem em meras sombras, e somente uma espécie de união dos dois preservará uma realidade independente."(NUSSENZVEIG, 2014)

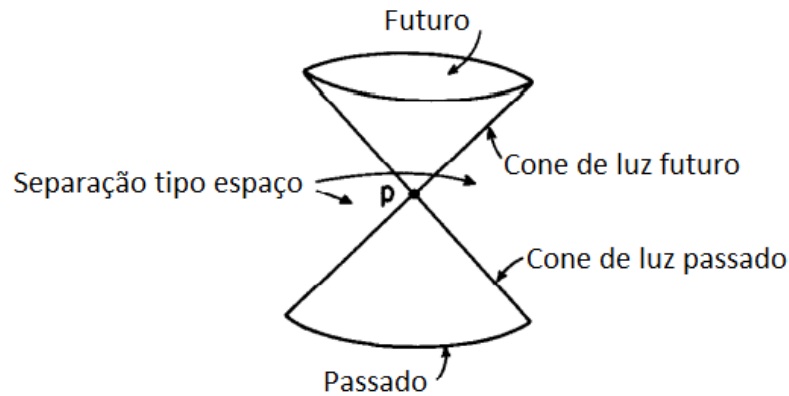


Figura 9 – Estrutura causal do espaço-tempo de Minkowski.(WALD, 2010)

O espaço-tempo de Minkowski é plano, já que não exibe curvatura, mas é pseudo-euclidiano, pois o coeficiente da coordenada temporal é negativo e é possível termos intervalos ds^2 negativos. Para partículas com massa, que só podem viajar com velocidades menores do que a velocidade da luz, pois o fator de Lorentz se torna complexo quando $v > c$, temos que o deslocamento espacial é sempre menor do que o deslocamento temporal e, portanto, $ds^2 < 0$:

$$v^2 < c^2 \quad (4.34)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 < c^2 \quad (4.35)$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 < c^2 dt^2 \quad (4.36)$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 < 0 \quad (4.37)$$

$$ds^2 < 0. \quad (4.38)$$

Trajétórias de partículas massivas cujos intervalos espaço-temporais entre eventos da trajetória são negativos são chamadas de *linhas de mundo tipo-tempo*. Partículas sem massa, como o fóton, viajam sempre à velocidade da luz, logo descrevem trajetórias onde o deslocamento espacial é igual a deslocamento temporal, então $ds^2 = 0$, chamadas *linhas de mundo tipo-luz* ou *tipo-nulas*. Para partículas exóticas que viajam mais rapidamente do que a luz, chamadas táquions, nunca detectadas, viajariam em trajetórias cujos eventos tem uma separação espacial maior do que temporal, logo $ds^2 > 0$ e são chamadas *linhas de mundo tipo-espaço*.

No espaço-tempo de Minkowski, a superfície absoluta de simultaneidade da física newtoniana é substituída por uma nova estrutura de causalidade. Como nenhuma partícula conhecida pode viajar mais rápido do que a luz, então as linhas de mundo tipo-nulas são o jeito mais rápido que uma informação pode ir de um evento até outro. Se traçarmos um *diagrama de espaço-tempo*, onde ct e x são eixos dispostos em ângulos retos, a luz viajaria em um ângulo de 45° , pois sua trajetória será $x = \pm ct$. Partículas massivas necessariamente viajam em trajetórias no diagrama de espaço-tempo com um ângulo menor do que 45° .

Portanto, para cada evento p , podemos traçar cones de luz, como na Figura 9. Como nenhuma informação pode viajar mais rápido do que a luz, os cones de luz separam eventos que podem estar relacionados casualmente com p dos que não podem. Qualquer partícula massiva partindo de p irá viajar dentro dos cones de luz. Eventos fora dos cones de luz são separados espacialmente e não possuem uma relação causal com p . Eventos dentro dos cones de luz são divididos entre o passado (que pode ter causado p) e o futuro (que p pode ter causado).

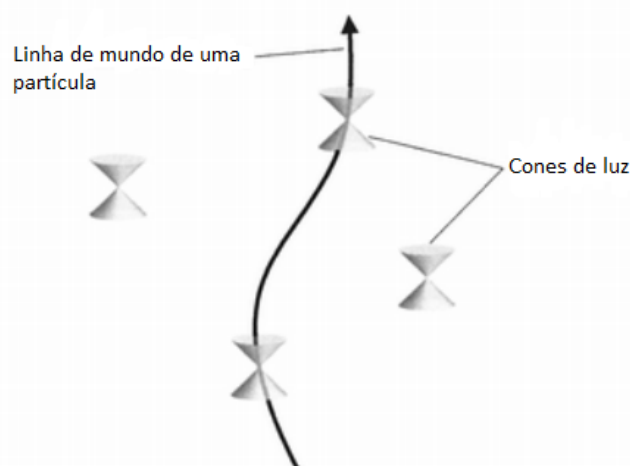


Figura 10 – A linha de mundo de uma partícula é a sua trajetória no espaço-tempo, que deve estar dentro dos cones de luz de cada ponto da trajetória, pois as partículas não podem viajar mais rápido do que a luz.(CARROLL, 2019)

4.4 Quadrivetores

Por simplicidade, daqui em diante, adotaremos unidades onde $c = 1$, ou seja, $1 \text{ s} = 3 \times 10^8 \text{ m}$. Nestas unidades, a velocidade é uma quantidade adimensional e a energia será igual à massa. Para voltarmos às unidades convencionais, devemos usar análise dimensional.

Um evento qualquer pode ser descrito por um quadrivector $x^\alpha = (t, x, y, z)$. Um diferencial entre dois eventos infinitamente próximos, dado pelo quadrivector $dx^\alpha = (dt, dx, dy, dz)$. Usando essa notação, podemos escrever a Equação 4.33 assim:

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.39)$$

onde $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$, e $\eta_{\mu\nu}$ é uma matriz 4×4 chamada de *tensor métrico*:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

Esta é uma boa hora para introduzirmos a *convenção de Einstein*: omitimos o somatório, assumindo que índices superiores e inferiores repetidos indicam um somatório implícito. Usando desta convenção, o intervalo espaço-temporal se torna

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (4.41)$$

Usando a notação de matriz, podemos escrever a transformação de Lorentz desta forma:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Agora, com a notação de quadrivetores, fica muito mais simplificado

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} x^\nu, \quad (4.43)$$

onde Λ é a matriz das transformações de Lorentz. Os quadrivetores se transformam, de um referencial inercial para outro, exatamente como as coordenadas:

$$A^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} A^\nu. \quad (4.44)$$

O tensor métrico $\eta_{\mu\nu}$ também pode ser usado para realizar o produto escalar entre dois quadrivetores. Por isso, a Equação 4.41 nada mais é do que o produto escalar

do vetor $dx^\alpha = (dt, dx, dy, dz)$ consigo mesmo, ou seja, o quadrado da norma do vetor que separa dos eventos infinitamente próximos.

Suponha dois quadrivetores com componentes $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ e $B^\mu = (B^0, B^1, B^2, B^3)$. O produto escalar entre eles é definido assim:

$$A^\mu B_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = -A^0 B^0 + A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3. \quad (4.45)$$

Lembremos, o produto escalar, como o próprio nome já diz, é um escalar, portanto é um invariante sob transformações de Lorentz, assim como o intervalo espaço-temporal. Por invariante sob transformações de Lorentz, significa que é uma constante em todos os referenciais inerciais.

A notação $A^\mu B_\mu$ para o produto escalar é muito útil, pois também define outro objeto chamado vetor dual ou, simplesmente, um vetor com índice inferior. Por exemplo, o vetor dual B_μ é definido:

$$B_\mu = \eta_{\mu\nu} B^\nu. \quad (4.46)$$

Ou seja, podemos abaixar o índice de um vetor usando o tensor métrico.

Exercício 7. Usando a Equação 4.46, mostre que $B_0 = -B^0$, $B_1 = B^1$, $B_2 = B^2$ e $B_3 = B^3$.

Analogamente, podemos subir um índice usando o inverso da métrica:

$$B^\mu = \eta^{\mu\nu} B_\nu. \quad (4.47)$$

Exercício 8. Usando a Equação 4.47, mostre que $\eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu$. Onde δ_ρ^μ é o Delta de Kronecker, definido por

$$\delta_\nu^\mu = \begin{cases} 1 & \text{se } \mu = \nu \\ 0 & \text{se } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (4.48)$$

Portanto, $\eta^{\mu\nu}$ é a inversa de $\eta_{\mu\nu}$.

Se os vetores se transformam de um referencial inercial para outro de acordo com a Equação 4.44, como será que um vetor com índice inferior se transforma? Um bom palpite é que o vetor com índice inferior se transforma com a inversa da matriz de transformação de Lorentz

$$A_{\mu'} = \Lambda^\lambda_{\mu'} A_\lambda, \quad (4.49)$$

onde $\Lambda^\lambda_{\mu'} \Lambda^{\mu'}_\rho = \delta^\lambda_\rho$. Para verificar a validade do nosso palpite, vamos calcular o produto escalar entre A^μ consigo mesmo,

$$A^\mu A_\mu = A^{\nu'} A_{\nu'}. \quad (4.50)$$

Tanto para as coordenadas de S quanto para S' o quadrado da norma é uma constante, já que é um invariante de Lorentz. Usando a Equação 4.44 e a Equação 4.49, temos

$$A^\mu A_\mu = \Lambda^{\nu'}_\rho A^\rho \Lambda^\lambda_{\nu'} A_\lambda \quad (4.51)$$

$$\Rightarrow A^\mu A_\mu = (\Lambda^{\nu'}_\rho \Lambda^\lambda_{\nu'}) A^\rho A_\lambda \quad (4.52)$$

$$\Rightarrow A^\mu A_\mu = \delta^\lambda_\rho A^\rho A_\lambda \quad (4.53)$$

$$\Rightarrow A^\mu A_\mu = A^\lambda A_\lambda. \quad (4.54)$$

Provamos que o nosso palpite estava correto e os vetores duais se transformam com a inversa da matriz de transformação de Lorentz. Lembrando que índices inferiores e superiores implicam um somatório, são chamados de índices mudos. Logo, na Equação 4.54, $A^\mu A_\mu$ e $A^\lambda A_\lambda$ querem dizer a mesma coisa.

Exercício 9. Mostre que a inversa da matriz de transformação de Lorentz $\Lambda^\mu_{\nu'}$, na qual $\Lambda^\mu_{\nu'} \Lambda^{\nu'}_\rho = \delta^\mu_\rho$, é a matriz de transformação $\Lambda^{\nu'}_\rho$ onde substituímos v por $(-v)$.

4.5 Mecânica Relativística

Começamos definindo o *tempo próprio* τ como o tempo que passa no próprio referencial de repouso de um observador, ou seja, é o tempo que o observador vê em seu relógio durante a trajetória. Portanto, em seu referencial de repouso, o observador só se desloca no tempo, $dx' = dy' = dz' = 0$. Então, $ds'^2 = -d\tau^2$. Usando a invariância do intervalo espaço-temporal, em um referencial inercial que vê este observador se movendo:

$$-d\tau^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (4.55)$$

Deixando dt em evidência:

$$d\tau^2 = \left[1 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right] dt^2. \quad (4.56)$$

Que é o mesmo que

$$d\tau = \sqrt{1 - v^2} dt = \frac{dt}{\gamma}. \quad (4.57)$$

Note que esta equação é a mesma da dilatação temporal. O tempo passa mais devagar para observadores em movimento do que para observados em repouso.

Suponha uma partícula massiva que descreve uma trajetória pelo espaço-tempo, ou seja, uma linha de mundo tipo-tempo. Podemos parametrizar a trajetória desta partícula $x^\mu(\lambda)$, com um parâmetro λ . O vetor tangente à trajetória é $U^\mu = dx^\mu/d\lambda$. Uma boa escolha de um parâmetro são quantidades invariantes, como o tempo próprio τ . Neste caso, o vetor tangente será chamada de *quadrivelocidade*:

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (4.58)$$

No referencial de repouso da partícula, onde $d\tau = dt$ e $dx = dy = dz = 0$, a quadrivelocidade será $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$. A norma da quadrivelocidade, que é o produto escalar de U^μ com ele mesmo, será:

$$U^\mu U_\mu = -1. \quad (4.59)$$

Lembre-se, o produto escalar é um invariante, portanto, é uma constante em todos os referenciais inerciais. Isso significa que a quadrivelocidade tem sempre a mesma norma pelo espaço-tempo. Para o referencial inercial de repouso, a partícula só se move na direção temporal. Para outro referencial, o movimento pelo tempo é desviado um pouco para o espaço. Mas a soma dos movimentos pelo espaço-tempo é sempre constante.

Em um referencial inercial onde a partícula se move com velocidade v , a quadrivelocidade é:

$$U^\mu = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau} \right). \quad (4.60)$$

Usando a Equação 4.57, onde temos o tempo próprio como função do tempo t

$$U^\mu = (\gamma, \gamma v, 0, 0) = \gamma(1, v, 0, 0). \quad (4.61)$$

Exercício 10. Prove a Equação 4.61 usando as transformações de Lorentz. Mostre que $U^\mu U_\mu = -1$ neste referencial.

Também podemos definir a *quadrilaceração* como a derivada da quadrivelocidade em relação ao tempo próprio:

$$a^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}. \quad (4.62)$$

Exercício 11. Partindo de $U^\mu U_\mu = -1$, prove que a quadrivelocidade e a quadrilaceração são ortogonais, $U^\mu a_\mu = 0$.

Com a quadriaceleração, podemos definir uma *quadriforça* e a versão relativística da segunda lei de Newton

$$f^\mu = ma^\mu. \quad (4.63)$$

Assim como a segunda lei de Newton original é invariante sob transformações de Galileu, a Equação 4.63 é invariante sob transformações de Lorentz. Em outras palavras, a Equação 4.63 matém a mesma forma em todos os referenciais inerciais.

Além disso, podemos definir o *quadrimento*:

$$p^\mu = mU^\mu. \quad (4.64)$$

Para o referencial de repouso da partícula, o quadrimento é $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$. A energia de uma partícula é a componente temporal do quadrimento, $p^0 = E$. Como é um componente de um vetor, a energia é uma quantidade que depende do referencial. No referencial de repouso, $E = m$. Ou, colocando de volta o c no seu devido lugar, $E = mc^2$, que é a equação mais famosa do mundo, a energia de repouso da partícula. Para um referencial que vê a partícula se movendo com velocidade v , aplicando as transformações de Lorentz

$$p^\mu = (\gamma m, \gamma m v, 0, 0) = \gamma m(1, v, 0, 0). \quad (4.65)$$

Exercício 12. Mostre que, para $v \ll c$,

$$p^0 = E = m + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \quad (4.66)$$

Ou seja, para baixas velocidades, a energia relativística é a soma da energia de repouso com a energia cinética newtoniana.

Calculando a norma de p^μ no referencial de repouso

$$p^\mu p_\mu = -m^2, \quad (4.67)$$

que é uma constante em todos os referenciais inerciais. Para um referencial onde $p^\mu = (E, \vec{p})$, a norma será:

$$p^\mu p_\mu = -E^2 + p^2. \quad (4.68)$$

Igualando as equações nos dois referenciais, chegamos na equação

$$E^2 = m^2 + p^2. \quad (4.69)$$

Como a energia e o momento são componentes do quadrimento, dependem do referencial que os está medindo. Mas, em todos os referenciais, a Equação 4.69 é verdadeira. Portanto, devemos substituir as leis de conservação de energia e momento

separadamente pela conservação do *quadrimento*. Esta relação torna possível um fenômeno muito interessante: a conversão de energia em massa ou massa em energia. Por exemplo, quando um fóton de alta energia interage com um núcleo atômico, pode ser convertido em um par elétron-pósitron. Da mesma forma, um par elétron-pósitron, ao colidirem, se aniquilam mutuamente, transformando toda a massa em energia na forma de fótons de raios gama.

Suponha um observador com quadrivelocidade U_{obs}^μ e uma partícula com quadrimento p^μ . O observador e a partícula não estão necessariamente com a mesma quadrivelocidade. No referencial O' do observador, $U_{obs}^{\mu'} = (1, 0, 0, 0)$ e $p^{\mu'} = (E', p^{1'}, p^{2'}, p^{3'})$. Então, a energia da partícula medida pelo observador é:

$$E' = -p_{\mu'} U_{obs}^{\mu'} \quad (4.70)$$

Mas este é um produto escalar, portanto, é invariante em todos os referenciais inerciais. Logo, a energia de uma partícula relativa ao observador pode calculada em qualquer referencial fazendo

$$E' = -p_\mu U_{obs}^\mu \quad (4.71)$$

Exercício 13. Usando a equação de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i} \right) = 0, \quad (4.72)$$

onde o índice latino só compreende as coordenadas espaciais ($i = 1, 2, 3$), mostre que a lei da inércia é uma consequência do movimento pelo espaço-tempo de Minkowski na ausência de forças. Dica: faça o tempo próprio τ como ação, ou seja, usando a Equação 4.57, defina a ação como

$$\tau = \int \sqrt{1 - v^2} dt. \quad (4.73)$$

Para partículas sem massa, como os fótons, não é possível usar o tempo próprio como parâmetro da linha de mundo tipo-nulo, já que $-d\tau^2 = ds^2 = 0$. Entretanto, existem muitas parametrizações possíveis. Por exemplo, para um fóton em uma trajetória $x = t$, podemos usar a seguinte parametrização $x^\mu = (\lambda, \lambda, 0, 0)$, que tem uma quadrivelocidade

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} = (1, 1, 0, 0). \quad (4.74)$$

Veja que a norma da quadrivelocidade é $U^\mu U_\mu = 0$. Isto é verdade para todas as linhas de mundo tipo-nulas, pois $ds^2 = 0$, então

$$\left[- \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\lambda} \right)^2 \right] d\lambda^2 = 0. \quad (4.75)$$

Como $m = 0$, a Equação 4.69 fica $E = p$. Esta relação faz sentido, se lembrarmos que para um fóton $E = \hbar\omega$ e $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, onde $|\vec{k}| = \omega$.

Exercício 14. Vamos demonstrar o Efeito Doppler relativístico. Suponha que um observador inercial S' está carregando uma fonte de luz, como uma lanterna. Ele aponta a lanterna para a direção x . Digamos que o fóton que sai da lanterna tem energia $p^{0'} = E'$. Como as componentes $p^{y'}$ e $p^{z'}$ do quadrimomento são nulas e o fóton não tem massa ($m = 0$), a norma do quadrimomento é zero:

$$p^{\mu'} p_{\mu'} = -(p^{0'})^2 + (p^{x'})^2 = 0, \quad (4.76)$$

portanto, $p^{x'} = E'$. Vamos fazer a transformação de Lorentz de $p^{0'}$ para o referencial S que vê o referencial S' se movendo com velocidade v na direção x . Fazendo uso da Equação 4.44, temos

$$p^{0'} = \Lambda^{0'}_{\mu} p^{\mu} = \Lambda^{0'}_0 p^0 + \Lambda^{0'}_1 p^1 \quad (4.77)$$

$$\Rightarrow p^{0'} = \gamma p^0 - \gamma v p^x \quad (4.78)$$

$$\Rightarrow E' = \gamma E (1 - v). \quad (4.79)$$

Usando a expressão tirada da mecânica quântica, $E = h\nu$, que relaciona a energia do fóton com a sua frequência ν , mostre o Efeito Doppler relativístico:

$$\nu = \nu' \sqrt{\frac{1 - v}{1 + v}}. \quad (4.80)$$

Perceba que, quando $v > 0$, a fonte de luz está se afastando, $\nu < \nu'$, o observador em S verá a luz com uma frequência tendendo em direção ao vermelho (*redshift*). Quando $v < 0$, a fonte de luz está se aproximando, $\nu > \nu'$, e o observador em S verá a luz com uma frequência tendendo em direção ao azul (*blueshift*).

4.6 Forma Tensorial das Equações de Maxwell

As equações de Maxwell são invariantes sob transformações de Lorentz. Isso é lógico, pois foi com o eletromagnetismo que a relatividade especial começou. Mas, olhando para as equações de Maxwell em sua forma convencional (Equações 4.1 - 4.4), não fica claro que é realmente o caso. Portanto, vamos escrever as equações de Maxwell no formato tensorial, que é a linguagem que denota a invariância sob transformações entre coordenadas de referenciais inerciais. Começamos introduzindo o tensor de Fa-

raday:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

Não se preocupe ainda em entender a definição matemática formal de um tensor neste momento. Agora, tudo o que precisa saber é que $F^{\mu\nu}$ é um tensor com dois índices superiores, o que significa que possui 16 componentes. Um tensor com dois índices superiores se comporta como a multiplicação tensorial de dois vetores, digamos, $A^\mu B^\nu$. Por multiplicação tensorial, queremos dizer que o resultado $F^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu$ é o conjunto de todas as combinações possíveis entre as componentes de A^μ e B^ν .

Mas como o tensor $F^{\mu\nu}$ se transforma de um referencial inercial para outro? Cada índice correspondente ao vetor se transformará separadamente, seguindo a regra de transformação de vetores (Equação 4.44):

$$F^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}_{\rho} \Lambda^{\nu'}_{\gamma} F^{\rho\gamma}. \quad (4.82)$$

Lembre que podemos abaixar o índice de um vetor e encontrar o seu vetor dual. Podemos fazer o mesmo para o tensor $F^{\mu\nu}$, usando a métrica $\eta_{\mu\nu}$, dessa forma:

$$F^{\mu}_{\rho} = \eta_{\rho\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.83)$$

Sempre tome o cuidado de lembrar da convenção da somatória de Einstein: índices superiores e inferiores repetidos é uma somatória implícita. Portanto, na equação acima, o índice ν deve ser somado de 0 até 3, ou seja, de t até z , assim:

$$\eta_{\rho\nu} F^{\mu\nu} = \eta_{\rho 0} F^{\mu 0} + \eta_{\rho 1} F^{\mu 1} + \eta_{\rho 2} F^{\mu 2} + \eta_{\rho 3} F^{\mu 3}. \quad (4.84)$$

Voltando para o tensor F^{μ}_{ρ} , o que acontece se fizermos $\mu = \rho$ e somarmos de 0 até 3? Estaremos pegando o traço do tensor, ou seja, somando os elementos da diagonal principal:

$$F = F^{\mu}_{\mu} = F^0_0 + F^1_1 + F^2_2 + F^3_3. \quad (4.85)$$

Voltando à Equação 4.83, e se quisermos abaixar o índice μ ? Podemos repetir o procedimento, usando a métrica para descer o índice. Então teremos um tensor com dois índices inferiores:

$$F_{\gamma\rho} = \eta_{\gamma\mu} F^{\mu}_{\rho} = \eta_{\gamma\mu} \eta_{\rho\nu} F^{\mu\nu}. \quad (4.86)$$

Exercício 15. Mostre que o tensor de Faraday com dois índices inferiores é:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (4.87)$$

Assim como podemos descer índices de um tensor usando a métrica $\eta_{\mu\nu}$, também podemos subir índices usando o inverso da métrica $\eta^{\mu\nu}$:

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\gamma}F_{\rho\gamma}. \quad (4.88)$$

Voltando ao tensor de Faraday (Eq. 4.81), perceba que se trocarmos os índices de lugar ($\mu \leftrightarrow \nu$), os sinais das componentes são invertidas. Ou seja, $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$. Dizemos que o tensor de Faraday é um tensor antissimétrico. Para o caso de um tensor $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, dizemos que é um tensor simétrico.

Existe a possibilidade de tensores com um número ilimitado de índices superiores e inferiores. Considere o tensor $Q^{\mu\nu\rho}_{\gamma\lambda}$, com três índices superiores e dois índices inferiores. Se este tensor possui a propriedade $Q^{\mu\nu\rho}_{\gamma\lambda} = Q^{\gamma\nu\rho}_{\mu\lambda}$, dizemos que $Q^{\mu\nu\rho}_{\gamma\lambda}$ é simétrico em relação ao primeiro e quarto índice.

Mas por que precisamos que o tensor de Faraday seja antissimétrico? Pois um tensor com dois índices e antissimétrico possui apenas seis componentes independentes, já que os elementos da diagonal principal são nulos, e os elementos acima da diagonal são um espelho dos elementos debaixo da diagonal. E, por que precisamos de um tensor que tenha apenas seis componentes independentes? Pois precisamos de três elementos para acomodar as três componentes do campo elétrico \vec{E} e mais três para acomodar as componentes do campo magnético \vec{B} .

A forma tensorial para as equações de Maxwell é a seguinte:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad (4.89)$$

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0, \quad (4.90)$$

onde a *quadricorrente* é definida assim $J^\nu = (\rho, \vec{J})$, com a componente temporal sendo a densidade de carga ρ e as componentes espaciais como componentes da densidade de corrente \vec{J} .

Veja que as quatro equações foram reduzidas para duas. Da primeira, podemos deduzir a lei de Gauss para o campo elétrico e a lei de Ampere, e da segunda a lei de Gauss para o campo magnético e a lei de Faraday. Vamos nos convencer disso. Tomemos a primeira equação, e fazemos $\nu = 0$:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = J^0 \quad (4.91)$$

$$\Rightarrow \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \rho \quad (4.92)$$

$$\Rightarrow \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \rho \quad (4.93)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho. \quad (4.94)$$

Exercício 16. Mostre que para $\nu = i$, onde índices latinos correspondem às componentes espaciais ($i = 1, 2, 3$), a Equação 4.89 é equivalente à lei de Ampere.

Podemos aplicar as transformações de Lorentz nas equações de Maxwell na forma tensorial e tudo o que vai acontecer é que colocaremos traços nos índices. Ou seja, as equações de Maxwell exibem a mesma forma, não importa o referencial inercial. Dizemos que as equações de Maxwell são invariantes sob transformações de Lorentz.

Entretanto, como o campo elétrico e magnético são componentes do tensor de Faraday, não são invariantes sob transformações de Lorentz. De fato, onde um referencial inercial vê um campo elétrico puro, por exemplo, sempre existe outro referencial que vê uma mistura de campo elétrico e magnético. Imagine que temos um fio neutro por onde passa uma densidade de corrente elétrica. Estamos no referencial de repouso do fio. Pela lei de Ampere, sabemos que as cargas em movimento no fio geram um campo magnético que circunda o fio. Uma partícula positiva, se movendo com velocidade v paralela ao fio na direção contrária à corrente, irá experimentar uma força que o empurrará para longe do comprimento do fio, por causa da força de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (4.95)$$

Agora imagine-se no referencial de repouso da partícula. Nesse referencial, a partícula está em repouso, mas vê o fio se movendo com velocidade $-v$. Como a partícula tem velocidade nula, então não experimenta força magnética. Mas o referencial de repouso da partícula ainda a vê se afastando do fio, senão o universo não faria sentido. Acontece que no referencial de repouso da partícula, vemos o comprimento do fio contrair, o que causa uma mudança na densidade de cargas no fio, gerando um campo elétrico que repele a partícula. Portanto, campos elétricos e magnéticos não são campos absolutos, mas dependem do referencial. Apenas uma união de campos elétricos e magnéticos, expresso pelo tensor de Faraday, constitui o objeto invariante chamado de campo eletromagnético.

Exercício 17. Usando a Equação 4.82, mostre que as componentes do campo

elétrico e magnético se transformam assim:

$$\left\{ \begin{array}{l} E'_x = E_x \\ E'_y = \gamma (E_y - vB_z) \\ E'_z = \gamma (E_z - vB_y) \\ B'_x = B_x \\ B'_y = \gamma (B_y - vE_z) \\ B'_z = \gamma (B_z - vE_y) \end{array} \right. \quad (4.96)$$

4.7 Tensor de Energia-Momento

O quadrimomento fornece uma descrição completa da energia e do momento para uma única partícula. Entretanto, para uma coleção muito grande de partículas, o quadrimomento é insuficiente. Ao invés de lidar com partículas individuais, podemos aproximar um conjunto muito grande de partículas para um fluido: uma distribuição contínua de matéria descrita por quantidades como densidade, pressão, entropia, viscosidade, etc. Um fluido é descrito pelo tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$, com dois índices superiores e simétrico, definido como o fluxo da componente p^μ através de uma superfície com x^ν constante.

A componente T^{00} é o fluxo de p^0 através da superfície $x^0 = t$ constante. Ou seja, é o fluxo da energia no volume definido em um tempo t constante que, no referencial de repouso do fluido, é a densidade de energia ρ . As componentes $T^{0i} = T^{i0}$ é o fluxo de energia através das superfícies x^i , ou a densidade da componente i do momento. Já as componentes T^{ij} são o fluxo de p^i através da superfície x^j . Para $i = j$, T^{ii} é a definição de pressão. Para $i \neq j$, T^{ij} é conhecida como tensão de cisalhamento.

Exercício 18. Mostre que a densidade de energia é definida como

$$T^{00} = \frac{1}{2} (E^2 + B^2), \quad (4.97)$$

para o tensor de energia-momento do eletromagnetismo:

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda} F^\nu{}_\lambda - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}. \quad (4.98)$$

Vamos pensar em sistemas mais simples e idealizados de fluidos e encontrar expressões para o tensor de energia-momento. Primeiro, vamos falar da poeira, que é a coleção de partículas que está em repouso em relação umas às outras. No referencial

de repouso da poeira, temos que a quadrivelocidade do conjunto de partículas será $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Portanto, todas as componentes de $T^{\mu\nu}$ serão nulas, exceto T^{00} que é a densidade de energia das partículas. Podemos escrever este tensor desta maneira:

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu, \quad (4.99)$$

que é uma equação tensorial e é válida para todos os referenciais inerciais.

Agora, vamos falar da idealização dos fluidos perfeitos, que são sistemas completamente descritos pela densidade de energia ρ e a pressão isotrópica p . Por isotrópica, queremos dizer que p descreve a pressão em todas as direções. O fluido perfeito não apresenta tensão de cisalhamento, viscosidade ou condução de calor. Portanto, $T^{\mu\nu}$ será um tensor que possui apenas componentes diagonais não nulas. No referencial de repouso, apresentará esta forma:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (4.100)$$

Podemos escrever uma equação tensorial que é válida para todos os referenciais inerciais:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) U^\mu U^\nu + p \eta^{\mu\nu}. \quad (4.101)$$

Verifique que a Eq. 4.101 se reduz à Eq. 4.100 no referencial de repouso do fluido.

O tensor de energia-momento tem uma propriedade muito importante: é conservada. Suponha que temos um volume no espaço descrito por um cubo de vértices com comprimento l que estão repousadas nos eixos x , y e z (entre $x = 0$ e $x = l$, $y = 0$ e $y = l$ e $z = 0$ e $z = l$). Vamos provar que a energia que entra e sai pelo cubo é conservada, ou seja, nenhuma energia é criada ou destruída. A taxa de fluxo de energia que flui pela face $x = 0$ é $l^2 T^{0x}(x = 0)$. Já a taxa de fluxo de energia que flui pela face $x = l$ é $-l^2 T^{0x}(x = l)$ (o sinal negativo vem do fato que supomos que a energia está fluindo na direção de x positivo, logo a energia está saindo pela face $x = l$). Fazemos o mesmo para as faces em $y = 0$, $y = l$, $z = 0$ e $z = l$. A soma da taxa em todas as faces deve ser igual à variação no tempo $l^3 T^{00}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (l^3 T^{00})}{\partial t} &= l^2 [T^{0x}(x = 0) - T^{0x}(x = l) \\ &+ T^{0y}(y = 0) - T^{0y}(y = l) + T^{0z}(z = 0) - T^{0z}(z = l)]. \end{aligned}$$

Dividindo toda a equação por l^3 e fazendo l infinitamente pequeno, temos a definição de derivada:

$$\frac{\partial (T^{00})}{\partial t} = -\frac{\partial (T^{0x})}{\partial x} - \frac{\partial (T^{0y})}{\partial y} - \frac{\partial (T^{0z})}{\partial z}. \quad (4.102)$$

Que pode escrita desta forma, usando a convenção de Einstein:

$$\partial_\mu T^{0\mu} = 0, \quad (4.103)$$

definindo a lei de conservação da energia. Para o momento, fazemos o mesmo procedimento para $\nu = 1, 2, 3$. Para todas as componentes, encontramos:

$$\partial_\mu T^{\nu\mu} = 0, \quad (4.104)$$

que generaliza a lei de conservação da energia e momento em uma só equação.

Exercício 19. Usando o tensor de energia-momento para o fluido perfeito:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) U^\mu U^\nu + p \eta^{\mu\nu}, \quad (4.105)$$

mostre que a lei de conservação de energia-momento (Eq. 4.104) é reduzida à equação de continuidade para a densidade de energia quando $\nu = 0$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.106)$$

e a equação de Euler da mecânica dos fluidos quando $\nu = i$:

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p, \quad (4.107)$$

no limite não-relativístico, no qual a velocidade é muito menor do que a velocidade da luz, então $U^\mu = (1, \vec{v})$ e $|v^i| \ll 1$, e a pressão é muito menor que a densidade de energia, $p \ll \rho$. A última condição faz sentido, pois a pressão surge do movimento aleatório das partículas do fluido, onde, no limite não-relativístico, a velocidade é tomada como muito baixa.

5 Espaços Curvos

5.1 Princípio da Equivalência

Pelo Exercício 13, vimos que o espaço-tempo da relatividade especial, descrito pela métrica de Minkowski, é plano, pois na ausência de qualquer força as partículas descrevem caminhos que são linhas retas. Na relatividade especial não há qualquer menção à gravidade.

Vimos que a gravidade é uma força especial, pois afeta todas as partículas igualmente, independente da sua massa e composição. Este fato se deve à equivalência entre a massa inercial (segunda lei de Newton) e a massa gravitacional (lei da gravitação universal), demonstrado por Galileu quando disse que "todos os corpos caem igualmente". Nada na física obriga que essas massas idênticas. Desde Galileu, todos achavam que isso se tratava de mera coincidência, até que Einstein imaginou se havia algum motivo oculto. A jornada que o fez partir da relatividade especial para a geral começou em 1907, com o "pensamento mais feliz" da sua vida.

Na época, Einstein trabalhava no escritório de patentes e devia ficar muito entediado para imaginar situações que chamava de experimentos mentais. Em um desses experimentos, Einstein imaginou um homem dentro de um elevador que, por infelicidade do destino, teve as cordas rompidas e começou a despencar em queda livre. Como o homem e o elevador estão caindo com a mesma velocidade, pois todos os corpos caem igualmente, o homem se verá flutuando e não sentirá o próprio peso. Durante a queda livre, parece que a gravidade foi desligada. Se o elevador não tiver janelas para o mundo exterior, o homem não saberá se está em queda livre ou em velocidade constante e uniforme no espaço vazio.

Agora, imagine que acoplamos um foguete no exterior do elevador e acionamos a propulsão de modo que acelere à exatos $9,8 \text{ m/s}^2$. O homem sentirá o próprio peso como se estivesse na Terra, e tudo dentro do elevador se comportará como se estivesse imerso no campo gravitacional terrestre, pois tudo está acelerando igualmente. Se o elevador não tiver janelas, o homem não saberá se está em repouso em relação à Terra ou acelerando no espaço vazio.

Estes experimentos mentais exemplificam o *princípio da equivalência* de Einstein: "um referencial linearmente acelerado relativo a um referencial inercial da relatividade especial é localmente idêntico a um referencial em repouso em um campo gravitacional" (D'INVERNO, 1992). Por local, queremos dizer em regiões do espaço pequenos e em intervalos de tempo curtos, já que em regiões mais extensas a inhomogeneidade do

campo gravitacional fará com que diferentes partes do referencial acelerem diferentemente.

Com esse princípio, Einstein pôde relacionar diferentes referenciais. Perceba que um referencial acelerado não se distingue em nada de um referencial imerso em um campo gravitacional. E, um referencial local em queda livre em um campo gravitacional não se distingue em nada de um referencial inercial. Lembre-se, em um referencial inercial, uma partícula em repouso continua em repouso se não existirem forças agindo sobre ela. Como em um referencial local em queda livre tudo cai com a mesma taxa, tudo está em repouso em relação ao observador associado ao referencial em queda livre.

Por exemplo, pense nos astronautas em órbita da Terra. A meras centenas de quilômetros de altitude, os astronautas têm praticamente a mesma força gravitacional (no sentido newtoniano) sobre eles do que nós. Mas eles estão em queda livre e a nave está caindo a mesma taxa e por isso não sentem o próprio peso. Para eles, a gravidade não existe. Ao contrário, nós que estamos presos à Terra apenas sentimos o nosso peso porque o chão sólido exerce força em nós nos impedindo de cair livremente.

Podemos ir mais longe e dizer que a gravidade é o mesmo que uma força de inércia que só aparece em referenciais não-inerciais. Pois, onde há referenciais que dirão que a gravidade existe, também há referenciais locais em queda livre que dirão que não há gravidade alguma. Nesse sentido, os verdadeiros referenciais inerciais são os referenciais em queda livre.

Esses referenciais são localmente inerciais porque não sentem aceleração e, portanto, apenas seguem o caminho traçado pela geometria do espaço-tempo. Localmente, não existe aceleração e a física se comporta como na relatividade especial. Dizemos que o espaço-tempo é localmente plano. Entretanto, globalmente, diferentes partes do espaço-tempo irão seguir caminhos diferentes, logo o espaço-tempo deve ser globalmente curvo. Conclusão: a gravidade não é uma força, mas apenas o efeito de cair livremente no espaço-tempo curvo.

O princípio da equivalência também sugere que a gravidade pode afetar o caminho da luz. Isso é muito diferente da gravitação clássica. Para a teoria de Newton, como os fótons não possuem massa de repouso, não poderiam ser afetados pela gravidade, assim como cargas neutras não sofrem interação via eletromagnetismo. Voltemos para o experimento mental do elevador acelerado. Suponha que a pessoa no elevador acende uma fonte de luz, como uma lanterna, e aponta para o outro lado com a intenção de iluminar a parede oposta. Um observador inercial fora do elevador verificará que a luz segue uma linha reta. Entretanto, o observador no elevador verá a luz se curvando, porque o elevador está acelerando para cima, fazendo com que o raio de luz pareça estar se curvando para baixo. Pelo princípio da equivalência, referenciais

acelerados são indistinguíveis, localmente, de referenciais em um campo gravitacional. Portanto, a luz deve ser desviada pela gravidade.

A trajetória da luz deve ser afetada pela gravidade, deformando os cones de luz, como pode ser visto na Figura 11. Como partículas massivas só podem percorrer trajetórias dentro dos cones de luz dos eventos da linha de mundo, então o caminho dessas partículas também deve sofrer desvios. Todos esses efeitos são possíveis se o espaço-tempo for curvo. Temos mais uma pista que a gravidade deve ser o efeito da curvatura do espaço-tempo.

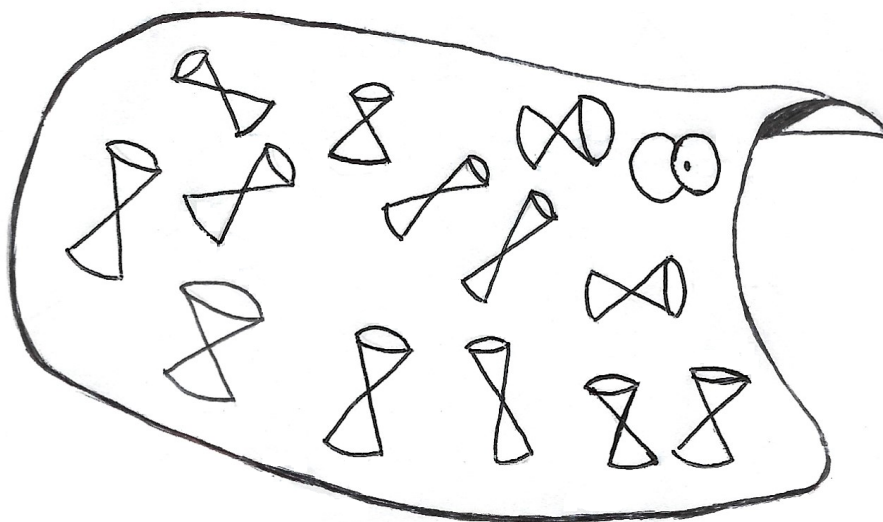


Figura 11 – Na relatividade geral, os cones de luz não estão obrigatoriamente dispostos de forma uniforme, pois o espaço-tempo curvo altera a inclinação dos cones de luz. A trajetória das partículas também será afetada já que seguem linhas de mundo dentro dos cones de luz.

Outro princípio que levou Einstein a formular a relatividade geral é o *princípio da covariância geral*: "todos os observadores são equivalentes". Isto se relaciona com o princípio da equivalência, pois é impossível para um observador saber se está em um referencial inercial ou não, tornando-se equivalente a todos os outros. Portanto, na relatividade geral, não existem referenciais privilegiados. Daí a necessidade de formular a teoria na linguagem tensorial, pois, como veremos ainda nesse capítulo, os tensores possuem regras de transformação entre coordenadas bem definidas, o que nos permite escrever equações válidas em todos os sistemas de coordenadas de qualquer referencial possível.

Antes de partirmos da relatividade especial para a geral, devemos fazer um interlúdio matemático e aprender como lidar com espaços curvos. Resumindo, trocamos o tensor métrico $\eta_{\mu\nu}$ da relatividade especial que descreve um espaço-tempo plano, por uma métrica genérica $g_{\mu\nu}$ que representa um espaço-tempo possivelmente curvo. Nesse caso, o intervalo espaço-temporal entre dois eventos será alterado pela

curvatura dessa forma:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (5.1)$$

Uma partícula livre nesse espaço-tempo descreverá caminhos onde o tempo próprio τ é estacionário:

$$\tau = \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}. \quad (5.2)$$

Estes caminhos são chamados de geodésicas e são as trajetórias mais retas possíveis em um espaço-tempo curvo. Veremos isso com mais detalhes. Adentraremos no mundo da geometria diferencial, um ramo muito elegante da matemática, desenvolvida por Gauss, Riemann, Ricci, Levi-Civita e outros.

5.2 Leis de Transformação

No capítulo anterior, vimos que existem dois tipos de vetores: com índices superiores (V^μ) e com índices inferiores (V_μ). Chamamos os índices superiores de *contravariantes* e os índices inferiores de *covariantes*. Os dois tipos se relacionam através da métrica $g_{\mu\nu}$, que pode descer o índice, desta forma:

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu \quad (5.3)$$

ou subir o índice, assim:

$$V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu. \quad (5.4)$$

Nas coordenadas cartesianas, a métrica é somente:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (5.5)$$

Por isso, $V^\mu = V_\mu$ e não precisávamos nos preocupar com índices contravariantes e covariantes nas coordenadas cartesianas. Agora, entrando no estudo dos espaços curvos, a métrica será diferente da cartesiana e precisamos nos preocupar com a diferença entre os dois tipos de vetores.

Os vetores com índices contravariantes e covariantes se diferenciam por sua lei de transformação de um sistema de coordenadas para outro. Por exemplo, se quisermos ir das coordenadas cartesianas para as esféricas. Digamos um sistema de coordenadas $x^{\mu'}$ e outro sistema de coordenadas x^μ , sendo que podemos escrever as novas coordenadas em função das antigas, $x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^\mu)$, e vice versa.

Suponha o vetor de deslocamento infinitesimal $dx^{\mu'}$ escrito nas coordenadas $x^{\mu'}$. Sendo as componentes diferenciais, podemos escrevê-las como função dos diferenciais dx^μ usando a regra da cadeia:

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} dx^\mu. \quad (5.6)$$

O vetor de deslocamento infinitesimal é um caso especial de um vetor contravariante V^μ com componentes infinitesimais. Logo, a lei de transformação de um vetor contravariante é a seguinte:

$$\boxed{V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} V^\mu.} \quad (5.7)$$

Lembre-se da convenção da somatória implícita de Einstein: índices superiores e inferiores repetidos são uma somatória. Por exemplo, imagine que temos um vetor $V^\mu = (V^x, V^y)$ no plano em coordenadas cartesianas e queremos encontrar o vetor transformado $V^{\mu'} = (V^r, V^\theta)$ nas coordenadas polares. Escrevemos as coordenadas cartesianas em função das polares:

$$x = r \cos \theta \quad (5.8)$$

$$y = r \sin \theta. \quad (5.9)$$

Podemos escrever as coordenadas polares em função das cartesianas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5.10)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (5.11)$$

Usando a Equação 5.7, podemos encontrar as componentes do vetor nas coordenadas polares $V^{\mu'}$:

$$V^r = \frac{\partial r}{\partial x} V^x + \frac{\partial r}{\partial y} V^y \quad (5.12)$$

$$V^\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} V^x + \frac{\partial \theta}{\partial y} V^y. \quad (5.13)$$

Exercício 20. Usando a lei de transformação de vetores contravariantes, calcule a transformação das componentes de um vetor nas coordenadas cartesianas $V^\mu = (V^x, V^y, V^z)$ para as coordenadas esféricas $V^{\mu'} = (V^r, V^\theta, V^\varphi)$.

E qual a lei de transformação para os vetores com índices covariantes? Para descobrir, vamos usar o fato que o produto escalar $V^\mu V_\mu$ é um invariante, ou seja, é o mesmo em todos os sistemas de coordenadas. Isso significa que o tamanho dos vetores e o ângulo entre eles não muda quando passamos de um sistema de coordenadas para outro, o que faz sentido, pois os vetores são objetos matemáticos que existem independentemente do sistema de coordenadas utilizado. Além disso, campos escalares $\phi(x^\mu)$ são invariantes:

$$\boxed{\phi'(x^{\mu'}) = \phi(x^\mu).} \quad (5.14)$$

Usando o fato que o produto escalar é invariante $V^\mu V_\mu$, temos

$$V^\mu V_\mu = V^{\mu'} V_{\mu'} \quad (5.15)$$

$$= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} V^\mu V_{\mu'}, \quad (5.16)$$

onde usamos a Equação 5.7. Para que os dois lados da equação sejam uma igualdade para V^μ arbitrário, devemos ter:

$$\boxed{V_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V_\mu.} \quad (5.17)$$

Aqui usamos o fato que:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (5.18)$$

e

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu'}} = \delta_{\nu'}^{\mu'}. \quad (5.19)$$

A Equação 5.17 é a lei de transformação para vetores covariantes. Note que esta transformação é inversa à transformação dos vetores contravariantes. Deve-se notar que os vetores covariantes se transformam exatamente como as componentes do gradiente de uma função escalar ($\partial\phi/\partial x^\mu$). Usando a regra da cadeia devemos ter:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}. \quad (5.20)$$

Concluimos que, assim como os vetores contravariantes se transformam como diferenciais, os vetores covariantes se transformam como o gradiente.

Exercício 21. Usando a lei de transformação de vetores contravariantes, calcule a transformação das componentes do gradiente de uma função escalar ϕ das coordenadas cartesianas para as coordenadas esféricas.

Também vimos no capítulo anterior que os tensores são formados pela multiplicação de vetores contravariantes e covariantes. Por exemplo, um tensor $T^{\mu\nu}$ com dois índices contravariantes pode ser formado pela multiplicação de dois vetores A^μ e B^ν , de modo que, $T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu$. O produto tensorial não é como a multiplicação comum. No produto tensorial, todas as componentes de A^μ serão multiplicadas por todas as componentes de B^ν para formar as componentes do tensor $T^{\mu\nu}$. Para o espaço-tempo de Minkowski, os vetores tem 4 componentes. Logo, um tensor $T^{\mu\nu}$ terá $4^2 = 16$ componentes formadas de todas as combinações de multiplicações entre as componentes de A^μ e B^ν .

Da mesma forma, podemos criar vetores com quantos índices contravariantes e covariantes quisermos fazendo o produto tensorial entre vetores contravariantes e vetores covariantes. Por exemplo, o tensor $S_{\mu\nu} = W_\mu X_\nu$ e o tensor misto $Q^{\mu}_{\nu\rho} = V^\mu Y_\nu Z_\rho$. Sabendo disso, é fácil generalizar a lei de transformação dos tensores. Cada índice irá se transformar de acordo com a sua lei de transformação. Para o tensor com dois índices contravariantes:

$$T^{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} T^{\mu\nu}. \quad (5.21)$$

Para o tensor com dois índices covariantes:

$$S_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} S_{\mu\nu}. \quad (5.22)$$

E para o tensor misto com um índice contravariante e dois índices covariantes:

$$Q^{\mu'}_{\nu'\rho'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\rho'}} Q^{\mu}_{\nu\rho}. \quad (5.23)$$

Suponha que temos dois tensores $X_{\mu\nu}$ e $Y_{\mu\nu}$, de modo que, para o sistema de coordenadas x^μ , vale a igualdade:

$$X_{\mu\nu} = Y_{\mu\nu}. \quad (5.24)$$

Esta é uma equação tensorial. Ela afirma que a componente $X_{\mu\nu}$ é igual a componente $Y_{\mu\nu}$ para todo μ e ν . Agora, multipliquemos os dois lados da equação por $\partial x^\mu / \partial x^{\mu'}$ e $\partial x^\nu / \partial x^{\nu'}$:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} X_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} Y_{\mu\nu}. \quad (5.25)$$

Usando a lei de transformação de tensores:

$$X_{\mu'\nu'} = Y_{\mu'\nu'}, \quad (5.26)$$

Como os dois lados da equação se transformam da mesma forma, isso significa que, se a igualdade $X_{\mu\nu} = Y_{\mu\nu}$ é válida para um sistema de coordenadas, então é válida para todos os sistemas de coordenadas. Portanto, equações tensoriais são independentes do sistema de coordenadas. Este fato é muito importante para a física, pois, se pudermos escrever as leis físicas em uma forma tensorial, elas serão válidas para todos os sistemas de coordenadas imaginados.

Exercício 22. Mostre que a métrica euclidiana,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (5.27)$$

em coordenadas esféricas é:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (5.28)$$

5.3 Álgebra Tensorial

Toda operação matemática com tensores, que preserva a quantidade de índices não-mudos nos dois lados da igualdade é uma operação válida. Por exemplo, se tivermos dois tensores A^μ_ν e B^μ_ν , ambos com um índice covariante e um índice contravariante, podemos somá-los, subtraí-los ou fazermos qualquer *combinação linear* nesta forma:

$$T^\mu_\nu = aA^\mu_\nu + bB^\mu_\nu, \quad (5.29)$$

onde a e b são escalares e T^μ_ν é o tensor resultante desta operação. É fácil mostrar que T^μ_ν é um tensor que obedece as mesmas leis de transformação que A^μ_ν e B^μ_ν .

Outra operação possível é o *produto tensorial* ou *produto direto*, onde fazemos uma multiplicação entre tensores, cujo tensor resultante tem índices que consistem em todos os índices dos tensores produtos. Por exemplo, o produto entre os tensores A^μ_ν e B^ρ é $T^{\mu\rho}$, assim:

$$T^{\mu\rho} = A^\mu_\nu B^\rho. \quad (5.30)$$

Outra possibilidade que já vimos é a *contração* de índices. Fazendo um índice superior igual a um índice inferior e somando em todos os valores possíveis resulta em um tensor sem esses dois índices. Por exemplo, tomemos o tensor de curvatura de Riemann $R^\rho_{\mu\nu\lambda}$ e fazemos $\rho = \nu$, obtemos o tensor de Ricci $R_{\mu\lambda}$:

$$R_{\mu\lambda} = R^\rho_{\mu\rho\lambda} = R^0_{\mu 0\lambda} + R^1_{\mu 1\lambda} + R^2_{\mu 2\lambda} + R^3_{\mu 3\lambda}. \quad (5.31)$$

Além disso, também podemos descer e subir índices usando a métrica $g_{\mu\nu}$ e a sua inversa $g^{\mu\nu}$ que obedece:

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu. \quad (5.32)$$

Por exemplo, se quisermos subir o primeiro índice do tensor de Ricci, multiplicamos pela inversa da métrica e contraímos o índice que queremos subir:

$$R^\nu_\lambda = g^{\nu\mu} R_{\mu\lambda} = g^{\nu 0} R_{0\lambda} + g^{\nu 1} R_{1\lambda} + g^{\nu 2} R_{2\lambda} + g^{\nu 3} R_{3\lambda}. \quad (5.33)$$

Se contraírmos o índice ν com λ , obtemos um escalar chamado de escalar de curvatura $R = R^\nu_\nu$. Veremos sobre o tensor de Riemann, de Ricci e escalar de curvatura com mais detalhes.

Exercício 23. Suponha o tensor $T^{\mu\nu}$

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

e o vetor

$$V^\mu = (-1, 4, 6, 0). \quad (5.35)$$

Calcule as componentes de $T^\mu{}_\nu$, $T_\mu{}^\nu$, $T = T^\mu{}_\mu$, $V^\mu V_\mu$ e $V_\mu T^{\mu\nu}$, no espaço de Minkowski com métrica:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

5.4 Definições

O que são vetores? Na mecânica newtoniana e na relatividade especial, gostamos de pensar nos vetores como segmentos de reta que apontam para uma direção e tem uma certa magnitude, propriedades que relacionamos com grandezas físicas como posição, velocidade, força, etc. Esta interpretação ainda vale para o espaço curvo, com uma diferença importante. No espaço curvo, os vetores contravariantes não estão no espaço em si, mas no espaço tangente T_p associado ao ponto p em que vetor está localizado.

Em cada ponto p do espaço, podemos traçar vetores linearmente independentes que sirvam de base para o espaço vetorial localizado em p . Suponha que temos uma base $\{\hat{e}_\mu\}$. Então podemos escrever os vetores como combinação linear dos elementos da base:

$$\vec{V} = V^\mu \hat{e}_\mu. \quad (5.37)$$

Em um sistema de coordenadas diferente, $\{x^{\mu'}\}$, escrevemos o vetor contravariante como combinação linear dos vetores da base $\{\hat{e}_{\mu'}\}$:

$$\vec{V} = V^{\mu'} \hat{e}_{\mu'}. \quad (5.38)$$

Sabendo que os vetores são objetos matemáticos que existem independentemente do sistema de coordenadas. Então, vale a igualdade:

$$V^\mu \hat{e}_\mu = V^{\mu'} \hat{e}_{\mu'}. \quad (5.39)$$

Usando a lei de transformação das componentes de um vetor contravariante, temos:

$$V^\mu \hat{e}_\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^{\mu'} \hat{e}_{\mu'}. \quad (5.40)$$

Para manter a igualdade, os vetores da base do espaço tangente devem se transformar seguindo a lei:

$$\hat{e}_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \hat{e}_\mu. \quad (5.41)$$

Como você pode verificar, os vetores da base se transformam inversamente às componentes contravariantes do vetor. Isso explica o nome *contravariante*, pois as componentes do vetor se transformam inversamente aos elementos da base.

Os vetores covariantes, por sua vez, habitam um espaço vetorial diferente dos vetores contravariantes, chamado de espaço cotangente T_p^* . Os vetores covariantes também são chamados de *vetores duais* ou *1-formas*. São definidos como funções lineares que vão do espaço tangente T_p para os números reais. Portanto, podemos pensar em um vetor covariante $\tilde{\omega}$ como função que pega um vetor e leva para um número real, $\tilde{\omega}(\vec{V}) \in \mathbb{R}$. Essa é a definição de um produto escalar que vimos como $\omega_\mu V^\mu$.

O espaço vetorial cotangente é formado pela base de vetores covariantes $\{\hat{\theta}^\mu\}$, definidos desta forma:

$$\hat{\theta}^\mu(\hat{e}_\nu) = \delta_\nu^\mu. \quad (5.42)$$

Ou seja, o vetor covariante $\hat{\theta}^\mu$ é aquele que, quando recebe o vetor da base contravariante \hat{e}_ν retorna 1 quando $\mu = \nu$ e 0 quando $\mu \neq \nu$. Escrevemos os vetores covariantes como combinação linear dos $\hat{\theta}^\mu$:

$$\tilde{\omega} = \omega_\mu \hat{\theta}^\mu. \quad (5.43)$$

O produto escalar $\tilde{\omega}(\vec{V})$:

$$\tilde{\omega}(\vec{V}) = \omega_\mu \hat{\theta}^\mu(V^\nu \hat{e}_\nu) \quad (5.44)$$

$$= \omega_\mu V^\nu \hat{\theta}^\mu(\hat{e}_\nu) \quad (5.45)$$

$$= \omega_\mu V^\nu \delta_\nu^\mu \quad (5.46)$$

$$= \omega_\mu V^\mu, \quad (5.47)$$

é um número real.

Exercício 24. Usando a invariância do produto escalar e a lei de transformação dos vetores covariantes, mostre que os elementos da base $\hat{\theta}^\mu$ se transformam assim:

$$\hat{\theta}^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \hat{\theta}^\mu. \quad (5.48)$$

Podemos estender essas definições para os tensores. Como vimos, podemos formar tensores fazendo o produto tensorial entre vetores contravariantes e/ou covariantes. Portanto, podemos pensar em um tensor T com n índices contravariantes e m índices covariantes como uma função linear que recebe n vetores covariantes e m vetores contravariantes e retorna um número real, $T(\vec{V}, \vec{W}, \dots, \tilde{\omega}, \tilde{p}, \dots) \in \mathbb{R}$.

Por exemplo, pense nos tensores com componentes T^μ_ν , formados pelo produto tensorial de um vetor covariante e um vetor contravariante. A base para o espaço destes tensores é formado pelo produto tensorial de $\{\hat{e}_\mu\}$ e $\{\hat{\theta}^\mu\}$, de forma que o tensor

pode ser escrito assim:

$$T = T^\mu{}_\nu \hat{e}_\mu \otimes \hat{\theta}^\nu. \quad (5.49)$$

Se T receber o vetor \vec{V} e o dual $\tilde{\omega}$, teremos:

$$T(\tilde{\omega}, \vec{V}) = T^\mu{}_\nu \hat{e}_\mu \otimes \hat{\theta}^\nu (\omega_\lambda \hat{\theta}^\lambda, V^\rho \hat{e}_\rho) \quad (5.50)$$

$$= T^\mu{}_\nu \omega_\lambda V^\rho \delta_\mu^\lambda \delta_\rho^\nu \quad (5.51)$$

$$= T^\mu{}_\nu \omega_\mu V^\nu, \quad (5.52)$$

que é um número real.

5.5 Variedade

Definimos *variedade* como um espaço contínuo que se parece localmente com o espaço euclidiano. A variedade é qualquer conjunto que pode ser continuamente parametrizado. Chamamos o número de parâmetros independentes de *dimensão* da variedade.

Por exemplo, a superfície de uma esfera é uma variedade, já que se parece com o plano se diminuirmos a escala, assim como a superfície curva da Terra parece plana em nossas experiências diárias. A esfera possui dois parâmetros independentes, os ângulos θ e φ que nomeiam os pontos na superfície. Como são necessários apenas duas coordenadas para localizar um ponto na esfera, dizemos que a superfície da esfera tem duas dimensões.

Como foi mencionado, a variedade é um espaço contínuo que se parece, localmente, com o espaço euclidiano. Isso remete a nossa discussão do início do capítulo sobre a existência de referenciais inerciais locais, onde tudo se comporta como no espaço plano da relatividade especial. Pode ser provado que, em todo ponto P da variedade, existe um sistema de coordenadas onde a métrica é localmente plana, ou seja, $g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}$. Usando estas coordenadas, mostramos que a métrica é aproximadamente plana nas vizinhanças do ponto P , até primeira ordem em $g_{\mu\nu}(P)$. Portanto, um sistema de coordenadas local centrado no ponto P satisfaz:

$$\boxed{g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}} \quad (5.53)$$

e

$$\boxed{\partial_\rho g_{\mu\nu}(P) = 0.} \quad (5.54)$$

Vale destacar que, para um espaço curvo, em geral, as segundas derivadas não são nulas no ponto P :

$$\partial_\rho \partial_\lambda g_{\mu\nu}(P) \neq 0. \quad (5.55)$$

O tensor métrico $g_{\mu\nu}$, que é um tensor simétrico, define distâncias e a curvatura da variedade. Nem todas as variedades contêm uma métrica, mas, para a relatividade geral ela é absolutamente fundamental. Chamamos as variedades com métrica positiva-definida, tal que $g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0$ para todo V^μ de variedade *riemanniana*. Na relatividade especial e na relatividade geral, nem sempre a norma dos vetores é positiva, então chamamos essas variedades de *pseudo-riemannianas*.

Dado a métrica $g_{\mu\nu}$, vimos que a distância infinitesimal quadrática ds^2 é:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \quad (5.56)$$

Podemos calcular a distância finita integrando os dois lados da equação ao longo de uma curva:

$$\Delta s = \int \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}. \quad (5.57)$$

Uma curva pode ser parametrizada por um parâmetro λ , tal que $x^\mu = x^\mu(\lambda)$. Deste modo, podemos calcular a integral acima em função de λ :

$$\Delta s = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda. \quad (5.58)$$

A derivada $dx^\mu/d\lambda$ é o vetor tangente à curva. Então, podemos escrever a integral assim:

$$\Delta s = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu} d\lambda. \quad (5.59)$$

Exercício 25. Dado a métrica da esfera com raio R ,

$$ds^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (5.60)$$

calcule o comprimento da circunferência da esfera.

No espaço plano, ou localmente plano com coordenadas ajustadas para determinado ponto, o elemento de volume quadridimensional é:

$$dV = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3. \quad (5.61)$$

Do cálculo de várias variáveis, sabemos que o elemento de volume para novas coordenadas $x^{\mu'}$ será $dV = JdV'$, onde J é o Jacobiano da transformação de x^μ para $x^{\mu'}$, definido assim:

$$J = \frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^0}{\partial x^{0'}} & \frac{\partial x^0}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^0}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^0}{\partial x^{3'}} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{0'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x^{0'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x^{0'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \end{pmatrix}. \quad (5.62)$$

Um jeito mais fácil de calcular o Jacobiano é através da métrica. Se definirmos a matriz de transformação assim:

$$\Lambda^\mu_{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}}, \quad (5.63)$$

então o Jacobiano será o determinante da matriz Λ , $J = \det(\Lambda)$. Ora, usando a notação de matriz, podemos escrever a lei de transformação de tensores desse modo:

$$g = \Lambda \eta \Lambda^T, \quad (5.64)$$

onde g é a matriz correspondente à $g_{\mu\nu}$ e η a matriz de $\eta_{\mu\nu}$, e T denota a matriz transposta. Segue da equação acima que o determinante será:

$$\det(g) = \det(\Lambda) \det(\eta) \det(\Lambda^T). \quad (5.65)$$

Para qualquer matriz, $\det(\Lambda) = \det(\Lambda^T)$. Além disso, o determinante da métrica de Minkowski é $\det(\eta) = -1$. Portanto,

$$\det(g) = -[\det(\Lambda)]^2. \quad (5.66)$$

Ou seja,

$$\det(\Lambda) = \sqrt{-\det(g)}. \quad (5.67)$$

Introduzindo uma nova notação, onde

$$g = \det(g_{\mu\nu}), \quad (5.68)$$

temos que a transformação do elemento de volume será:

$$\boxed{dV = \sqrt{-g} dV'}. \quad (5.69)$$

Exercício 26. Qual o elemento de volume dV nas coordenadas polares e esféricas?

5.6 Derivada Covariante

Para avaliarmos quantidades físicas definidas como vetores e tensores, precisamos usar a definição de derivada, onde calculamos a diferença dos campos vetoriais e tensoriais entre pontos infinitamente próximos. Suponha que queremos avaliar a derivada parcial do vetor contravariante V^ν em relação à coordenada x^μ :

$$\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu V^\nu. \quad (5.70)$$

Agora, imagine que temos outro sistema de coordenadas $x^{\mu'}$. Para passarmos a derivada parcial acima para estas coordenadas, usaremos a lei de transformação para vetores contravariantes:

$$V^{\nu'} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} \quad (5.71)$$

e a lei de transformação para o gradiente:

$$\partial_{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \partial_{\mu}. \quad (5.72)$$

No sistema de coordenadas $x^{\mu'}$, a Equação 5.70 fica:

$$\partial_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} \right) \quad (5.73)$$

$$\partial_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \partial_{\mu} V^{\nu} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\nu}} V^{\nu}. \quad (5.74)$$

Observe que o primeiro termo do lado direito da igualdade é a lei de transformação para um tensor com um índice contravariante e um índice covariante. Entretanto, o segundo termo estraga tudo e não é uma lei de transformação tensorial. A derivada parcial de um vetor só é um tensor quando estamos no espaço plano. Em um variedade arbitrária é necessário outra definição de derivada que seja uma quantidade tensorial, ou seja, que não dependa do sistema de coordenadas.

Podemos assumir uma definição de derivada adicionando uma correção linear em V^{ν} na forma:

$$\boxed{\nabla_{\mu} V^{\nu} = \partial_{\mu} V^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} V^{\lambda}.} \quad (5.75)$$

Chamamos de *derivada covariante*. Os coeficientes $\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$ são chamados de *conexão afim* ou *símbolos de Christoffel* e possuem a seguinte lei de transformação:

$$\Gamma^{\nu'}_{\mu'\lambda'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\lambda'}}. \quad (5.76)$$

Fica claro por essa definição que os coeficientes da conexão não são componentes de um tensor. Deve ser construído dessa forma, para que a nossa nova definição de derivada (Eq. 5.75) seja um tensor.

Exercício 27. Usando a lei de transformação dos símbolos de Christoffel, mostre que a definição de derivada covariante se transforma como um tensor.

Pela Equação 5.75, note que a derivada covariante tem a mesma propriedade de linearidade da derivada parcial. Seja $V^{\nu} = A^{\nu} + B^{\nu}$, então:

$$\nabla_{\mu} T^{\nu} = \nabla_{\mu} (A^{\nu} + B^{\nu}) = \nabla_{\mu} A^{\nu} + \nabla_{\mu} B^{\nu}. \quad (5.77)$$

Para regatarmos as mesmas propriedades da derivada parcial, queremos que a derivada covariante obedeça a regra do produto de Leibniz:

$$\nabla_{\mu}(\omega_{\nu}V^{\rho}) = (\nabla_{\mu}\omega_{\nu})V^{\rho} + \omega^{\nu}\nabla_{\mu}V^{\rho}. \quad (5.78)$$

Então surge a pergunta: como a derivada covariante age em um vetor covariante ω_{ν} ? Podemos fazer uma suposição similar aos vetores contravariantes:

$$\nabla_{\mu}\omega_{\nu} = \partial_{\mu}\omega_{\nu} + \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}\omega_{\lambda}, \quad (5.79)$$

onde não esperamos que os coeficientes $\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ sejam iguais aos $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, contando que possuem a mesma lei de transformação.

Vamos adicionar mais duas suposições à derivada covariante. Primeiro, que ela comute com contrações:

$$\nabla_{\mu}(T^{\lambda}_{\lambda\rho}) = (\nabla T)_{\mu}{}^{\lambda}_{\lambda\rho}. \quad (5.80)$$

Isso significa que, entre realizar a derivada covariante e uma contração de índices, não importa a ordem, o resultado será idêntico. Segunda suposição, a derivada covariante de um escalar é a derivada parcial:

$$\nabla_{\mu}\phi = \partial_{\mu}\phi. \quad (5.81)$$

O que faz sentido, já que o campo escalar não muda quando trocamos os sistemas de coordenadas.

Para encontrar os $\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}$ em função dos $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, vamos avaliar a derivada covariante do produto escalar $\omega_{\nu}V^{\nu}$.

$$\nabla_{\mu}(\omega_{\nu}V^{\nu}) = (\nabla_{\mu}\omega_{\nu})V^{\nu} + \omega_{\nu}(\nabla_{\mu}V^{\nu}). \quad (5.82)$$

Usando as suposições que fizemos, encontramos:

$$\nabla_{\mu}(\omega_{\nu}V^{\nu}) = (\partial_{\mu}\omega_{\nu})V^{\nu} + \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}\omega_{\lambda}V^{\nu} + \omega_{\nu}(\partial_{\mu}V^{\nu}) + \omega_{\nu}\Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}V^{\lambda}. \quad (5.83)$$

Lembre-se que $\omega_{\nu}V^{\nu}$ é simplesmente um escalar, portanto a sua derivada covariante se reduz a derivada parcial:

$$\nabla_{\mu}(\omega_{\nu}V^{\nu}) = \partial_{\mu}(\omega_{\nu}V^{\nu}) \quad (5.84)$$

$$\nabla_{\mu}(\omega_{\nu}V^{\nu}) = (\partial_{\mu}\omega_{\nu})V^{\nu} + \omega_{\nu}(\partial_{\mu}V^{\nu}). \quad (5.85)$$

Comparando as Equações 5.83 e 5.85, os termos com as conexões devem se cancelar:

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}\omega_{\lambda}V^{\nu} + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}\omega_{\nu}V^{\lambda} = 0. \quad (5.86)$$

Renomeando os índices mudos:

$$\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}\omega_{\lambda}V^{\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\omega_{\lambda}V^{\nu} = (\tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu})\omega_{\lambda}V^{\nu} = 0. \quad (5.87)$$

Para ω_ν e V^ν completamente arbitrários, então:

$$\tilde{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = -\Gamma^\lambda_{\mu\nu}. \quad (5.88)$$

Portanto, a conexão para a derivada covariante de um vetor covariante é igual à conexão da derivada covariante de um vetor contravariante a menos de um sinal negativo:

$$\boxed{\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \omega_\lambda.} \quad (5.89)$$

Sabemos que tensores com uma quantidade de índices arbitrários podem ser construídos com a multiplicação de vetores contravariantes e covariantes. É direto encontrar a fórmula para a derivada covariante de um tensor qualquer. Para um índice superior introduzimos um termo com $+\Gamma$ e para um índice inferior um termo com $-\Gamma$. Por exemplo, para a derivada covariante do tensor $T_{\mu\nu}$:

$$\nabla_\sigma T_{\mu\nu} = \partial_\sigma T_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} T_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} T_{\mu\lambda}. \quad (5.90)$$

Para o tensor $A^{\mu\nu}$:

$$\nabla_\sigma A^{\mu\nu} = \partial_\sigma A^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} A^{\lambda\nu} + \Gamma^\nu_{\sigma\lambda} A^{\mu\lambda}. \quad (5.91)$$

E para o tensor $B^\mu{}_\nu$:

$$\nabla_\sigma B^\mu{}_\nu = \partial_\sigma B^\mu{}_\nu + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} B^\lambda{}_\nu - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} B^\mu{}_\lambda. \quad (5.92)$$

Para tensores com mais índices seguimos a mesma regra: índice superior $+\Gamma$ e índice inferior $-\Gamma$.

Como a derivada covariante é um tensor, então podemos subir e descer índices da derivada covariante usando a métrica $g_{\mu\nu}$ desta forma:

$$\nabla_\sigma V_\mu = g_{\mu\nu} \nabla_\sigma V^\nu. \quad (5.93)$$

É claro que, para avaliar esta derivada covariante, podemos antes descer o índice do vetor:

$$\nabla_\sigma V_\mu = \nabla_\sigma (g_{\mu\nu} V^\nu) = (\nabla_\sigma g_{\mu\nu}) V^\nu + g_{\mu\nu} \nabla_\sigma V^\nu. \quad (5.94)$$

Comparando as Equações 5.93 e 5.94, somos obrigados a assumir que:

$$\boxed{\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0.} \quad (5.95)$$

A derivada covariante da métrica é igual a zero em todo lugar. Dizemos que a métrica é compatível.

Agora, vamos avaliar a derivada covariante da derivada covariante de uma função escalar, $\nabla_\mu \nabla_\nu \phi$. No sistema de coordenadas cartesiano, a derivada covariante se reduz à derivada parcial

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \phi = \partial_\mu \partial_\nu \phi \quad (5.96)$$

As derivadas parciais comutam, ou seja, podemos trocar a ordem que realizamos primeiro:

$$\partial_\mu \partial_\nu \phi = \partial_\nu \partial_\mu \phi. \quad (5.97)$$

Portanto,

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \phi = \nabla_\nu \nabla_\mu \phi. \quad (5.98)$$

Como é uma equação tensorial, é válida em todos os sistemas de coordenadas. Mas cuidado: as derivadas covariantes comutam apenas para campos escalares. Partindo da Equação 5.98, vamos abrir as derivadas covariantes de acordo com as definições:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \phi = \nabla_\nu \nabla_\mu \phi \quad (5.99)$$

$$\partial_\mu \partial_\nu \phi - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \partial_\lambda \phi = \partial_\nu \partial_\mu \phi - \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda \phi \quad (5.100)$$

$$\Rightarrow \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \partial_\lambda \phi = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \partial_\lambda \phi. \quad (5.101)$$

Concluimos que a conexão é simétrica em relação aos dois índices inferiores:

$$\boxed{\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}}. \quad (5.102)$$

Exercício 28. Com as propriedades de compatibilidade métrica e simetria dos índices inferiores da conexão, mostre que os componentes da conexão podem ser escritos assim:

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (5.103)$$

Dica: expanda a derivada covariante da métrica nas configurações $\nabla_\rho g_{\mu\nu}$, $\nabla_\mu g_{\nu\rho}$ e $\nabla_\nu g_{\rho\mu}$. Subtraía a segunda e a terceira da primeira configuração.

Analisando a Equação 5.103, veja que as componentes da conexão são nulas no espaço-tempo de Minkowski, pois $\eta_{\mu\nu}$ são constantes em todos os pontos.

Para exemplificar, vamos encontrar as componentes da conexão ($\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$) da esfera com raio unitário que tem como métrica:

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (5.104)$$

Podemos escrever a métrica assim:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (5.105)$$

E a inversa da métrica:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^{-2} \theta \end{pmatrix}. \quad (5.106)$$

Podemos dividir os símbolos de Christoffel em duas matrizes, uma para $\sigma = \theta$ e outra para $\sigma = \varphi$. Devemos ter:

$$\Gamma^{\theta}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} (\partial_{\mu}g_{\nu\theta} + \partial_{\nu}g_{\theta\mu} - \partial_{\theta}g_{\mu\nu}) \quad (5.107)$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi} (\partial_{\mu}g_{\nu\varphi} + \partial_{\nu}g_{\varphi\mu} - \partial_{\varphi}g_{\mu\nu}). \quad (5.108)$$

Veja que, como a métrica só possui componentes não nulas na diagonal, então $\rho = \theta$ para a primeira matriz e $\rho = \varphi$ para a segunda matriz. Agora, vamos calcular cada componente da conexão. Para $\mu = \nu = \theta$, temos:

$$\Gamma^{\theta}_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta}(\partial_{\theta}g_{\theta\theta}) \quad (5.109)$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi}(\partial_{\theta}g_{\theta\theta}). \quad (5.110)$$

Como $g_{\theta\theta} = 1$, então $\partial_{\theta}g_{\theta\theta} = 0$ e as duas componentes são nulas:

$$\Gamma^{\theta}_{\theta\theta} = 0 \quad (5.111)$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\theta} = 0. \quad (5.112)$$

Agora, fazemos $\mu = \theta$ e $\nu = \varphi$:

$$\Gamma^{\theta}_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} (\partial_{\varphi}g_{\theta\theta}) = 0 \quad (5.113)$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi} (\partial_{\theta}g_{\varphi\varphi}) = \frac{1}{2} \sin^{-2} \theta (\partial_{\theta} \sin^2 \theta) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \quad (5.114)$$

Usando a propriedade de simetria em relação aos índices inferiores da conexão, descobrimos que já calculamos as componentes quando $\mu = \varphi$ e $\nu = \theta$:

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\theta} = 0 \quad (5.115)$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\varphi\theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \quad (5.116)$$

Agora, só nos resta fazermos $\mu = \nu = \varphi$:

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} (-\partial_{\theta}g_{\varphi\varphi}) = -\frac{1}{2}(\partial_{\theta} \sin^2 \theta) = -\sin \theta \cos \theta \quad (5.117)$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi} (\partial_{\varphi}g_{\varphi\varphi}) = 0. \quad (5.118)$$

Exercício 29. Calcule as componentes da conexão para a espaço plano em coordenadas polares, com métrica:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (5.119)$$

Exercício 30. Calcule o divergente $\nabla_{\mu} V^{\mu}$ e o laplaciano $\nabla^{\mu} \nabla_{\mu} f$ nas coordenadas polares.

5.7 Transporte Paralelo e Geodésicas

Uma das formas de determinar a curvatura intrínseca de uma variedade é realizar o *transporte paralelo* de um vetor. Como vimos, os vetores estão no espaço tangente à variedade no ponto. Para realizarmos o transporte de um vetor ao longo de uma curva, devemos transportá-lo entre espaços tangentes dos pontos da curva. Fazemos isso do seguinte modo: tomemos o vetor V^μ no ponto inicial, deslocamos para o próximo ponto o mantendo sempre constante em relação ao parâmetro λ da curva. Para o espaço plano, isso equivale à:

$$\frac{dV^\mu}{d\lambda} = 0. \quad (5.120)$$

Com a regra da cadeia, a relação acima pode ser escrita assim:

$$\frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} = 0. \quad (5.121)$$

Identificando $dx^\nu/d\lambda$ como o vetor tangente U^ν da curva, temos a expressão para o transporte paralelo no espaço plano:

$$U^\nu \partial_\nu V^\mu = 0. \quad (5.122)$$

Sabendo que $\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu$ no espaço plano, o vetor transportado deve satisfazer:

$$U^\nu \nabla_\nu V^\mu = 0. \quad (5.123)$$

Note que a equação acima é válida para todos os sistemas de coordenadas, pois é tensorial. Portanto, a solução da Equação 5.123 nos fornece o transporte paralelo do vetor V^μ em qualquer variedade que possui sua própria derivada covariante que, como vimos, pode ser construída através da métrica.

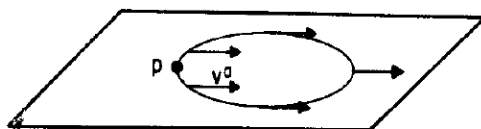


Figura 12 – Transporte paralelo de um vetor ao redor de uma curva fechada no espaço plano. Ao voltar para o mesmo ponto, o vetor está apontando para a mesma direção. (WALD, 2010)

O transporte paralelo nos dá dicas sobre a curvatura da variedade. Se tomarmos um vetor no espaço plano e realizarmos o seu transporte paralelo ao longo de curva fechada, o vetor depois do transporte apontará para a mesma direção do vetor original. Isso não é verdade para os espaços curvos. Se realizarmos o transporte paralelo de um vetor ao longo de uma curva fechada na esfera, veremos que o vetor final estará apontando para uma direção diferente se comparado ao vetor original. Veja as Figuras 12 e 13.

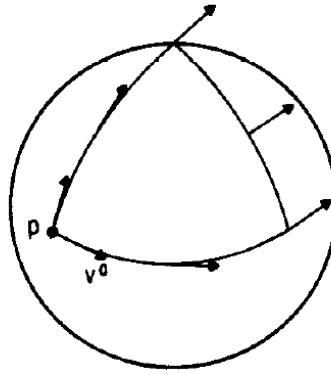


Figura 13 – Transporte paralelo de um vetor ao redor de uma curva fechada em uma esfera. Ao voltar para o início, o vetor foi rotacionado. (WALD, 2010)

Agora, iremos definir as curvas mais retas possíveis no espaço curvo, chamadas de *geodésicas*. Lembre-se do Axioma de Euclides válido para o espaço plano: duas linhas retas paralelas continuam paralelas. Uma declaração equivalente é dizer que o vetor tangente em um ponto da curva é sempre paralelo ao vetor tangente no ponto anterior. Na linguagem do transporte paralelo, no espaço plano a linha reta é a única curva que transporta paralelamente o seu próprio vetor tangente, ou seja,

$$U^\nu \nabla_\nu U^\mu = 0. \quad (5.124)$$

O Axioma de Euclides não é válido para espaços curvos, já que linhas originalmente paralelas podem muito bem convergir ou divergir depois de algum tempo. Mas, a Equação 5.124 é tensorial, logo, é válida para o espaço curvo. No espaço curvo, a solução para esta equação são as linhas mais retas possíveis que transportam o seu próprio vetor tangente: as *geodésicas*. Abrindo a derivada covariante, temos a equação da geodésica:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0. \quad (5.125)$$

Exercício 31. Se λ é o parâmetro da curva, mostre que definir um novo parâmetro

$$\phi = a\lambda + b, \quad (5.126)$$

onde a e b são constantes, a equação da geodésica (5.125) ainda é satisfeita. Chamamos λ e ϕ de parâmetros finos.

Exercício 32. Dada a métrica da esfera de raio unitário:

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (5.127)$$

mostre que as linhas de longitude constante ($\varphi = \text{constante}$) são geodésicas, e que a única linha de latitude constante ($\theta = \text{constante}$) que é uma geodésica é o equador ($\theta = \pi/2$).

Exercício 33. Na relatividade geral, as geodésicas são os caminhos realizados pelas partículas livres no espaço-tempo curvo com o tempo próprio τ como parâmetro. Lembre-se do Exercício 13, em que a trajetória de uma partícula no espaço-tempo de Minkowski é dado pelo cálculo variacional do tempo próprio τ como ação. Agora, mostre que a equação da geodésica surge do cálculo variacional do tempo próprio como ação no espaço-tempo curvo:

$$\tau = \int \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}. \quad (5.128)$$

Dica: use a equação de Euler-Lagrange.

5.8 Tensor de Curvatura

Quando transportamos paralelamente um vetor em um loop infinitesimal no espaço plano, o vetor resultante apontará para a mesma direção do vetor original. Isso não é verdade para espaços curvos. Mesmo em um loop infinitesimal, o vetor terá sido alterado pelo menos um pouquinho. A quantidade que mensura a falha na planicidade do espaço e, conseqüentemente, descreve a curvatura intrínseca do espaço é chamado de *tensor de Riemann*. Ele pode ser encontrado fazendo a comutação entre derivadas covariantes do vetor V^ρ em diferentes direções, ∇_μ e ∇_ν , por exemplo:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho. \quad (5.129)$$

Fazer esta comutação equivale à medirmos a diferença entre a variação do vetor V^ρ em dois caminhos infinitesimais diferentes. No primeiro caminho, começamos na direção μ e depois ν . No segundo caminho, começamos na direção ν e depois μ . Se a diferença entre os vetores resultantes dos dois caminhos for diferente de zero, então estaremos em um espaço curvo. Vamos abrir as derivadas covariantes da Eq. 5.129:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = \partial_\mu (\nabla_\nu V^\rho) - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \nabla_\lambda V^\rho + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \nabla_\nu V^\sigma \quad (5.130)$$

$$- \partial_\nu (\nabla_\mu V^\rho) + \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \nabla_\lambda V^\rho - \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \nabla_\mu V^\sigma \quad (5.131)$$

$$= \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + (\partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma}) V^\sigma + \Gamma^\rho_{\nu\sigma} \partial_\mu V^\sigma - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \partial_\lambda V^\rho - \Gamma^\sigma_{\mu\nu} \Gamma^\rho_{\lambda\sigma} V^\sigma \quad (5.132)$$

$$- \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \partial_\nu V^\sigma + \Gamma^\rho_{\mu\sigma} \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} V^\lambda - (\mu \leftrightarrow \nu). \quad (5.133)$$

Usando a propriedade de simetria dos índices inferiores da conexão e comutação entre as derivadas parciais:

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] V^{\rho} = \left(\partial_{\mu} \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} \right) V^{\sigma}. \quad (5.134)$$

$$= R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} V^{\sigma}. \quad (5.135)$$

Portanto, a comutação entre duas derivadas covariantes de V^{ρ} é proporcional aos V^{ρ} , sendo os coeficientes $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$ componentes do tensor de Riemann:

$$\boxed{R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu} \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_{\nu} \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda} \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}.} \quad (5.136)$$

No espaço plano, existe um sistema de coordenadas onde as componentes da conexão Γ são nulas. Consequentemente, todas as componentes do tensor de Riemann são nulas neste sistema de coordenadas e as derivadas covariantes comutam. Da mesma forma, se todas as componentes do tensor de Riemann são nulas, então sempre podemos encontrar um sistema de coordenadas com os componentes da métrica constantes. Portanto, uma condição suficiente para o espaço plano é que, não importa o sistema de coordenadas, as componentes do tensor de Riemann sejam nulas:

$$\boxed{R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \text{variedade plana.}} \quad (5.137)$$

Exercício 34. Como vimos, em um sistema de coordenadas localmente inercial $g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}$ e $\partial_{\rho} g_{\mu\nu}(P) = 0$, embora a segunda derivada não seja sempre zero. Mostre que em P , o tensor de Riemann $R_{\rho\sigma\mu\nu}$ fica:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\partial_{\sigma} \partial_{\mu} g_{\rho\nu} - \partial_{\sigma} \partial_{\nu} g_{\rho\mu} + \partial_{\rho} \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\rho} \partial_{\mu} g_{\sigma\nu} \right). \quad (5.138)$$

Exercício 35. Com base no exercício anterior, mostre que as seguintes identidades são satisfeitas:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu} \quad (5.139)$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu} \quad (5.140)$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (5.141)$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0. \quad (5.142)$$

Ou seja, $R_{\rho\sigma\mu\nu}$ é um tensor simétrico na troca entre o primeiro e o segundo par de índices, é antissimétrico em relação ao primeiro e o terceiro índice, é antissimétrico em relação aos dois últimos índices e possui a propriedade de ciclicidade em relação aos três últimos índices. Estas são equações tensoriais, portanto, são válidas em todos os sistemas de coordenadas.

O tensor de Riemann possui quatro índices. Para um espaço-tempo com n dimensões, o tensor de Riemann possui n^4 componentes. Mas, as quatro propriedades que vimos no último exercício querem dizer que existem componentes repetidas. Quantas destas componentes são independentes?

Vamos nos focar nas três primeiras identidades (Equações 5.139, 5.140 e 5.141). O tensor de Riemann é simétrico na troca do primeiro com o segundo par de índices, logo, podemos pensar em $R_{\rho\sigma\mu\nu}$ como uma matriz $R_{[\rho\sigma][\mu\nu]}$ em que os pares $\rho\sigma$ e $\mu\nu$ são índices individuais. Uma matriz $m \times m$ simétrica possui $m(m+1)/2$ componentes independentes. O tensor de Riemann também é antissimétrico em relação ao primeiro par de índices e ao segundo par. Uma matriz $n \times n$ antissimétrica possui $n(n-1)/2$ componentes independentes. Com base nessas propriedades, o tensor de Riemann possui

$$\frac{m(m+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{2} \left[\frac{n(n-1)}{2} + 1 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{n(n-1)}{2} \right] \left[\frac{n(n-1)}{2} + 1 \right] \quad (5.143)$$

$$= \frac{1}{8} (n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n) \quad (5.144)$$

componentes independentes. Agora, devemos adicionar a última propriedade 5.142 de soma cíclica completamente antissimétrica que adiciona $n(n-1)(n-2)(n-3)/4!$ restrições à $R_{\rho\sigma\mu\nu}$, nos deixando com:

$$\frac{1}{8} (n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n) - \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(n-3) = \quad (5.145)$$

$$\frac{1}{12} n^2 (n^2 - 1) \quad (5.146)$$

componentes independentes. Para $n = 4$, que é o número de dimensões da relatividade geral, o tensor de Riemann possui 20 componentes independentes.

Exercício 36. Mostre que, para coordenadas localmente planas, com o tensor de Riemann dado pela Eq. 5.138, vale a seguinte identidade:

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0. \quad (5.147)$$

Por ser tensorial é uma equação válida para todos os sistemas de coordenadas. Esta equação é chamada de *identidade de Bianchi*.

Exercício 37. Mostre que o *tensor de Ricci*, calculado a partir da contração do primeiro com o terceiro índice do tensor de Riemann ($R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$) é simétrico.

Exercício 38. Mostre que o tensor de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}, \quad (5.148)$$

sendo $R = R^\lambda{}_\lambda$ o escalar de curvatura, tem divergente nulo, ou seja,

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0. \quad (5.149)$$

Dica: use a identidade de Bianchi e contraia os índices necessários.

6 Relatividade Geral

Desde o seu artigo de revisão de 1907, Einstein sabia que a teoria de Newton da gravidade precisava ser conciliada com a relatividade especial. Veja, por exemplo, a equação de Poisson para o potencial gravitacional Φ gerado por uma fonte com densidade de massa ρ :

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho. \quad (6.1)$$

Observe que o Laplaciano ∇^2 não é um operador invariante sob transformações de Lorentz. Além disso, a densidade de massa é uma quantidade que depende do referencial utilizado, pois é uma componente do tensor de energia-momento. Logo, a teoria newtoniana da gravidade precisava de uma revisão.

Einstein poderia procurar por uma versão invariante sob transformações de Lorentz para a teoria de Newton. Ao invés disso, inspirado pelo princípio da equivalência, Einstein foi atrás de uma teoria geométrica da gravidade que generalizasse a equivalência entre todos os observadores.

Fazer a transição da física da relatividade especial para a relatividade geral é simples. Tomamos uma lei da física que é válida nos referenciais inerciais do espaço-tempo plano da relatividade especial. Escrevemos a lei em uma forma independente de um sistema de coordenadas (forma tensorial), respeitando o princípio da covariância geral de Einstein. Assim, afirmamos que a lei resultante continua válida para o espaço-tempo curvo.

Podemos fazer isso substituindo as derivadas convencionais por derivadas covariantes ($\partial \rightarrow \nabla$) e a métrica de Minkowski pela métrica geral ($\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$). Além disso, partículas livres não seguem mais linhas retas, e sim a equação da geodésica:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0 \rightarrow \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \quad (6.2)$$

A lei de conservação de energia-momento se torna:

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \rightarrow \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (6.3)$$

E as equações de Maxwell:

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = J^\nu \rightarrow \nabla_\mu F^{\nu\mu} = J^\nu. \quad (6.4)$$

6.1 Equação de Einstein

Assim como não existe uma forma de deduzir a lei da gravitação através de outras leis, também não é possível deduzir a principal equação da relatividade geral.

O máximo que podemos fazer é introduzi-la como postulado e ver se a realidade atesta o nosso palpite. Entretanto, não é um chute no escuro, pois podemos seguir uma linha de raciocínio e mostrar que a equação de Einstein é uma forma natural para resolver o problema, embora não seja a única.

Começamos com a equação de Poisson. A estrutura é bem simples: no lado esquerdo da igualdade temos um operador diferencial que age no potencial Φ e no lado direito temos a fonte de gravidade que é a densidade de massa ρ . Einstein conjecturou que a gravidade não é uma força, mas o resultado da curvatura do espaço-tempo descrito pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Logo, é natural supor a substituição $\Phi \rightarrow g_{\mu\nu}$. Além disso, como o tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$ é a generalização de ρ , então admitimos a substituição $\rho \rightarrow T_{\mu\nu}$. No lado esquerdo da equação devemos ter um operador diferencial O que age em $g_{\mu\nu}$ e no lado direito $T_{\mu\nu}$:

$$O(g_{\mu\nu}) = kT_{\mu\nu}, \quad (6.5)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade a ser determinada. É importante que seja uma equação tensorial, para respeitar o princípio da covariância geral. Existem muitos operadores possíveis com dois índices inferiores. Mas a nossa escolha deve obedecer a lei de conservação de energia-momento:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0. \quad (6.6)$$

Lembre-se do último capítulo, existe um tensor que satisfaz essa condição, chamado de tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, que obedece a identidade de Bianchi $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (6.7)$$

Então, encontramos uma equação desta forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}. \quad (6.8)$$

Impondo o limite newtoniano para esta equação, que veremos ainda neste capítulo, podemos determinar a constante de proporcionalidade $k = 8\pi$, e encontrar a famosa *equação de Einstein*:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}.} \quad (6.9)$$

Exercício 39. Tomando o traço da Equação de Einstein, mostre que $R = -8\pi GT$. Portanto, a equação de Einstein pode ser escrita da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right). \quad (6.10)$$

No vácuo, quando $T_{\mu\nu} = 0$, a equação se torna:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (6.11)$$

Podemos ir além e propor uma equação de Einstein mais geral, adicionando um termo chamado de *constante cosmológica* Λ . Com essa nova constante, a equação de campo fica assim:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (6.12)$$

Perceba que a equação nesta forma ainda obedece a lei de conservação de energia-momento, pois $\nabla^\mu g_{\mu\nu} = 0$.

A constante cosmológica foi inserida por Einstein na mão na tentativa de forçar um modelo cosmológico estático para o universo. Quando Edwin Hubble descobriu que o universo se expandia, Einstein exclamou que a constante cosmológica tinha sido o seu maior erro. Entretanto, para os modelos atuais de energia escura, a constante cosmológica ainda tem a sua relevância.

O termo da constante cosmológica pode ser jogada para o lado direito da Equação 6.12 e ser interpretada como uma densidade de energia $\rho_{vac} = \Lambda/8\pi G$, constante em todo o espaço-tempo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G (T_{\mu\nu} - \rho_{vac}g_{\mu\nu}). \quad (6.13)$$

A constante cosmológica para a relatividade geral é arbitrária e deve ser determinada observacionalmente.

Como os tensores da equação de Einstein são simétricos com dois índices, existem apenas dez componentes independentes. Portanto, a equação de Einstein são na verdade dez equações diferenciais acopladas e devem ser resolvidas para cada uma das dez componentes do tensor métrico, $g_{\mu\nu}$. Entretanto, a identidade de Bianchi $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ são quatro equações que representam restrições para o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$. Logo, ficamos com seis equações independentes.

Resolver a equação de Einstein está longe de ser uma tarefa fácil. Além da quantidade de equações e termos diferentes, a equação de Einstein é não-linear, o que significa que não podemos encontrar novas soluções como uma combinação linear de soluções que já conhecemos. A única forma conhecida de resolver as equações de Einstein é fazendo uso de simplificações ao impor simetrias.

6.2 Aproximação Newtoniana

É requisito de toda nova teoria científica, além de propor avanços, reproduzir os sucessos da teoria que almeja substituir. Não seria diferente com a relatividade geral. Vamos obter a aproximação newtoniana para a relatividade geral quando o campo gravitacional é fraco e estático.

O espaço-tempo é quase plano. Neste caso, supomos que a métrica para um campo fraco pode ser escrita como a soma da métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ mais uma perturbação $h_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \quad (6.14)$$

Assumimos que, para o sistema de coordenadas onde $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Podemos pensar em $h_{\mu\nu}$ como um campo tensorial que se propaga no fundo da métrica de Minkowski. Logo, usaremos $\eta_{\mu\nu}$ para subir e descer índices. Se desprezarmos os termos maiores do que primeira ordem de $h_{\mu\nu}$, a inversa da métrica é:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (6.15)$$

Podemos calcular os símbolos de Christoffel:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda} (\partial_{\mu}h_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}h_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}h_{\mu\nu}). \quad (6.16)$$

Novamente, lembre-se que só estamos considerando os termos com $h_{\mu\nu}$ até a primeira ordem. Com os símbolos de Christoffel, podemos calcular o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\rho\nu} \quad (6.17)$$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial^{\rho}\partial_{\nu}h_{\mu\rho} + \partial^{\rho}\partial_{\mu}h_{\nu\rho} - \partial^{\rho}\partial_{\rho}h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h), \quad (6.18)$$

onde $h = h^{\mu}_{\mu}$. Portanto, a segunda versão da Equação de Einstein (Eq. 6.10), para a aproximação do campo fraco, fica:

$$\partial^{\rho}\partial_{\nu}h_{\mu\rho} + \partial^{\rho}\partial_{\mu}h_{\nu\rho} - \partial^{\rho}\partial_{\rho}h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T\eta_{\mu\nu} \right). \quad (6.19)$$

Para deduzir a aproximação newtoniana, vamos fazer mais algumas suposições. Primeiro, como o campo gravitacional é estático, não depende do tempo, então $\partial_0 h_{\mu\nu} = 0$. Também vamos admitir que não existem elementos da métrica fora da diagonal principal, então $g_{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$. Na aproximação clássica, estamos lidando com velocidades muito menores do que a luz. Então, a componente temporal da quadrivelocidade deve ser muito maior do que as componentes espaciais, $v^0 \gg v^i$. Portanto, a equação da geodésica fica assim:

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (6.20)$$

Os símbolos de Christoffel Γ^μ_{00} para a aproximação do campo fraco (Eq. 6.16) são:

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\mu} (\partial_0 h_{0\rho} + \partial_0 h_{\rho 0} - \partial_\rho h_0). \quad (6.21)$$

Lembrando que a métrica é independente do tempo, então quando $\mu = 0$ temos:

$$\Gamma^0_{00} = 0. \quad (6.22)$$

E, para $\mu = i$:

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2} (\partial_i h_{00}). \quad (6.23)$$

A componente temporal da equação geodésica fica:

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = 0, \quad (6.24)$$

portanto, $dt/d\tau$ é uma constante. Para as componentes espaciais da equação geodésica:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 (\partial_i h_{00}). \quad (6.25)$$

Podemos dividir os dois lados da equação por $(d\tau/dt)^2$, de modo a substituir a derivada em relação ao tempo próprio τ por uma derivada em relação a coordenada temporal t :

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} (\partial_i h_{00}). \quad (6.26)$$

Agora, tudo o que nos resta fazer é calcular a componente h_{00} . Voltando para a Equação de Einstein linearizada (Eq. 6.19), fazemos $\mu = \nu = 0$, encontramos:

$$-\frac{1}{2} \partial^i \partial_i h_{00} = 8\pi G \left(T_{00} - \frac{1}{2} T \eta_{00} \right). \quad (6.27)$$

Em nossa aproximação, onde as velocidades são muito menores do que a velocidade da luz, a única componente relevante do tensor energia-momento é a densidade de energia, $T_{00} = \rho$. Tomando o traço, $T = \eta^{00} T_{00} = -\rho$. Notando que $\partial^i \partial_i = \nabla^2$ é o laplaciano, temos:

$$\nabla^2 \left(\frac{-h_{00}}{2} \right) = 4\pi G \rho. \quad (6.28)$$

Se substituirmos $h_{00} = -2\Phi$, encontramos a equação de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (6.29)$$

Logo, voltando para a Equação 6.26, a solução para o movimento de uma partícula em campo fraco é a seguinte:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\partial_i \Phi. \quad (6.30)$$

Na forma vetorial, esta é a conhecida equação newtoniana para o movimento de uma partícula submetida em um potencial gravitacional Φ :

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi. \quad (6.31)$$

Então provamos que a relatividade geral se reduz à gravitação newtoniana no limite clássico para baixas velocidades e campos fracos e estáticos.

Exercício 40. Com uma dedução mais rigorosa (SCHUTZ, 2022), podemos demonstrar que a métrica para o limite newtoniano tem a seguinte forma:

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (6.32)$$

Mostre que relógios na superfície da Terra funcionam mais lentamente do que relógios distantes, segundo

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - 2gR}}. \quad (6.33)$$

Sendo Δt_0 é o tempo medido por um relógio na superfície da Terra e Δt é a coordenada temporal da métrica (que equivale ao tempo medido por um observador muito longe da Terra). A aceleração gravitacional na superfície é g e R é o raio da Terra.

Exercício 41. Usando a expressão para a dilatação temporal, mostre o efeito Doppler gravitacional:

$$\nu = \nu_0 \sqrt{1 + 2\Phi}, \quad (6.34)$$

onde ν_0 é a frequência da luz medida na fonte e ν a frequência medida por um observador distante. Note que a frequência medida por um observador distante é menor do que a frequência emitida, fenômeno chamado de desvio para o vermelho gravitacional (*redshift*).

6.3 Quantidades Conservadas

Lembra-se do Teorema de Noether, cujo enunciado afirma que cada simetria no sistema corresponde a uma quantidade conservada? O mesmo acontece com a relatividade geral: se o espaço-tempo exibe alguma simetria, então partículas livres terão alguma quantidade conservada durante o seu movimento geodésico. Começamos com a equação da geodésica:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0. \quad (6.35)$$

Podemos escrever esta equação como função do vetor tangente à geodésica, ou seja, a quadrivelocidade da partícula:

$$U^\lambda \nabla_\lambda U^\mu = 0. \quad (6.36)$$

Multiplicando a equação pelo quadrado da massa, m^2 , temos uma equação da geodésica para o quadrimomento da partícula:

$$p^\lambda \nabla_\lambda p^\mu = 0. \quad (6.37)$$

Somos livres para descer o índice μ , pois a derivada covariante da métrica é sempre nula, $\nabla_\mu g_{\nu\sigma} = 0$:

$$p^\lambda \nabla_\lambda p_\mu = 0. \quad (6.38)$$

Vamos escrever a definição da derivada covariante:

$$p^\lambda \left(\partial_\lambda p_\mu - \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} p_\sigma \right) = 0 \quad (6.39)$$

$$\Rightarrow p^\lambda \partial_\lambda p_\mu - \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} p^\lambda p_\sigma = 0 \quad (6.40)$$

$$\Rightarrow p^\lambda \partial_\lambda p_\mu = \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} p^\lambda p_\sigma. \quad (6.41)$$

O lado esquerdo da equação pode ser convertido para uma derivada em relação a τ :

$$p^\lambda \partial_\lambda p_\mu = m \frac{dx^\lambda}{d\tau} \partial_\lambda p_\mu = m \frac{dp_\mu}{d\tau}, \quad (6.42)$$

e para o lado direito, vamos abrir a definição do símbolo de Christoffel:

$$\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} p^\lambda p_\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}) p^\lambda p_\sigma. \quad (6.43)$$

Subindo o índice σ usando o inverso da métrica:

$$\Gamma^\sigma_{\lambda\mu} p^\lambda p_\sigma = \frac{1}{2} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}) p^\lambda p^\nu. \quad (6.44)$$

Note o primeiro e terceiro termo do lado direito da equação:

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} p^\lambda p^\nu - \partial_\nu g_{\lambda\mu} p^\lambda p^\nu. \quad (6.45)$$

Observe que os índices λ e ν são mudos, pois são somatórios implícitos. Portanto, podemos fazer a troca $\lambda \Leftrightarrow \nu$ no segundo termo e nada vai ser alterado:

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} p^\lambda p^\nu - \partial_\lambda g_{\nu\mu} p^\nu p^\lambda. \quad (6.46)$$

Usando o fato que a métrica é simétrica, então

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} p^\lambda p^\nu - \partial_\lambda g_{\mu\nu} p^\nu p^\lambda = 0. \quad (6.47)$$

Portanto, a equação da geodésica pode ser escrita da seguinte forma:

$$\boxed{m \frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\lambda}) p^\lambda p^\nu.} \quad (6.48)$$

Perceba que, se $\partial_\mu g_{\nu\lambda} = 0$, então

$$m \frac{dp_\mu}{d\tau} = 0, \quad (6.49)$$

ou seja, $p_\mu = \text{constante}$. Temos um resultado muito importante: se todas as componentes de $g_{\nu\lambda}$ são independentes de x^μ , então p_μ é uma constante ao longo de todo o movimento geodésico da partícula.

Por exemplo, se a métrica for estacionária, ou seja, o campo gravitacional não depende da coordenada temporal t , então a energia da partícula p_0 é conservada. Mas, em casos gerais, quando o campo gravitacional não é estacionário, então não há energia conservada definida.

Exercício 42. Para a métrica newtoniana:

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (6.50)$$

e usando a norma do quadrimomento $p_\mu p^\mu = -m^2$, mostre que

$$(p^0)^2 = (1 + 2\Phi)^{-1}(m^2 + (1 - 2\Phi)p^2), \quad (6.51)$$

onde $p^2 = \delta_{ij}p^i p^j$. Tome o campo fraco, $|\Phi| \ll 1$ e o limite não-relativístico de baixas velocidades, $|p| \ll m$. Expanda $(1 + 2\Phi)^{-1}$ até primeira ordem em Φ . Você deve encontrar:

$$p^0 \simeq m \sqrt{1 - 2\Phi + \frac{p^2}{m^2}}. \quad (6.52)$$

Agora expanda a raiz quadrada até a primeira ordem em Φ e p , encontrando:

$$p^0 \simeq m \left(1 - \Phi + \frac{p^2}{2m^2} \right). \quad (6.53)$$

Agora, descendo o índice $p_0 = g_{00}p^0$, determinamos a quantidade conservada:

$$-p_0 \sim m + m\Phi + \frac{p^2}{2m}. \quad (6.54)$$

Note que esta é a expressão para a energia total de uma partícula. O primeiro termo é a energia de repouso da partícula. O segundo termo é a energia potencial newtoniana. E o terceiro termo é a energia cinética.

6.4 Vetores de Killing

Suponha que $g_{\mu\nu}$ é independente da coordenada x^σ , ou seja, $\partial_\sigma g_{\mu\nu} = 0$ para todas as componentes da métrica. Podemos definir um vetor $K^\mu = \delta^\mu_\sigma$, chamado *vetor de Killing*, onde

$$p_\sigma = K^\mu p_\mu = K_\mu p^\mu \quad (6.55)$$

é uma constante. Analisemos, por exemplo, a métrica de Minkowski:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (6.56)$$

A métrica de Minkowski é independente de todas as quatro coordenadas t, x, y e z . Portanto, podemos escrever quatro vetores de Killing:

$$T^\mu = (1, 0, 0, 0) \quad (6.57)$$

$$X^\mu = (0, 1, 0, 0) \quad (6.58)$$

$$Y^\mu = (0, 0, 1, 0) \quad (6.59)$$

$$Z^\mu = (0, 0, 0, 1). \quad (6.60)$$

Associados a esses quatro vetores de Killing, temos que as quatro componentes de p_μ são conservadas, onde p_0 é a energia e p_i são as componentes do momento.

Voltemos para a Eq. 6.55. Se p_σ é constante, então

$$\frac{dp_\sigma}{d\tau} = p^\mu \nabla_\mu p_\sigma = p^\mu \nabla_\mu (K_\nu p^\nu) = 0. \quad (6.61)$$

Usando a regra do produto das derivadas covariantes:

$$p^\mu \nabla_\mu (K_\nu p^\nu) = p^\mu K_\nu \nabla_\mu p^\nu + p^\mu p^\nu \nabla_\mu K_\nu. \quad (6.62)$$

O primeiro termo depois da igualdade é a equação da geodésica $p^\mu \nabla_\mu p^\nu = 0$. Portanto,

$$p^\mu \nabla_\mu (K_\nu p^\nu) = p^\mu p^\nu \nabla_\mu K_\nu. \quad (6.63)$$

Podemos escrever o lado direito da equação como a soma da parte simétrica e antissimétrica de $\nabla_\mu K_\nu$:

$$p^\mu p^\nu \nabla_\mu K_\nu = \frac{p^\mu p^\nu}{2} (\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu) + \frac{p^\mu p^\nu}{2} (\nabla_\mu K_\nu - \nabla_\nu K_\mu). \quad (6.64)$$

Note que, como μ e ν são índices mudos, podemos trocá-los de ordem e a parte antissimétrica é cancelada. Concluimos que, para a quantidade $K_\nu p^\nu$ ser conservada, K_μ deve satisfazer:

$$\boxed{\nabla_\mu K_\nu + \nabla_\nu K_\mu = 0.} \quad (6.65)$$

Esta é a *equação de Killing*.

Exercício 43. A métrica de Minkowski em coordenadas esféricas é:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (6.66)$$

Mostre que $K^\mu = \delta_\phi^\mu = (0, 0, 0, 1)$ é um vetor de Killing e o momento angular p_ϕ é conservado durante o movimento geodésico.

7 Espaço-Tempo de Schwarzschild

A primeira solução exata para a Equação de Campo de Einstein foi descoberta por Karl Schwarzschild em 1915, apenas um mês depois que Einstein publicou a teoria da relatividade geral. Ele morreu pouco tempo depois da publicação da sua solução, após ter contraído uma doença enquanto servia no exército alemão durante a Primeira Guerra Mundial.

Sua solução descreve o espaço-tempo estático fora de um corpo esférico, como uma estrela, ou um buraco negro de massa M , sem carga ou momento angular. Em coordenadas esféricas (t, r, θ, φ) , a métrica é escrita como segue:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (7.1)$$

onde $d\Omega^2$ é a métrica da esfera,

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2. \quad (7.2)$$

O espaço-tempo é estático, pois nenhuma componente da métrica depende do tempo t . Também tem simetria esférica pois, para qualquer ponto em um r fixo, a métrica é a mesma. Perceba que, muito distante da fonte de curvatura, ou seja, em $r \rightarrow \infty$, a métrica se aproxima de Minkowski. Dizemos que a métrica de Schwarzschild é assintoticamente plana.

O teorema de Birkhoff nos garante que a solução de Schwarzschild é a única solução com simetria esférica e assintoticamente plana das Equações de Einstein no vácuo, mesmo abandonando a suposição de que a métrica deve ser estática. Logo, mesmo uma estrela pulsante ou em colapso terá uma métrica externa estática para uma massa M constante. Isso significa que não há ondas gravitacionais em sistemas esféricos pulsantes.

7.1 Dedução

Queremos uma métrica estática e com simetria esférica. Por estática, queremos dizer que nenhuma componente da métrica deve depender de t , $\partial_t g_{\mu\nu} = 0$. Por simetria esférica, queremos dizer que, para r e t constante, a métrica deve ser a mesma da esfera. Suponha coordenadas onde a métrica é um tensor com apenas componentes na diagonal principal. Podemos escrever a métrica com simetria esférica e estática desta forma:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + e^{2\Lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (7.3)$$

As funções $\Phi(r)$ e $\Lambda(r)$ devem ser escolhidas de modo que a métrica satisfaça que a Equação de Einstein. Primeiro, vamos calcular os símbolos de Christoffel.

Exercício 44. Calcule os símbolos de Christoffel não nulos da métrica 7.3:

$$\begin{aligned}\Gamma^t_{tr} &= \frac{d\Phi}{dr} \\ \Gamma^r_{tt} &= e^{2(\Phi-\Lambda)} \frac{d\Phi}{dr} \\ \Gamma^r_{rr} &= \frac{d\Lambda}{dr} \\ \Gamma^\theta_{r\theta} &= \frac{1}{r} \\ \Gamma^r_{\theta\theta} &= -re^{-2\Lambda} \\ \Gamma^\Phi_{r\Phi} &= \frac{1}{r} \\ \Gamma^t_{\Phi\Phi} &= -re^{-2\Lambda} \sin^2 \theta \\ \Gamma^\theta_{\Phi\Phi} &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma^\Phi_{\theta\Phi} &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.\end{aligned}$$

Com os símbolos de Christoffel, podemos calcular as componentes do tensor de Ricci.

Exercício 45. Usando a definição do tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\rho\mu} + \Gamma^\rho_{\rho\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\rho\mu}, \quad (7.4)$$

calcule as componentes não nulas:

$$\begin{aligned}R_{tt} &= e^{2(\Phi-\Lambda)} \left[\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 - \frac{d\Phi}{dr} \frac{d\Lambda}{dr} + \frac{2}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right] \\ R_{rr} &= -\frac{d^2\Phi}{dr^2} - \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 + \frac{d\Phi}{dr} \frac{d\Lambda}{dr} + \frac{2}{r} \frac{d\Lambda}{dr} \\ R_{\theta\theta} &= e^{-2\Lambda} \left[r \left(\frac{d\Lambda}{dr} - \frac{d\Phi}{dr} \right) - 1 \right] + 1 \\ R_{\Phi\Phi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta}.\end{aligned}$$

Para uma solução no vácuo, ou seja, forma da fonte esférica de gravitação, a métrica deve satisfazer a Equação de Einstein no vácuo, $R_{\mu\nu} = 0$. Primeiro, calculemos $e^{-2(\Phi-\Lambda)} R_{tt} + R_{rr}$. Como todas as componentes se anulam independentemente, temos

$$\frac{d\Phi}{dr} + \frac{d\Lambda}{dr} = 0. \quad (7.5)$$

Que possui como solução:

$$\Lambda = -\Phi + C. \quad (7.6)$$

Muito distante da fonte de gravitação, a métrica deve ser plana, $\Phi(r \rightarrow \infty) = 0$ e

$\Lambda(r \rightarrow \infty) = 0$. Portanto,

$$\Lambda(r \rightarrow \infty) = -\Phi(r \rightarrow \infty) + C \quad (7.7)$$

$$\Rightarrow C = 0. \quad (7.8)$$

Para as componentes $R_{\theta\theta}$, substituindo Λ por $-\Phi$, temos

$$e^{2\Phi} \left(2r \frac{d\Phi}{dr} + 1 \right) = 1, \quad (7.9)$$

que é equivalente a

$$\frac{d}{dr} \left(r e^{2\Phi} \right) = 1. \quad (7.10)$$

Esta equação diferencial tem como solução:

$$e^{2\Phi} = 1 - \frac{R_s}{r}, \quad (7.11)$$

onde R_s é uma constante chamada de *raio de Schwarzschild*. Usando $\Phi = -\Lambda$, temos que

$$e^{2\Lambda} = \left(1 - \frac{R_s}{r} \right)^{-1}. \quad (7.12)$$

Então, a métrica de Schwarzschild fica:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (7.13)$$

O raio de Schwarzschild é um parâmetro físico que pode ser determinado ao impor o limite do campo fraco. Perceba que, comparando com a métrica newtoniana (Eq. 6.32), devemos ter $R_s = 2GM$, sendo M é a energia total da fonte gravitacional.

Exercício 46. Mostre o efeito Doppler gravitacional no espaço-tempo de Schwarzschild:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{1 - \frac{2GM}{r_1}}{1 - \frac{2GM}{r_2}}}, \quad (7.14)$$

onde ν_1 é a frequência da luz para um observador em r_1 e ν_2 é a frequência da luz para um observador em r_2 .

7.2 Geodésicas

A métrica de Schwarzschild é estática e com simetria esférica, portanto, possui dois vetores de Killing. Observe a métrica e veja que os vetores $K^\mu = (1, 0, 0, 0)$ e $R^\mu = (0, 0, 0, 1)$ são vetores de Killing. Uma partícula livre no espaço-tempo de

Schwarzschild terá duas quantidades conservadas durante o movimento geodésico associadas aos dois vetores de Killing. Relacionado a K^μ :

$$E = -K_\mu U^\mu = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) U^t \quad (7.15)$$

e relacionado a R^μ :

$$L = R_\mu U^\mu = r^2 U^\varphi. \quad (7.16)$$

A quantidade E é a energia por unidade de massa para o caso de partículas e energia para os fótons. E a quantidade L é o momento angular por unidade de massa para partículas e simplesmente momento angular para os fótons. A simetria esférica e a conservação do momento angular nos diz que o movimento ficará restrito a um plano. Portanto, podemos escolher $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $U^\theta = 0$ para simplificar.

Usando a normalização da quadrivelocidade,

$$U^\mu U_\mu = -\epsilon, \quad (7.17)$$

onde $\epsilon = 1$ para partículas com massa e $\epsilon = 0$ para os fótons. Expandindo a expressão, obtemos

$$g_{tt} (U^t)^2 + g_{rr} (U^r)^2 + g_{\varphi\varphi} (U^\varphi)^2 = -\epsilon. \quad (7.18)$$

Vamos substituir os componentes da métrica:

$$-\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) (U^t)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} (U^r)^2 + r^2 (U^\varphi)^2 = -\epsilon. \quad (7.19)$$

Substituindo U^t e U^φ por E e L :

$$-E^2 + \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + \epsilon\right) = 0. \quad (7.20)$$

Podemos escrever esta expressão em uma forma mais familiar:

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V(r), \quad (7.21)$$

onde $V(r)$ é o potencial:

$$V(r) = \frac{1}{2}\epsilon - \epsilon \frac{GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3} \quad (7.22)$$

e

$$\epsilon = \frac{E^2}{2}. \quad (7.23)$$

A Equação 7.21 é como a energia mecânica total de uma partícula submetida por um potencial $V(r)$. O primeiro termo do potencial é simplesmente uma constante e não é relevante para o movimento. O segundo termo é o potencial newtoniano e o terceiro

termo é uma contribuição do momento angular, similar ao caso newtoniano. O quarto termo, que se torna relevante quando r é pequeno, é a diferença devido à relatividade geral. Portanto, para r distante da fonte gravitacional, o movimento se aproxima do newtoniano.

Vamos determinar quais são as órbitas circulares possíveis no espaço-tempo de Schwarzschild. As órbitas circulares acontecem nos pontos de máximo ou mínimo da função $V(r)$. Os pontos de máximo são órbitas instáveis e os pontos de mínimo são órbitas estáveis. Então, vamos calcular a derivada de $V(r)$ quando $r = r_c$:

$$\frac{dV(r_c)}{dr} = 0 \quad (7.24)$$

$$\Rightarrow \epsilon GM r_c^2 - L^2 r_c + 3GML^2 = 0. \quad (7.25)$$

Para os fótons, existe apenas uma única órbita circular possível, instável, em

$$r_c = 3GM. \quad (7.26)$$

Uma grande diferença da gravitação newtoniana, onde a luz não é afetada pela gravidade. As demais órbitas para a luz são hiperbólicas, onde o fóton vindo do infinito se aproxima da fonte gravitacional até um ponto de maior aproximação, sendo desviado e voltará para o infinito. Para partículas massivas, temos duas órbitas circular possíveis

$$r_c = \frac{L^2}{2GM} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12G^2M^2}{L^2}} \right), \quad (7.27)$$

quando $L^2 < 12G^2M^2$. Quando $L^2 = 12G^2M^2$ temos apenas uma órbita circular possível. Quando $L^2 < 12G^2M^2$ não existem órbitas circulares. Órbitas muito próximas de um círculo irão oscilar em torno de um círculo. Órbitas hiperbólicas também são possíveis, se a partícula tiver energia suficiente. Tanto para a luz quanto para partículas massivas, existe a possibilidade de atravessarem o raio de Schwarzschild, $R_s = 2GM$, e um fenômeno muito interessante acontece. Veremos no próximo capítulo.

Exercício 47. Se a partícula em uma órbita estável sofre uma pequena perturbação, ela irá oscilar em torno da posição de equilíbrio. Para uma órbita circular de raio R , a partícula irá oscilar em torno deste raio, executando um movimento de oscilador harmônico simples com frequência ω_r :

$$\omega_r^2 = \frac{d^2V(R)}{dr^2}. \quad (7.28)$$

Mostre que

$$\omega_r^2 = \frac{GM(R - 6GM)}{R^3(R - 3GM)}, \quad (7.29)$$

onde você deve eliminar L usando a Equação 7.25. Agora, sabendo que $L = r^2 U^\varphi$, mostre que a frequência angular ω_φ é:

$$\omega_\varphi^2 = \frac{GM}{R^2(R - 3GM)}. \quad (7.30)$$

Note que no limite newtoniano, quando $R \gg GM$, $\omega_r \approx \omega_\varphi$. Se $\omega_r = \omega_\varphi$, a partícula sempre volta no mesmo r que na órbita anterior. Para o caso da relatividade geral, $\omega_r \neq \omega_\varphi$, as órbitas não são fechadas, mas acontece uma precessão do ângulo em que r é máximo ou mínimo. Chamamos isso de *precessão do periélio*. Para órbitas quase circulares, mostre que a taxa de precessão será:

$$\omega_p = \omega_\varphi - \omega_r = - \left(\sqrt{1 - \frac{6GM}{R}} - 1 \right) \omega_\varphi. \quad (7.31)$$

No limite $R \gg GM$, em ordem mais baixa:

$$\omega_p \approx \frac{3(GM)^{3/2}}{c^2 R^{5/2}}, \quad (7.32)$$

onde colocamos de volta o c . Uma análise para órbitas elípticas (WEINBERG, 1972), na ordem mais baixa, a taxa de precessão é dada por:

$$\omega_p \approx \frac{3(GM)^{3/2}}{c^2(1 - e^2)a^{5/2}}, \quad (7.33)$$

onde e é a excentricidade da elipse e a o semi-eixo maior.

A primeira verificação experimental da relatividade geral foi determinar a precessão do periélio da órbita de Mercúrio de 43 segundos de arco por século.

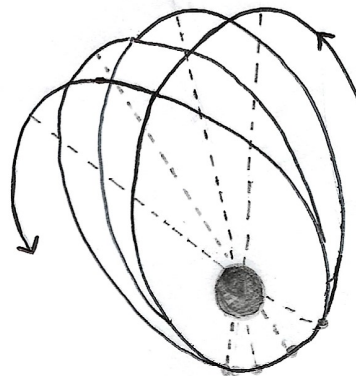


Figura 14 – Na relatividade geral, as órbitas não são fechadas. O periélio (ponto que o planeta está mais próximo do Sol) sofre um desvio angular (precessão) em cada órbita.

7.3 Estrelas

A métrica de Schwarzschild descreve apenas o espaço-tempo fora da superfície da estrela, no vácuo. Dentro da superfície, a métrica será diferente. Mas podemos supor que o espaço-tempo dentro de uma estrela esférica e que não gira seja a métrica geral estática e com simetria esférica:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + e^{2\Lambda(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (7.34)$$

Exercício 48. Mostre que o escalar de Ricci para a métrica 7.34 é:

$$R = -2e^{-2\Lambda} \left[\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 - \frac{d\Phi}{dr} \frac{d\Lambda}{dr} + \frac{2}{r} \left(\frac{d\Phi}{dr} - \frac{d\Lambda}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} (1 - e^{2\Lambda}) \right]. \quad (7.35)$$

As componentes não nulas do tensor de Einstein:

$$G_{tt} = \frac{1}{r^2} e^{2(\Phi-\Lambda)} \left(2r \frac{d\Lambda}{dr} - 1 + e^{2\Lambda} \right) \quad (7.36)$$

$$G_{rr} = \frac{1}{r^2} \left(2r \frac{d\Phi}{dr} + 1 - e^{2\Lambda} \right) \quad (7.37)$$

$$G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2\Lambda} \left[\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 - \frac{d\Phi}{dr} \frac{d\Lambda}{dr} + \frac{1}{r} \left(\frac{d\Phi}{dr} - \frac{d\Lambda}{dr} \right) \right] \quad (7.38)$$

$$G_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta G_{\theta\theta}. \quad (7.39)$$

Modelamos a estrela como um fluido perfeito, com o seguinte tensor de energia-momento:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}. \quad (7.40)$$

Queremos que a estrela seja estática, logo, a quadrivelocidade do fluido só deverá ter componente temporal, $U^i = 0$. Usando a condição de normalização, $U^\mu U_\mu = -1$, você poderá mostrar que $U_\mu = (e^\Phi, 0, 0, 0)$. As componentes não nulas do tensor de energia-momento:

$$T_{tt} = e^{2\Phi} \rho \quad (7.41)$$

$$T_{rr} = e^{2\Lambda} p \quad (7.42)$$

$$T_{\theta\theta} = r^2 p \quad (7.43)$$

$$T_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta T_{\theta\theta}, \quad (7.44)$$

onde $\rho = \rho(r)$ e $p = p(r)$ são funções apenas de r . Aplicar a Equação de Campo de Einstein, $G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}$, nos levará a um sistema de três equações:

$$\frac{1}{r^2}e^{-2\Lambda} \left(2r \frac{d\Lambda}{dr} - 1 + e^{2\Lambda} \right) = 8\pi G\rho \quad (7.45)$$

$$\frac{1}{r^2}e^{-2\Lambda} \left(2r \frac{d\Phi}{dr} + 1 - e^{2\Lambda} \right) = 8\pi Gp \quad (7.46)$$

$$e^{-2\Lambda} \left[\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)^2 - \frac{d\Phi}{dr} \frac{d\Lambda}{dr} + \frac{1}{r} \left(\frac{d\Phi}{dr} - \frac{d\Lambda}{dr} \right) \right] = 8\pi Gp, \quad (7.47)$$

onde a equação referente à componente $\varphi\varphi$ é redundante, pois é essencialmente a mesma que à componente $\theta\theta$. Vamos fazer a seguinte substituição:

$$m(r) = \frac{1}{2G} \left(r - re^{-2\Lambda} \right), \quad (7.48)$$

onde podemos escrever a componente g_{rr} desta forma:

$$g_{rr} = e^{2\Lambda} = \left[1 - \frac{2Gm(r)}{r} \right]^{-1}, \quad (7.49)$$

de modo que a métrica ficará assim:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \left[1 - \frac{2Gm(r)}{r} \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (7.50)$$

Verifique que a componente tt das equações de Einstein (Eq. 7.45) pode ser escrita desta forma:

$$\boxed{\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho.} \quad (7.51)$$

Com esta equação, podemos calcular a massa da estrela em função da densidade de energia:

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'. \quad (7.52)$$

Sendo R o raio da estrela, a massa total será:

$$M = m(R) = 4\pi \int_0^R \rho(r') r'^2 dr'. \quad (7.53)$$

Vale registrar que M é energia total da estrela mais a energia gravitacional de ligação. Agora, voltamos a nossa atenção para a componente rr das equações de Einstein (Eq. 7.46). Elimando $e^{2\Lambda}$ em favor de $m(r)$, temos:

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{Gm(r) + 4\pi Gr^3 p}{r [r - 2Gm(r)]}. \quad (7.54)$$

Ao invés da componente $\theta\theta$ das equações de Einstein, vamos usar a lei de conservação de energia-momento $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Verifique que a única componente não nula desta equação é quando $\nu = r$:

$$(\rho + p) \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{dp}{dr}. \quad (7.55)$$

Esta equação nos diz qual o gradiente de pressão é preciso para manter o fluido estático em um campo gravitacional. Combinando a Eq. 7.55 com a Eq. 7.54, de modo a eliminar $d\Phi/dr$, temos:

$$\boxed{\frac{dp}{dr} = \frac{-(\rho + p) [Gm(r) + 4\pi Gr^3 p]}{r [r - 2Gm(r)]}}. \quad (7.56)$$

Esta é a *equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV)*, ou equação de equilíbrio hidrostático, que relaciona a pressão p com a função de massa $m(r)$ e a distância do centro r . Porém, esta e a Equação 7.51 não são suficientes para resolver o problema, pois temos três funções incógnitas (p , m e ρ) e apenas duas equações. Para termos um sistema fechado de equações, precisamos de uma equação para o estado termodinâmico do sistema do tipo $p = p(\rho, S)$, onde a pressão p será uma função da densidade de energia ρ e da entropia S do sistema. Para sistemas com baixa entropia, podemos desprezá-la e ficaremos com uma equação de estado assim:

$$\boxed{p = p(\rho)}. \quad (7.57)$$

Portanto, ficamos com três equações (7.51, 7.56 e 7.57) para três funções a determinar (m , ρ e p). A componente $g_{tt} = e^{2\Phi}$ da métrica pode ser encontrada através da Equação 7.54. Em geral, é muito difícil encontrar soluções analíticas para este sistema de equações dado uma equação de estado. No exercício abaixo, vamos resolver o caso simplificado quando a densidade é constante, solução analítica encontrada por Schwarzschild.

Exercício 49. Vamos supor que a estrela é composta por um fluido incompressível de densidade constante ρ . Mostre que a solução para a Eq. 7.51 é:

$$m(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi\rho r^3, & \text{para } r < R \\ \frac{4}{3}\pi\rho R^3, & \text{para } r \geq R, \end{cases} \quad (7.58)$$

onde R é o raio da estrela. Integre a Equação TOV (7.56), e mostre o resultado:

$$p(r) = \rho \left[\frac{R\sqrt{R - 2GM} - \sqrt{R^3 - 2GMr^2}}{\sqrt{R^3 - 2GMr^2} - 3R\sqrt{R - 2GM}} \right]. \quad (7.59)$$

Note um fato interessante, a pressão no centro da estrela $p(0)$ é infinita quando:

$$R < \frac{9}{4}GM. \quad (7.60)$$

Segundo a relatividade geral, estrelas assim não podem existir. Uma estrela que encolhe a esse tamanho irá eventualmente se colapsar em um buraco negro. Apesar de termos encontrado este resultado em uma situação idealizada onde $\rho = \text{constante}$, pode-se provar que qualquer estrela estática e com simetria esférica irá obedecer este limite. Este resultado é chamado de *teorema de Buchdahl*.

A vida de uma estrela é uma eterna disputa entre o calor e pressão gerados pela fusão nuclear que força a estrela a se expandir, e a gravidade que a faz comprimir. Uma estrela típica está em equilíbrio entre a pressão nuclear e a gravidade.

Porém, quando o combustível nuclear começa a esgotar, a temperatura diminui e a estrela começa a encolher. O colapso é eventualmente parado pela pressão de degenerescência dos elétrons, que resistem a compressão. Elétrons são férmions, então devem obedecer ao princípio de exclusão de Pauli, onde dois férmions não podem ocupar o mesmo estado. Estrelas sustentadas pela pressão de degenerescência dos elétrons são chamadas anãs brancas, e tem aproximadamente o tamanho da Terra.

Mas, se a massa total da estrela é maior do que o *limite de Chandrasekhar* ($M > 1,4M_{\odot}$, onde M_{\odot} é a massa do Sol), a pressão de degenerescência dos elétrons não será suficiente para parar o colapso. A estrela fica menor e mais densa, os elétrons se combinam com os prótons para formar nêutrons. O resultado é uma estrela de nêutrons, com um raio típico de 10 km. Estrelas de nêutrons têm pouca luminosidade, mas são detectados devido ao seu giro super-rápido e campos magnéticos extremamente fortes, que geram jatos de partículas. Também são chamados de pulsares.

Se a estrela tiver uma massa maior do que $3 - 4M_{\odot}$, o *limite de Oppenheimer-Volkov*, elas não serão capazes de resistir ao colapso gravitacional. Nesse caso, a estrela irá colapsar em um buraco negro.

8 Buracos Negros

Os buracos negros são alguns dos fenômenos que despertam maior fascínio entre os cientistas e pessoas curiosas. Muito desse fascínio surge do mistério que ronda tais objetos exóticos feitos de pura geometria. A gravidade no interior do horizonte de eventos (a fronteira que separa o buraco negro do resto do universo) é tão intensa que não permite que nada escape, nem mesmo a luz, justificando o fato de que os buracos negros são praticamente invisíveis. Apesar disso, os buracos negros podem ser detectados através dos efeitos gravitacionais produzidos na matéria. Alguns buracos negros habitam sistemas binários, onde a estrela companheira compartilha do seu gás, formando um disco de acreção que gira ao redor do buraco. Por causa do atrito, o disco de acreção emite calor e radiação, como é o caso de Cygnus X-1, que possui 10 massas solares, uma famosa fonte de raios-X. Também existem buracos negros supermassivos, com milhões ou até bilhões de vezes a massa do Sol, habitando o centro da maioria das galáxias. O Sagittarius A* é o buraco negro supermassivo da nossa galáxia, identificado por meio dos rápidos movimentos das estrelas que o orbitam. Outro buraco negro supermassivo conhecido fica no centro da galáxia M87, que se tornou famoso após a imagem captada pelo Telescópio de Horizonte de Eventos (EHT) ([ASTRONOMERS...](#), 2019).

A primeira vez que se especulou a existência de um objeto como um buraco negro foi em meados do século XVIII, de forma independente por John Michel e Pierre Laplace. Eles conjecturaram, usando a teoria da gravidade de Newton, que uma estrela negra, invisível, seria possível se a velocidade de escape a partir da sua superfície fosse maior do que a velocidade da luz. Pela conservação da energia, uma partícula lançada da superfície escapará da gravidade da estrela apenas se a energia cinética for igual a energia potencial:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GmM}{R_s}, \quad (8.1)$$

onde v é a velocidade de escape, m a massa da partícula, M a massa da estrela e r_s o raio da estrela. Se a velocidade for maior que a velocidade da luz ($v > c$), nem a luz poderia escapar da estrela. Então, o raio máximo que uma estrela precisaria ter para se tornar invisível é:

$$R_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (8.2)$$

Curiosamente, esta fórmula é a mesma para o raio do buraco negro de Schwarzschild na relatividade geral. Se pudéssemos, de alguma forma, contrair uma estrela para um raio menor do que R_s , teríamos formado um buraco negro. Para o Sol, esse raio é cerca de 3 km. Pode-se imaginar, a partir disso, o quão denso é um buraco negro!

8.1 Singularidades

Um buraco negro que não gira e não tem carga elétrica é totalmente descrito pela métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (8.3)$$

A métrica possui duas singularidades, pontos em que as coordenadas não se comportam bem, pois os coeficientes da métrica se tornam infinitos, em $r = 0$ e $r = R_s$. Aqui temos de distinguir entre dois tipos de singularidades: de curvatura e de coordenadas.

As singularidades de curvatura são pontos em que a curvatura do espaço-tempo se torna infinita. São pontos em que a relatividade geral simplesmente para de funcionar. O que acontece de fato nesses pontos, ainda é um mistério.

Em contrapartida, as singularidades de coordenadas acontecem porque o sistema de coordenadas que estamos usando para descrever o espaço falha naquele ponto. Pense, por exemplo, no espaço bidimensional plano descrito pelo sistema de coordenadas polar, dado pela transformação

$$x = r \cos \theta \quad (8.4)$$

$$y = r \sin \theta. \quad (8.5)$$

Veja que a transformação inversa falha na origem ($x = y = 0$):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (8.6)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (8.7)$$

Em $r = 0$, o ângulo θ é indefinido. Mas isso não significa que o ponto $r = 0$ é uma singularidade, pois o espaço se comporta bem no sistema de coordenadas cartesiano. Dizemos que esta é uma *singularidade de coordenadas*, quando o sistema de coordenadas falha em descrever corretamente esta região do espaço.

Como podemos dizer se uma singularidade é de curvatura ou devido ao sistema de coordenadas que estamos usando? Um jeito é calculando quantidades físicas que não dependem de um sistema de coordenadas. Tome, por exemplo, o tensor de curvatura de Riemann $R^{\rho}_{\sigma\mu\nu}$. Este tensor contém toda a informação sobre o espaço-tempo. Mas é um tensor, pois suas componentes se transformam de um sistema de coordenadas para o outro. Mas, com o tensor de Riemann podemos construir quantidades que não dependem de um sistema de coordenadas, como o escalar de Ricci, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Existem outras escolhas possíveis, como escalares de ordem mais alta como $R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, $R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}$, etc. Se algum desses escalares (mas não necessariamente

todos) divergem em algum ponto, então dizemos que o ponto é uma *singularidade de curvatura*.

O escalar de Ricci é nulo em todos os pontos para a métrica de Schwarzschild, pois é uma solução de vácuo ($R_{\mu\nu} = 0$). Entretanto, o invariante quadrático chamado escalar de Kretschmann,

$$R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48G^2M^2}{r^6}, \quad (8.8)$$

é indeterminado para $r = 0$, mostrando que este ponto se trata de uma verdadeira singularidade. Mas, para $r = R_s$, o escalar de Kretschmann não é singular, indicando que talvez este ponto não seja uma singularidade de curvatura. Se existir um sistema de coordenadas onde a métrica em $r = R_s$ é bem-comportada, então mostraremos que se trata de uma singularidade de coordenadas.

Vale destacar que estas singularidades só aparecem para a solução do vácuo, que é a métrica de Schwarzschild. O raio de uma estrela se estende muito além do raio de Schwarzschild. Vimos que dentro da estrela, a métrica de Schwarzschild não vale mais e não existem estas singularidades. Mas, se a estrela colapsar em um raio menor do que R_s , nada na natureza poderá impedir a criação de um buraco negro.

8.2 Buraco Negro de Schwarzschild

Fenômenos muito interessantes acontecem na superfície $r = R_s$ chamado de *horizonte de eventos*. Suponha um raio de luz se propagando radialmente em direção à $r = R_s$. Para raios de luz, $ds^2 = 0$, então

$$0 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2, \quad (8.9)$$

onde $d\theta = d\varphi = 0$, pois o raio de luz está se deslocando radialmente. A partir disso, podemos encontrar

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}. \quad (8.10)$$

Que se trata da inclinação dos cones de luz no diagrama do plano $t - r$ (sinal positivo para raios de luz se afastando de $r = 2GM$ e sinal negativo para raios de luz se aproximando de $r = 2GM$). Note que, quando $r \rightarrow \infty$, a inclinação tende à ± 1 , assim como o cone de luz no espaço-tempo plano. Quando $r \rightarrow 2GM$, a inclinação tende à $\pm\infty$, os cones de luz se fecham. Os raios de luz são assintóticos à $r = 2GM$. Conforme o tempo passa, se aproximam cada vez mais de $r = 2GM$, mas nunca o alcançam. Sendo que as partículas massivas viajam em trajetórias dentro dos cones de luz, um observador no infinito verá a partícula se aproximar cada vez mais devagar, sem nunca atravessar $r = 2GM$.

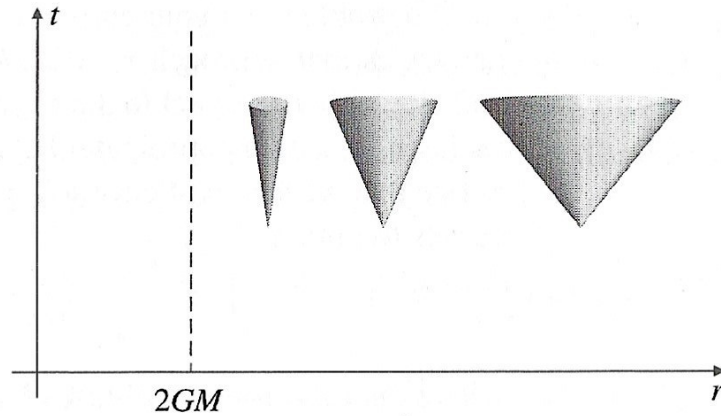


Figura 15 – Diagrama do plano $t - r$ do espaço-tempo de Schwarzschild. Nas coordenadas (t, r, θ, φ) , os cones de luz tendem a se fechar conforme se aproximam de $r = 2GM$ (CARROLL, 2019).

Agora, imagine um observador caindo em direção à $r = 2GM$ com um relógio no pulso. Será que ele alcança o horizonte de eventos em um tempo próprio finito?

Exercício 50. Usando a Equação 7.20, mostre que um observador caindo radialmente ($d\varphi = 0 \Rightarrow L = 0$), com energia $E = 1$ (partícula caindo do repouso no infinito), partindo de $r = R$, alcança $r = 2GM$ em um tempo próprio $\Delta\tau$ finito.

Como vimos no exercício acima, para o relógio do observador, ele atravessa o horizonte em um tempo próprio finito. Entretanto, é necessário um tempo coordenado infinito para o observador alcançar o horizonte. O tempo coordenado não se comporta bem no horizonte e nas proximidades. Somos obrigados a procurar um sistema de coordenadas que se comporte melhor nesta região. Começamos resolvendo a Equação 8.10:

$$t = \pm \left[r + 2GM \ln \left| \frac{r}{2GM} - 1 \right| \right] + \text{constante.} \quad (8.11)$$

Introduzimos uma nova coordenada r^* , voltando a fazer valer a expressão dos cones de luz com inclinação unitária ($t = \pm r^*$):

$$r^* = r + 2GM \ln \left| \frac{r}{2GM} - 1 \right|. \quad (8.12)$$

Exercício 51. Mostre que, neste novo sistema de coordenadas, onde substituímos r por r^* , a métrica de Schwarzschild se torna:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \left(-dt^2 + dr^{*2} \right) + r^2 d\Omega^2, \quad (8.13)$$

onde r está em função de r^* .

Note que nestas coordenadas, os cones de luz não se fecham, pois os raios de luz caindo radialmente tem sempre inclinação ± 1 . Além disso, nenhum componente da métrica se torna infinito quando $r = 2GM$. Entretanto, somos obrigados a pagar um preço por essa escolha. Pela Equação 8.12, perceba que $r = 2GM$ foi esticado para $r^* \rightarrow -\infty$. Justificando o nome de *coordenada tartaruga*, já que nunca chega em $r = 2GM$.

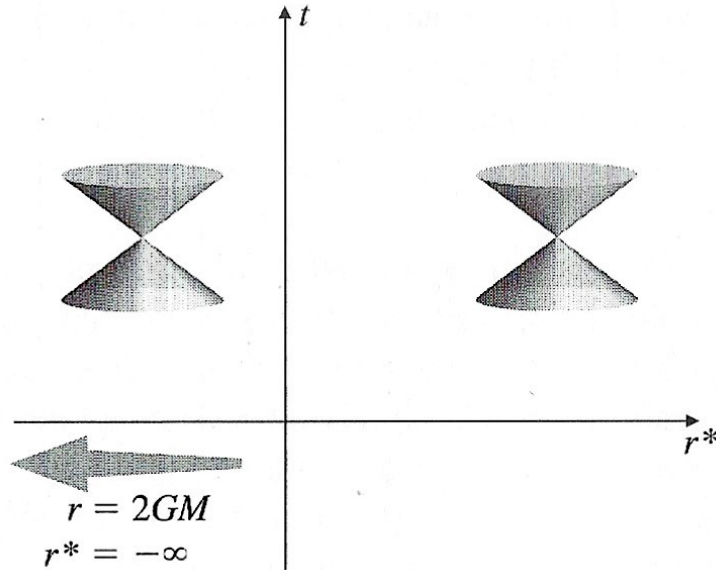


Figura 16 – Nas coordenadas de tartaruga, os raios de luz tem inclinação ± 1 . A superfície $r = 2GM$ foi esticada para o infinito (CARROLL, 2019).

Vamos além e definir novas coordenadas, uma para raios de luz caindo em direção à r decrescente (entrada) e outra para raios de luz se afastando em direção à r crescente (saída):

$$v = t + r^*, \text{ entrada} \quad (8.14)$$

$$u = t - r^*, \text{ saída} \quad (8.15)$$

onde $v = \text{constante}$ são geodésicas tipo luz de entrada, enquanto $u = \text{constante}$ são geodésicas tipo luz de saída. Este é o sistema de *coordenadas de Eddington-Finkelstein*.

Exercício 52. Mostre que, no sistema de coordenadas de Eddington-Finkelstein para raios de luz de entrada, a métrica se torna:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2, \quad (8.16)$$

onde você deve substituir t por v na métrica de Schwarzschild.

As componentes da métricas 8.16 não se tornam infinitas em $r = 2GM$. A métrica tem uma inversa que não diverge e tem determinante $g = -r^4 \sin^2 \theta$ que não é singular em $r = 2GM$. Como suspeitamos, $r = 2GM$ é apenas uma singularidade das coordenadas originais de Schwarzschild (t, r, θ, φ) . O espaço-tempo em $r = 2GM$ é bem-comportado e não possui singularidade de curvatura.

Impondo a condição de raios de luz para a métrica 8.16, duas soluções são possíveis:

$$\frac{dv}{dr} = 0 \quad (8.17)$$

$$\frac{dv}{dr} = 2 \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}. \quad (8.18)$$

O que essas soluções significam? Tomemos a Equação 8.14 e derivamos em relação à r , lembrando de usar a definição de r^* (Eq. 8.12). Obtemos:

$$\frac{dv}{dr} = \frac{dt}{dr} + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}. \quad (8.19)$$

Para a primeira solução (Eq. 8.17), temos

$$\frac{dt}{dr} = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}, \quad (8.20)$$

que é a equação para o raio de luz que está caindo em direção à $r = 2GM$ (entrada). Para a segunda solução (Eq. 8.18), a Equação 8.19 fica:

$$\frac{dt}{dr} = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}, \quad (8.21)$$

que é a equação para raios de luz que estão se afastando de $r = 2GM$ (saída).

Neste sistema de coordenadas, os cones de luz se comportam bem e um raio de luz vindo de fora do horizonte não terá problemas em cruzar $r = 2GM$. Uma vez que o horizonte foi atravessado, os cones de luz se inclinam horizontalmente, de modo que, para $r < 2GM$, todos os caminhos irão se orientar em direção à r decrescente. Além disso, raios de luz partindo do interior do horizonte, nunca conseguem sair do horizonte, ficando eternamente presos.

Portanto, nada do que acontece dentro do horizonte pode afetar futuramente os eventos de fora, tornando $r = 2GM$ uma fronteira entre eventos que podem se comunicar com observadores distantes, justificando o nome *horizonte de eventos*. Como nenhuma luz pode sair pelo horizonte, não podemos ver o que tem dentro, por isso estes objetos são chamados de *buracos negros*.

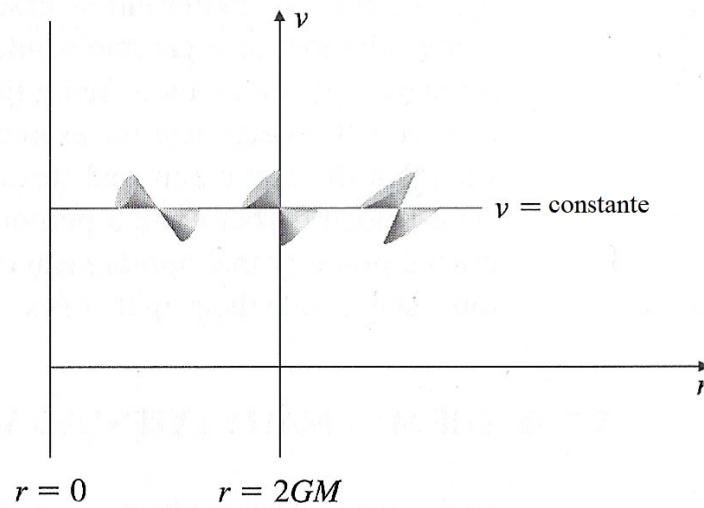


Figura 17 – Nas coordenadas de Eddington-Finkelstein, os raios de luz não tem problema para cruzar $r = 2GM$ e se inclinam em direção à r decrescente (CARROLL, 2019).

8.3 Coordenadas de Kruskal

Podemos ir mais além e encontrar a extensão máxima do espaço-tempo de Schwarzschild, chamada de *coordenadas de Kruskal* (T, X, θ, φ) , com T e X definidas como segue:

$$T = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} \sinh\left(\frac{t}{4GM}\right) \quad (8.22)$$

$$X = \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{1/2} e^{r/4GM} \cosh\left(\frac{t}{4GM}\right), \quad (8.23)$$

para $r > 2GM$, e

$$T = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right)^{1/2} e^{r/4GM} \sinh\left(\frac{t}{4GM}\right) \quad (8.24)$$

$$X = \left(1 - \frac{r}{2GM}\right)^{1/2} e^{r/4GM} \cosh\left(\frac{t}{4GM}\right) \quad (8.25)$$

para $0 < r < 2GM$. Nestas coordenadas, a métrica fica assim:

$$ds^2 = \frac{32G^3M^3}{r} e^{-r/2GM} \left(-dT^2 + dX^2\right) + r^2 d\Omega^2, \quad (8.26)$$

onde r é uma função implícita de X e T segundo a equação:

$$\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) e^{r/2GM} = X^2 - T^2. \quad (8.27)$$

Perceba que nestas coordenadas as componentes da métrica são não-singulares em $r = 2GM$. Mostrando que esta era uma singularidade das coordenadas de Schwarzschild.

O intervalo permitido para as coordenadas X e T é dado pela condição $r > 0$, de onde vem:

$$X^2 - T^2 > -1. \quad (8.28)$$

Verifique que, nestas novas coordenadas, os raios de luz radiais tem uma inclinação de ± 1 assim como fazem no espaço-tempo plano:

$$T = \pm X + \text{constante}, \quad (8.29)$$

que correspondem a retas com inclinação de 45° . Portanto, partículas massivas que viajam mais lentamente do que a luz, irão viajar em trajetórias onde em cada ponto terão uma inclinação com eixo T menor do que 45° . Note também que o horizonte de eventos ($r = 2GM$) é definido pelas linhas retas:

$$T = \pm X. \quad (8.30)$$

Além disso, curvas para r constante são dadas por equações de hipérbolas:

$$X^2 - T^2 = \text{constante}. \quad (8.31)$$

Superfícies para t constante são retas:

$$T = \tanh\left(\frac{t}{4GM}\right)X. \quad (8.32)$$

A singularidade física em $r = 0$ se encontra na região:

$$X = \pm(T^2 - 1)^{1/2}, \quad (8.33)$$

que é um hipérbole limitada pelas retas do horizonte. Com essas informações podemos traçar o *diagrama de Kruskal* do espaço-tempo de Schwarzschild maximamente estendido. No diagrama, suprimimos as coordenadas angulares, de modo que cada ponto represente uma esfera. Traçamos o eixo T e X . Podemos dividir o espaço-tempo em quatro regiões, separadas pelas retas $T = \pm X$ do horizonte de eventos.

A região I corresponde a região fora do buraco negro, $r > 2GM$. Um observador caindo radialmente, quando cruzar a reta $T = X$ entrará na região II. Depois de adentrar na região II, nada poderá impedir que caia na singularidade em $X = (T^2 - 1)^{1/2}$, pois todos os cones de luz futuros permanecem na região II. Além disso, todo sinal de luz enviado da região II irá permanecer na região II e eventualmente cair na singularidade. Portanto, a região II é o próprio *buraco negro*. A região III possui as mesmas propriedades da região II, só que revertidas no tempo. Qualquer observador presente na região III surgiu na singularidade $X = -(T^2 - 1)^{1/2}$ e, em um tempo próprio finito, irá deixar a região III. Chamamos a região III de *buraco branco*. As partículas podem escapar do buraco branco, mas nunca podem retornar. Por último temos a região IV, que

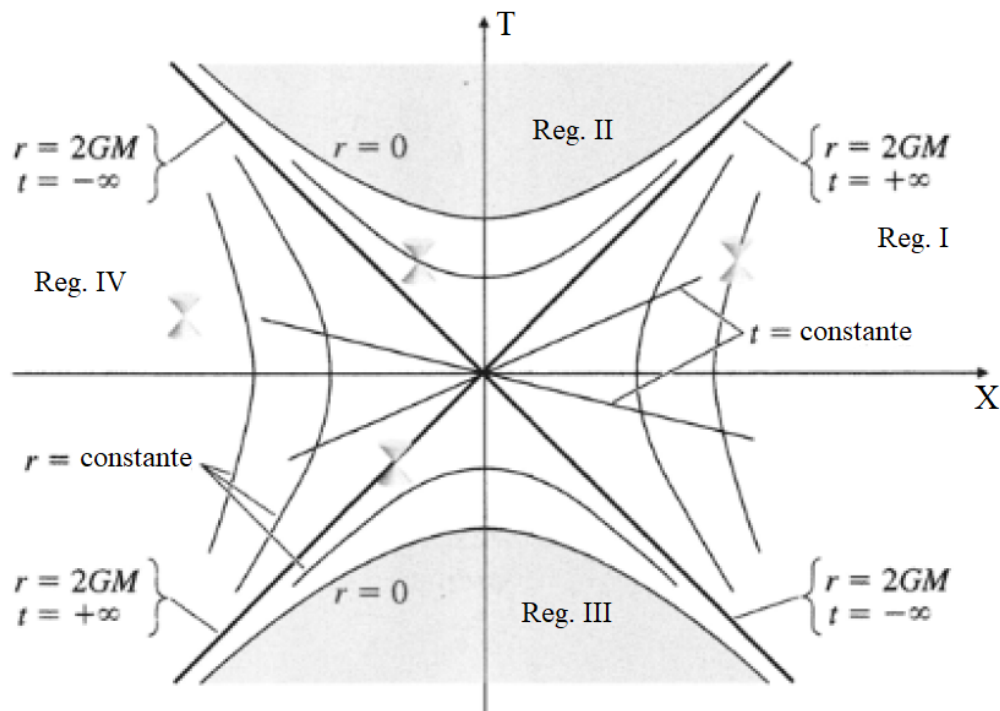


Figura 18 – Diagrama de Kruskal da solução de Schwarzschild maximamente estendida. (CARROLL, 2019)

possui as mesmas propriedades da região I e representa outra região do espaço-tempo assintoticamente plana completamente distinta.

Não esperamos encontrar a solução de Schwarzschild maximamente estendida em nosso universo. Para isso precisaríamos que duas regiões assintoticamente planas estivessem unidas desde o início por uma singularidade inicial. O que sabemos sobre cosmologia invalida esta possibilidade. Mas, ainda assim, as regiões I e II da solução maximamente estendida são descrições completas dos buracos negros de Schwarzschild.

8.4 Teoremas Importantes

Existem outras soluções possíveis para as equações de Einstein, como os buracos negros giratórios (métrica de Kerr) e com carga elétrica (métrica de Reissner-Nordstrom). Na verdade, apesar de sua fama, os buracos negros são objetos muito simples, puramente geométricos, completamente caracterizados por apenas três parâmetros: a massa M , a carga elétrica Q e o momento angular J . Esse é o famoso *Teorema da Calvície*, pois, aparentemente, os buracos negros não possuem cabelo.

O colapso gravitacional real não é esférico, já que uma estrela real não é perfeitamente esférica. Entretanto, em um colapso quase esférico todas as partes não esféricas da distribuição de massa serão irradiados em ondas gravitacionais deixando um bu-

raco de negro de Kerr se $J \neq 0$ ou de Schwarzschild se $J = 0$.

Outro resultado importante é o *Teorema da Área de Hawking*: "Em qualquer processo dinâmico envolvendo buracos negros, a área total de todos os horizontes não pode diminuir com o tempo". Aqui, assume-se uma densidade local de energia positiva ($\rho > 0$). Isso faz sentido, pois tudo o que cai dentro do buraco negro, está preso e nunca poderá sair, aumentando a massa e, conseqüentemente, a área do buraco negro. Lembre-se, a área do buraco negro de Schwarzschild é $A = 4\pi R_s^2$, onde $R_s = 2GM$.

A singularidade central dos buracos negros é um problema que indica que a relatividade geral falha em descrever completamente o espaço-tempo e deve ser substituída por outra teoria da gravidade melhor. Entretanto, as singularidades dos buracos negros que vimos estão sempre escondidas por um horizonte de eventos, o que é ótimo, pois singularidades nuas (sem horizonte de eventos) desafiam a previsibilidade da Relatividade Geral. Com isso em mente, Roger Penrose formulou a *Conjectura da Censura Cósmica*, onde afirma que singularidades nuas não poderiam surgir no universo. Essa conjectura ainda não foi provada e constitui um problema em aberto da física matemática.

8.5 Buracos Negros Giratórios

A solução de Kerr descreve um buraco negro que gira com momento angular J e massa M , e parâmetro $a = J/M$. A métrica possui simetria axial ao redor do eixo de rotação e pode ser escrita como segue:

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} dt^2 - 2a \frac{2Mr \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\varphi + \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\rho^2} \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2,$$

onde

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \quad (8.34)$$

e

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (8.35)$$

Perceba que, quando $a \rightarrow 0$, a métrica se aproxima de Schwarzschild. Quando $M \rightarrow 0$, retornamos ao espaço-tempo plano, só que nas coordenadas elipsoidais. O horizonte de eventos na métrica de Kerr acontece quando $g_{rr} \rightarrow \infty$. Existem três casos. Para $M < a$ temos um singularidade nua, que não é fisicamente plausível. $M = a$ é um caso extremo e provavelmente instável. Quando $M > a$, que é o caso mais realista, temos dois horizontes de eventos, um externo e outro interno:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (8.36)$$

A verdadeira singularidade de curvatura não acontece apenas em $r = 0$ nesse espaço-tempo, mas sim quando $\rho = 0$. Como $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ é formado de duas quantidades não negativas, ρ apenas é nulo quando $r = 0$ e $\theta = \pi/2$. Logo, a singularidade tem o formato de um anel.

Uma característica interessante do espaço-tempo de Kerr é o arrasto dos quadros inerciais. Por causa dos elementos não diagonais da métrica, $g_{t\phi}$ e $g_{\phi t}$, todas as partículas serão arrastadas pela influência da gravidade, adquirindo uma velocidade angular no mesmo sentido de rotação do buraco negro.

Outra estrutura importante é a ergosfera, localizado dentro da superfície limite estacionária, onde $g_{tt} = 0$, e fora do horizonte de eventos exterior r_+ . A superfície limite estacionária satisfaz a equação:

$$r_0 = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (8.37)$$

Um fóton emitido na ergosfera irá se mover na mesma direção do buraco negro ou, se lançado na direção contrária ao giro do buraco negro, ficará imóvel em relação ao sistema de coordenadas. Dentro da ergosfera o arrasto se torna tão forte que o fóton não é capaz de se mover na direção contrária ao movimento do buraco negro. Como uma partícula massiva se move mais lentamente que um fóton, então irá obrigatoriamente girar com o buraco negro. Isso é explicado pelo fato que, na ergosfera, o tempo t se torna coordenada espacial e o ângulo ϕ se torna coordenada temporal.

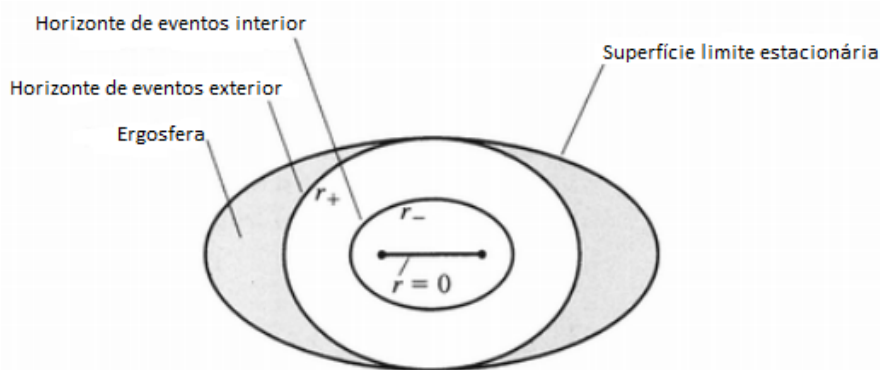


Figura 19 – Estrutura do buraco negro de Kerr. Os horizontes de eventos são superfícies onde se torna impossível voltar para certa região do espaço. É possível atravessar a superfície limite estacionária e voltar, mas dentro da ergosfera é impossível ser um observador estacionário. (CARROLL, 2019)

Exercício 53. Considere que um fóton é emitido na direção ϕ em algum raio r no plano equatorial ($\theta = \pi/2$) de um buraco negro de Kerr. No instante em que é emitido, o fóton só possui as componentes U^t e U^ϕ da quadrivelocidade. Portanto, sua trajetória satisfaz:

$$ds^2 = 0 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dtd\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2. \quad (8.38)$$

Mostre que a velocidade angular do fóton possui duas soluções:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{a}{2G^2M^2 + a^2} \quad (8.39)$$

e

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0. \quad (8.40)$$

A primeira solução é um fóton que se move com a mesma velocidade de rotação do buraco negro. A segunda solução é um fóton que partiu na direção contrária ao buraco negro e não se move em relação a este sistema de coordenadas. Este é o fenômeno conhecido como *arrasto de quadros inerciais*.

Por causa dessa troca entre coordenadas, a energia de uma partícula na ergosfera pode assumir valores positivos ou negativos como medido por um observador no infinito. Isso implica na possibilidade do Processo de Penrose, em que podemos retirar energia de um buraco negro de Kerr. Imagine que uma partícula A é instável e entra na ergosfera. Se ela decair em duas partículas, B e C, e se a energia de C é negativa (como é permitido na ergosfera), então a energia de B será maior do que A. Pela conservação de energia, temos $E_A = E_B + E_C$ e $E_C < 0$, então $E_B > E_A$. Se a partícula B tiver energia suficiente para sair da ergosfera, então o buraco negro terá perdido energia.

8.6 Termodinâmica de Buracos Negros

Nós podemos extrair energia de um buraco negro por meio do Processo de Penrose, mas não podemos violar o teorema da área de Hawking: "A área do horizonte de eventos não diminui." Se o buraco negro perde massa, então o seu momento angular deve diminuir. Quando toda a energia possível devida ao momento angular é extraída, temos um buraco negro de Schwarzschild.

A relação entre a variação da massa M , da área do horizonte de eventos A e do momento angular J é dada por:

$$dM = \frac{k}{8\pi G} dA + \Omega_H dJ, \quad (8.41)$$

onde k é a constante gravidade superficial e Ω_H a velocidade angular do horizonte de eventos. Essa equação é a primeira lei da termodinâmica para os buracos negros, com a correspondência entre a energia E e a massa M , TdS com $kdA/8\pi G$ e o trabalho dW com o termo $\Omega_H dJ$.

Já a segunda lei da termodinâmica nos diz que a entropia em um sistema fechado não diminui, $dS \geq 0$. Como a área do horizonte de eventos também não pode diminuir com o passar do tempo, já que nada pode escapar do horizonte, $dA \geq 0$,

podemos concluir que existe uma relação entre a entropia de um buraco negro e a área do seu horizonte. É claro que os buracos negros devem possuir entropia, senão poderíamos violar a segunda lei da termodinâmica jogando coisas pelo horizonte de eventos.

Mas, se buracos negros são objetos termodinâmicos, possuem entropia e respeitam as leis da termodinâmica, também devem emitir radiação em uma temperatura T . Mas, isso é impossível, tendo em vista que nada pode sair do interior do buraco negro. Este problema não pode ser resolvido classicamente. É necessário que tomemos uso da teoria quântica de campos, onde encontraremos a expressão de Hawking para a temperatura da radiação emitida pelos buracos negros:

$$T = \frac{k}{2\pi}. \quad (8.42)$$

A descrição termodinâmica dos buracos negros só é possível aplicando os princípios da teoria quântica no espaço-tempo curvo, que é o tema do próximo capítulo.

9 Cosmologia

A cosmologia é o estudo do universo como um todo, com o objetivo de entender do que é feito, qual a sua origem, evolução e talvez até mesmo inferir o seu destino. Entender a história do universo também é entender a nós mesmos, como chegamos até aqui, como os elementos dos nossos corpos foram formados e como a nossa galáxia e a estrela que chamamos de Sol nasceram. O desenvolvimento científico foi capaz de rastrear a origem de tudo o que conhecemos em um momento singular há 13,7 bilhões de anos atrás.

A história da cosmologia por vezes se confunde com a história da astronomia. Pode-se dizer que um grande passo para o que chamamos de cosmologia começou quando Copérnico depôs a Terra do centro do universo e colocou o Sol no seu lugar. Giordano Bruno foi mais além e especulou um universo infinito, sem centro, onde as estrelas ditas fixas são outros Sóis, com seus próprios sistemas solares, provavelmente com planetas e até vida inteligente. Que pensamento avançado para uma pessoa do século 16! Somente no século 19 e 20 os astrônomos foram capazes de situar o Sol como uma das 200 bilhões de estrelas na galáxia Via Láctea, e descobriram que a Via Láctea é apenas uma entre uma infinidade de galáxias no universo. Em poucos séculos a nossa compreensão do universo aumentou enormemente, de um espaço restrito ao nosso planeta a um universo praticamente infinito.

Um problema bastante interessante que teve um enorme impacto no estudo da cosmologia ao longo dos séculos é o Paradoxo da Noite Escura, proposto por Olbers, mas também descrito por Kepler e Halley. Podemos enunciar o problema da seguinte forma: "Suponha um universo infinito em tamanho e infinitamente antigo, onde a matéria que o preenche está distribuída uniformemente. Em tal universo é razoável supor que cada ponto do céu levará até uma estrela. E como o universo é infinitamente antigo, a luz não teve problemas em chegar até nós, não importa o quão distante a estrela esteja. Portanto, o céu deveria brilhar tão intensamente quanto a superfície do Sol. Então, surge a pergunta: por que o céu noturno é escuro?" Cientistas de muitas épocas, com o conhecimento cosmológico que possuíam, tentaram resolver esse problema, mas nenhuma solução satisfatória foi encontrada. Veremos como a cosmologia moderna resolve o paradoxo da noite escura.

Uma das maiores descobertas da ciência aconteceu em 1929 quando o astrônomo Edwin Hubble descobriu que o universo está se expandindo. Isso quebrava o paradigma intocável de tantos cientistas e filósofos que acreditavam que o nosso universo deveria ser estático. Até mesmo Albert Einstein acreditava nisso e inventou a constante cosmológica de modo que a relatividade geral pudesse suportar soluções

estáticas. A descoberta de Hubble mudou a cosmologia. Analisando o espectro eletromagnético das galáxias distantes, Hubble descobriu que as galáxias apresentavam um redshift (desvio para o vermelho), indicando que elas estavam se afastando de nós a altíssimas velocidades. E, quanto mais distante a galáxia está, maior é o redshift, ou seja, mais rápido a galáxia se afasta. Então, ele concluiu a lei que leva o seu nome:

$$v = HD, \quad (9.1)$$

onde v é a velocidade de recessão da galáxia, D a distância da galáxia até a Terra e H uma constante de proporcionalidade chamada de *parâmetro de Hubble* que atualmente vale $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, sendo que $1 \text{ pc} = 3,26 \text{ anos-luz}$. As unidades de H parecem estranhas, mas fazem sentido em um contexto cosmológico. Uma galáxia distante de nós 1 Mpc está se afastando com uma velocidade de 71 km/s . E uma galáxia a 2 Mpc está se distanciando a 142 km/s .

O que está acontecendo? Por que as galáxias estão se afastando de nós? Uma explicação óbvia seria que estamos no centro do universo e as galáxias estão se afastando deste centro. Agora, tomamos o cuidado de lembrar a lição de humildade que Copérnico nos ensinou ao não acharmos que somos o centro do universo. Além do mais, a relatividade geral é contra observadores especiais e uma espécie de centro do universo implicaria nisso. Portanto, é a hipótese mais simples e mais provável que todo o universo esteja em expansão e que todas galáxias verão as outras galáxias se afastando delas segundo a Lei de Hubble. O universo é como a superfície de uma bexiga em expansão. Não existe centro da superfície de uma bexiga. A expansão da bexiga acontece em toda a superfície da bexiga. Se desenharmos pontos na superfície da bexiga como galáxias, os pontos irão se afastar enquanto a bexiga infla conforme a Lei de Hubble.

Exercício 54. Usando a métrica da esfera em expansão:

$$ds^2 = R(t) \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \right), \quad (9.2)$$

onde o raio $R(t)$ é uma função do tempo, ou seja, a esfera se expande, mostre que pontos fixos na esfera se afastam seguindo a Lei de Hubble (equação 9.1).

Uma consequência óbvia da expansão é o fato que, ao invertermos a direção do tempo, o que era expansão se torna contração. O universo era menor no passado e a matéria estava mais densa e quente. Se voltarmos tempo suficiente, todo o universo estará concentrado em um único ponto chamado de singularidade cosmológica. Esta é a Teoria do Big Bang, que sugere como se deu a origem do universo, ou pelo menos do universo como o conhecemos atualmente. O fato do universo ser jovem resolve o paradoxo da noite escura que discutimos a pouco. Como o universo tem uma idade

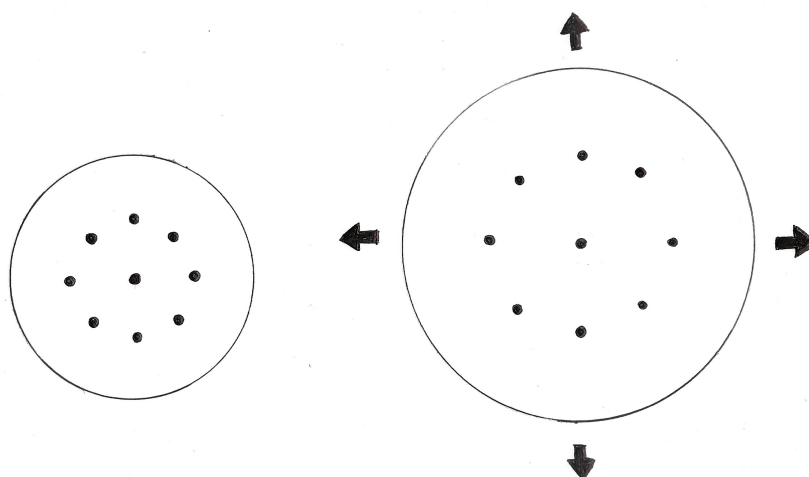


Figura 20 – O universo se expande como a superfície de uma bexiga. Todas as distâncias relativas aumentam com a mesma taxa. Não existe centro. Todos os pontos verão os outros pontos se afastarem com uma velocidade proporcional à distância.

finita, a luz das estrelas distantes ainda não tiveram tempo de nos alcançar. Além disso, algumas estrelas estão tão distantes que a sua luz sofreu redshift por conta da expansão de tal forma que se tornou indetectável. Portanto, a noite é escura.

Aqui é conveniente desfazer o equívoco comum de que o Big Bang foi uma explosão, como indica o nome. De fato, não foi uma explosão, mas sim a expansão do espaço como um todo a partir de uma região minúscula. A maior evidência de que o início do universo foi quente e denso como a teoria do Big Bang sugere é a Radiação Cósmica de Fundo em Micro-ondas, descoberta por Penzias e Wilson em 1965. É uma fraca radiação de mais ou menos 2,7 K que vem de todas as partes do céu de forma praticamente isotrópica (igual em todas as direções). É um fóssil de um universo recém nascido com apenas 380.000 anos de idade. Uma fotografia de quando os primeiros átomos neutros surgiram e o espaço deixou de ser opaco, permitindo a passagem dos fótons. A luz que recebemos sofreu redshift de tal forma que só vemos o seu resquício fraco em micro-ondas.

9.1 Princípio Cosmológico

Antes de criarmos um modelo cosmológico para o universo, precisamos observar e identificar as características do nosso universo, que nos guiarão até a formulação do modelo. Além disso, identificar simetrias do nosso universo é uma boa forma de simplificar as equações de Einstein. As principais características do nosso universo são a homogeneidade e a isotropia.

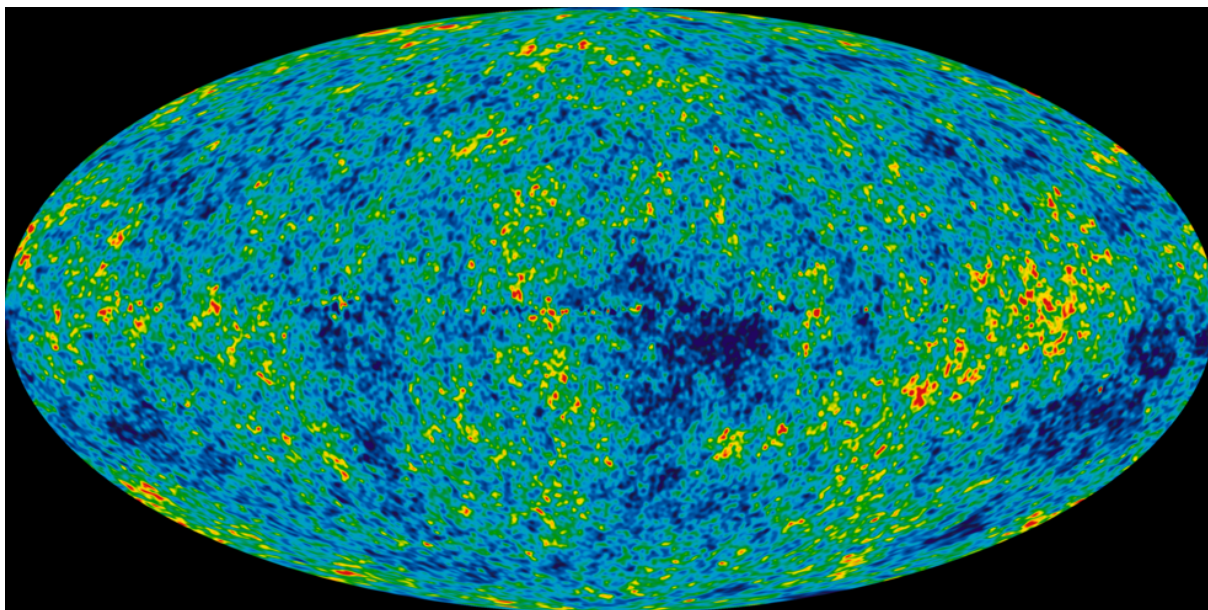


Figura 21 – Imagem da Radiação Cósmica de Fundo em Micro-ondas detectada pela sonda WMAP. As diferenças de cores são flutuações na temperatura de uma parte em 100 mil. Estas flutuações são as sementes para a formação das galáxias quando o universo tinha menos de 400 mil anos de idade. NASA, 2006.

Por homogeneidade queremos dizer que, nas grandes escalas do universo, a matéria parece estar distribuída de forma homogênea pelo espaço. As escalas que estamos falando são de bilhões de anos-luz, onde as galáxias parecem tão pequenas quanto átomos. Nesta escala, as galáxias e aglomerados de galáxias parecem estar distribuídos uniformemente, com a mesma densidade média de matéria em todo lugar.

Por isotropia queremos dizer que o universo parece o mesmo, não importa a direção que você olhe. Isso fica claro quando analisamos as fotografias de campo profundo do telescópio espacial Hubble, como a Figura 22. Estas fotografias são feitas apontando o telescópio para uma região minúscula e escura do céu para ver o que existe lá. Não importa a direção em que apontamos o telescópio nós vemos quase a mesma coisa, uma infinidade de galáxias distribuídas uniformemente. A mesma isotropia pode ser observada na radiação cósmica de fundo.

Tomamos a homogeneidade e isotropia do universo como hipóteses pois, como a velocidade da luz é finita e o universo é estonteantemente grande, só vemos as galáxias cuja luz teve tempo de chegar até nós desde o nascimento do universo. A região do universo que conseguimos enxergar chamamos de universo observável. O universo não acessível para nós pode muito bem ser diferente do universo que podemos observar. Mas é uma hipótese mais simples e, portanto, mais provável, que o universo como um todo se pareça como o universo observável. Essas duas hipóteses chamamos de Princípio Cosmológico, que juntas implicam em um universo uniforme, onde não há



Figura 22 – Imagem do eXtreme Deep Field do telescópio espacial Hubble de uma porção do céu com tamanho de uma fração do diâmetro angular da Lua cheia. Aqui vemos galáxias há 13,2 bilhões de anos no passado, algumas centenas de milhões de anos após o Big Bang. O universo nesta época era pobre em elementos pesados. As jovens galáxias são compostas de estrelas gigantes e muito mais brilhantes que o nosso Sol. NASA, 2009.

direção especial ou lugares especiais no universo.

9.2 Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Para encontrar soluções cosmológicas para as equações de Einstein seguimos a mesma estratégia que para encontrar a métrica de Schwarzschild. Primeiro, impomos as condições de simetria e derivamos uma métrica genérica. Depois, inserimos a métrica genérica nas equações de Einstein. Uma métrica capaz de descrever o nosso universo deve satisfazer o princípio cosmológico, ou seja, deve ser homogênea e isotrópica.

Vamos escolher um sistema de coordenadas onde podemos definir hipersuperfícies homogêneas e isotrópicas em cada intervalo de tempo t . Neste sistema de coordenadas, as galáxias terão posições fixas, de modo que o tempo coordenado t corresponda ao tempo próprio τ das galáxias e de qualquer observador estacionário. Este é um *sistema de coordenadas comóveis*. Em um universo em expansão, descrito por coordenadas comóveis, as galáxias não se movem, permanecem em repouso enquanto o próprio espaço entre as galáxias se expande. Portanto, a distância coordenada entre duas galáxias não muda com o passar do tempo, mas a distância própria sim. Aqui ignoramos o movimento aleatório das galáxias devido às interações com outras galáxias, pois é uma velocidade muito menor comparada à da expansão do universo. A métrica que estamos procurando pode ser escrita dessa forma:

$$ds^2 = -dt^2 + ds_3^2(t), \quad (9.3)$$

onde $ds_3^2(t)$ é o elemento de linha da hipersuperfície espacial para um tempo t . A métrica da hipersuperfície é:

$$ds_3^2(t) = h_{ij}(t)dx^i dx^j. \quad (9.4)$$

Os $h_{ij}(t)$ dependem de t pois a hipersuperfície deve se expandir. A expansão precisa ser isotrópica, ou seja, igual para todas as direções. Impomos isso fazendo com que todos os coeficientes da métrica sejam proporcionais a uma função de t , dessa forma:

$$ds_3^2(t) = a^2(t)h_{ij}dx^i dx^j. \quad (9.5)$$

Chamamos a função $a(t)$ de fator de escala, que contém a informação sobre a expansão do universo, se algum dia a expansão vai parar ou vai continuar para sempre, ou se o universo vai contrair.

Exercício 55. Suponha uma hipersuperfície bidimensional plana com métrica:

$$ds_2^2 = f^2(t)dx^2 + g^2(t)dy^2. \quad (9.6)$$

Mostre que, se $f(t) \neq g(t)$, a expansão não é isotrópica, ou seja, $v^x \neq v^y$.

Para ser isotrópica, a métrica da hipersuperfície h_{ij} deve ter simetria esférica localizada em todos os pontos. Desse modo, cada observador na hipersuperfície, não importa onde esteja, verá a mesma coisa todas as direções. Pegamos a equação 7.3, apenas a hipersuperfície perpendicular ao tempo t :

$$ds_3^2 = e^{2\Lambda(r)}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (9.7)$$

Para ser homogênea, devemos fazer a imposição de que um invariante, que não depende do sistema de coordenadas, como o escalar de Ricci R , seja uma constante em

todos os pontos da hipersuperfície. Tomando a equação 7.35 e fazendo $\Phi = 0$, encontramos:

$$R = \frac{2}{r^2} + \frac{4}{r}\Lambda'e^{-2\Lambda} - \frac{2e^{-2\Lambda}}{r^2}. \quad (9.8)$$

Que pode ser escrito assim:

$$R = \frac{2}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1 - e^{-2\Lambda})]. \quad (9.9)$$

Fazendo $f = r(1 - e^{-2\Lambda})$, podemos resolver facilmente a equação diferencial para esta variável:

$$f = \frac{R}{6} r^3. \quad (9.10)$$

Retornando as variáveis antigas, resolvemos para $e^{2\Lambda}$:

$$e^{2\Lambda} = \frac{1}{1 - kr^2}, \quad (9.11)$$

onde $k = R/6$ é a constante de curvatura. Portanto, a métrica da hipersuperfície fica:

$$ds_3^2 = a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (9.12)$$

E a métrica completa com o tempo, chamada de *métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*, ou FLRW:

$$\boxed{ds^2 = dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]}, \quad (9.13)$$

descobertas independentemente por Friedmann e Lemaître, e demonstrado por Robertson e Walker serem as únicas métricas espacialmente homogêneas e isotrópicas. Fazendo uma transformação em r e $a(t)$, podemos normalizar a constante k para apenas três valores:

$$k = -1, 0, +1. \quad (9.14)$$

Portanto, a métrica FLRW descreve três universos homogêneos e isotrópicos possíveis. Para $k = 0$, a métrica da hipersuperfície será:

$$ds_3^2 = a^2(t)(dr^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (9.15)$$

Esta é a métrica euclidiana, plana, sem curvatura. Dizemos que este é um modelo de universo *plano*, infinito em tamanho. Para $k = +1$, a métrica da hipersuperfície será:

$$ds_3^2 = a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\Omega^2 \right]. \quad (9.16)$$

Para enxergar a geometria neste caso, vamos fazer a seguinte substituição:

$$d\chi^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2}. \quad (9.17)$$

Integrando esta equação, obtemos:

$$r = \sin \chi \quad (9.18)$$

e a métrica fica:

$$ds_3^2 = a^2(t) \left[d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2 \right]. \quad (9.19)$$

Esta é a métrica de uma 3-esfera de raio $a(t)$. Chamamos este modelo de universo *fechado* ou *esférico*. É um universo finito, mas sem limites, já que é fechado em si mesmo. Podemos ver isso pela equação 9.19, já que $\sin \chi$ é periódica, χ e $\chi + 2\pi$ com as outras coordenadas iguais descrevem o mesmo ponto. Partindo de um ponto, se viajarmos bastante, podemos retornar para o ponto de partida.

Uma 3-esfera é a generalização de uma esfera para quatro dimensões. É um conjunto de pontos no espaço euclidiano quadridimensional que estão a uma distância $a(t)$ da origem. Isso não significa que exista uma quarta dimensão, já que tudo o que podemos medir está confinado nesta hipersuperfície tridimensional. Pense nesta imagem quadridimensional apenas como uma forma de visualizar a 3-esfera.

Exercício 56. Para $k = -1$, encontre a transformação de coordenadas que leva a métrica de FLRW ao formato:

$$ds_3^2 = a^2(t) \left[d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega^2 \right]. \quad (9.20)$$

Chamamos o modelo descrito pela equação 9.20 de universo *aberto* ou *hiperbólico*, pois é um universo infinito em tamanho e com curvatura negativa. Podemos ver que o espaço descrito por essa métrica é ilimitado pois $\sinh \chi$ não possui período.

Resumindo, em coordenadas $(t, \chi, \theta, \varphi)$, a métrica FLRW toma a forma:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \begin{cases} d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) & (k = +1) \\ d\chi^2 + \chi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) & (k = 0) \\ d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) & (k = -1) \end{cases} \quad (9.21)$$

Para $k = -1, 0$ temos universos infinitos em tamanho e para $k = +1$ um universo fechado, finito em tamanho e sem borda. Aqui surge uma questão muito interessante: é possível um universo finito com uma borda?

A definição de universo é tudo o que existe. Uma borda indicaria que existem coisas que não fazem parte do universo, o que é logicamente inconsistente com a nossa definição. Portanto, o universo deve ser ilimitado. Isso não significa que o universo seja necessariamente infinito, pois ele pode ser finito e sem borda como o universo esférico.

Deixando esta discussão ainda mais filosófica, o tempo e o espaço não são entidades separadas do universo, mas são entidades físicas que estão contidas no universo. Portanto, é logicamente errôneo falar de um tempo antes do universo, já que o tempo surgiu com o universo. Esticando a nossa definição ao máximo, de que o universo contém tudo, podemos inferir que o universo também deve possuir o seu próprio mecanismo de origem, o que é uma possibilidade interessante.

Podemos derivar a Lei de Hubble (equação 9.1) a partir da métrica FLRW (equação 9.13). Perceba que a distância coordenada Δx entre duas galáxias não muda com a expansão do universo, já que escolhemos o sistema de coordenadas comóveis. Mas a distância própria D muda com o fator de escala, $D = a(t)\Delta x$. Derivando essa equação no tempo:

$$v = \frac{dD}{dt} = \dot{a}\Delta x = \frac{\dot{a}}{a}D = HD, \quad (9.22)$$

que é a Lei de Hubble, onde definimos o parâmetro de Hubble como:

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (9.23)$$

Veja que o parâmetro de Hubble depende do tempo. Note também que, para D suficientemente grande, a velocidade de afastamento entre as galáxias será maior do que a velocidade da luz. Isso não contradiz o resto da teoria da relatividade, pois a velocidade da luz é um limite local. Além disso, nada impede que a velocidade de expansão do espaço seja maior do que a velocidade da luz.

Imagine que uma galáxia, com posição coordenada fixa no sistema de coordenadas cosmológico, emitiu luz no tempo t que recebemos em t_0 . Por causa da expansão do universo, a luz sofrerá o efeito de redshift. Lembre-se que, quando a métrica é independente de uma coordenada x^μ , o respectivo componente do quadrimomento p_μ é conservado durante o movimento geodésico. Como a métrica FLRW é homogênea e isotrópica, então as componentes espaciais p_i são constantes.

Assumindo que o fóton viaja ao longo de uma linha radial ($d\theta = d\varphi = 0$), usando a equação 9.21, a geodésica deve obedecer a expressão:

$$0 = -dt^2 + a^2(t)d\chi^2. \quad (9.24)$$

Usando a normalização do quadrimomento do fóton, $p_\mu p^\mu = 0$, podemos obter a energia da partícula:

$$E = -p_0 = -\frac{p_\chi}{a(t)}. \quad (9.25)$$

O redshift mede a variação do comprimento de onda da luz que recebemos λ_{obs} em contraste com o comprimento da luz emitido λ_{emit} :

$$1 + z = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{emit}}. \quad (9.26)$$

Usando a expressão da mecânica quântica que determina a energia do fóton ($E = hc/\lambda$), temos:

$$1 + z = \frac{E_{emit}}{E_{obs}}. \quad (9.27)$$

Usando a equação 9.25, obtemos o redshift em função do fator de escala:

$$\boxed{1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)}}. \quad (9.28)$$

Para galáxias próximas, $t_0 - t \sim D$, onde D é a distância própria e $c = 1$. Expandindo o fator de escala até primeira ordem:

$$a(t_0) \sim a(t) + (t_0 - t)\dot{a}(t). \quad (9.29)$$

Dividindo os dois lados da equação por $a(t)$:

$$\frac{a(t_0)}{a(t)} \sim 1 + D \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (9.30)$$

Substituindo essa expressão na equação 9.28, obtemos:

$$z \sim \frac{\dot{a}}{a} D, \quad (9.31)$$

que foi o que Hubble observou, uma relação linear entre o redshift das galáxias e sua distância. Note que esta expressão só é válida para galáxias em nossa vizinhança cósmica. Para galáxias mais distantes, o redshift irá se afastar de uma relação linear.

Somos tentados a usar a expressão do efeito Doppler (equação 4.80) da relatividade especial que daria $z \sim v$ para baixas velocidades, onde obteríamos a Lei de Hubble $v \sim HD$. Mas isso só é válido em nossa vizinhança, onde a métrica é aproximadamente a da relatividade especial. Em suma, o redshift cosmológico não é um efeito Doppler devido ao deslocamento das galáxias no espaço, mas sim um efeito da própria expansão do espaço.

9.3 Equações de Friedmann

Lembrando da nossa discussão sobre o princípio cosmológico, um universo homogêneo deve ser preenchido por um fluido perfeito e homogêneo. Um fluido perfeito é totalmente descrito pela densidade de energia ρ , pressão p e quadrivelocidade U^μ . O fluido deve estar em repouso no quadro cosmológico, $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$, pois se não estivesse o universo não seria isotrópico (a direção em que o fluido viaja seria preferencial). Além disso, um fluido homogêneo tem uma densidade de energia e pressão constantes em todos os pontos, ou seja, são grandezas que só dependem do tempo, $\rho = \rho(t)$ e $p = p(t)$. O tensor de energia-momento de um fluido perfeito:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (9.32)$$

No quadro cosmológico,

$$T^{\mu}_{\nu} = \text{diag}(-\rho, p, p, p). \quad (9.33)$$

E o traço:

$$T = T^{\mu}_{\mu} = -\rho + 3p. \quad (9.34)$$

Exercício 57. O tensor de energia-momento satisfaz a lei de conservação:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (9.35)$$

Por causa da isotropia, as componentes espaciais $\nu = i$ são triviais. Mostre que, da componente temporal $\nu = t$ temos a equação:

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p). \quad (9.36)$$

Existem três origens possíveis para a densidade de energia e pressão. Nos exercícios abaixo lidaremos com cada uma das fontes de energia e pressão.

Exercício 58. Pode ter origem na matéria composta de partículas não-relativísticas, se movendo a uma velocidade muito menor do que a velocidade da luz, onde a pressão é negligenciável, $p \sim 0$. Resolvendo a equação 9.36, mostre que

$$\rho_M \propto a^{-3}. \quad (9.37)$$

Isso significa que a densidade de energia da matéria diminui com a expansão do universo, como é de se esperar, pois a matéria se torna mais espalhada enquanto o espaço entre as galáxias aumenta.

Exercício 59. Pode ter origem na radiação e partículas relativísticas se movendo muito próximas da velocidade da luz, de modo que se tornam indistinguíveis de fótons. Da equação 4.98, temos que o traço da energia momento fica:

$$T = T^{\mu}_{\mu} = F^{\mu\lambda}F_{\mu\lambda} - \frac{1}{4}4F^{\lambda\sigma}F_{\lambda\sigma} = 0. \quad (9.38)$$

Igualando à equação 9.34, temos a equação de estado da radiação:

$$p_R = \frac{1}{3}\rho_R. \quad (9.39)$$

Usando este fato, resolva a equação 9.36 e mostre que:

$$\rho_R \propto a^{-4}. \quad (9.40)$$

Portanto, a densidade de energia da radiação diminui mais rapidamente do que a da matéria. Dizemos que o universo atual é *dominado pela matéria*, pois a densidade da radiação é muito menor do que a da matéria ($\rho_M/\rho_R \sim 10^3$). Mas nem sempre foi assim, o universo primordial, muito menor, denso e quente era *dominado pela radiação*.

Exercício 60. Pode ter origem no vácuo. Lembra-se da nossa discussão sobre a constante cosmológica Λ no Capítulo 6? Podemos escrever Λ como uma densidade de energia do vácuo:

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G'} \quad (9.41)$$

com o seguinte tensor de energia-momento:

$$T_{\mu\nu} = -\rho_\Lambda g_{\mu\nu}. \quad (9.42)$$

Igualando o traço com a equação 9.34, temos a seguinte equação de estado:

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda. \quad (9.43)$$

A densidade do vácuo é constante em todo o lugar e tempo. Veremos que ela é responsável pela expansão acelerada do universo e a chamamos de energia escura. Em um futuro distante, quando a densidade de energia da matéria tender a zero, o universo será *dominado pelo vácuo*.

Agora, vamos encontrar as equações de Einstein para o nosso modelo cosmológico homogêneo e isotrópico. Vamos usar as equações de Einstein na forma:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right). \quad (9.44)$$

O leitor que desejar exercitar os cálculos de relatividade geral, sinta-se a vontade para computar as componentes não nulas da conexão e do tensor de Ricci para a métrica FLRW. O tensor de Ricci terá quatro componentes não nulos, dentre os quais apenas duas são independentes, uma componente temporal R_{00} e uma componente espacial R_{ij} . Por causa da isotropia, as componentes espaciais serão iguais. Portanto, as equações de Einstein se limitam a duas equações. A equação 00:

$$R_{00} = 8\pi G \left(T_{00} - \frac{1}{2} T g_{00} \right) \quad (9.45)$$

$$\Rightarrow -3\frac{\ddot{a}}{a} = 8\pi G \left(\rho + \frac{1}{2}(3p - \rho) \right) \quad (9.46)$$

$$\boxed{\Rightarrow 3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho + 3p)} \quad (9.47)$$

E a equação *ii*:

$$R_{ii} = 8\pi G \left(T_{ii} - \frac{1}{2} T g_{ii} \right) \quad (9.48)$$

$$\Rightarrow \frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2 \frac{k}{a^2} = 4\pi G (\rho - p) \quad (9.49)$$

Usando a equação 9.47, podemos substituir a segunda derivada temporal e encontrar:

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2}}. \quad (9.50)$$

Esta é chamada de *equação de Friedmann*. Se soubermos como a densidade de energia depende do fator de escala, $\rho = \rho(a)$, esta equação é suficiente. É claro, a solução deve satisfazer a equação 9.47, que é chamada de *segunda equação de Friedmann*.

Manipulando a equação de Friedmann e fatorando a densidade de energia em sua contribuição dada pela matéria e pelo vácuo, temos:

$$\dot{a}^2 = -k + \frac{8\pi G}{3} a^2 (\rho_m + \rho_\Lambda). \quad (9.51)$$

Vamos analisar cada um dos termos dessa equação a fim de tirar conclusões sobre o universo. Perceba que, pela equação 9.37, temos que $a^2 \rho_m \sim a^2 a^{-3} \sim a^{-1}$. Portanto, o termo $a^2 \rho_m$ diminui com a expansão do universo do mesmo modo que a^{-1} . Em contrapartida, a densidade de energia do vácuo ρ_Λ é sempre constante e o termo $a^2 \rho_\Lambda$ aumenta com a expansão do mesmo modo que a^2 . Portanto, se ρ_Λ existir, \dot{a} aumenta com o passar do tempo e a expansão do universo acelera.

Se o universo for hiperbólico ($k = -1$) e $\rho_m > 0$ e $\rho_\Lambda \geq 0$, o universo irá se expandir para sempre. Para um universo plano ($k = 0$), a expansão nunca para se $\rho_\Lambda > 0$; se $\rho_\Lambda = 0$, a expansão diminui de velocidade até parar no infinito. Agora, se o universo for esférico ($k = 1$) e $\rho_\Lambda = 0$, a expansão diminui até parar em um raio máximo e voltar a contrair e o universo colapsar em uma singularidade chamada Big Crunch; mas, se $\rho_\Lambda > 0$, o destino final do universo irá depender do balanço entre ρ_m e ρ_Λ (SCHUTZ, 2022).

Exercício 61. Assuma um universo dominado pela matéria, com a densidade de energia obedecendo a equação 9.37, e com a constante cosmológica nula. No início do universo, o termo com ρ_m na equação de Friedmann irá dominar de tal forma que o termo com k pode ser desprezado. Mostre que o fator de escala irá evoluir assim:

$$a \sim t^{2/3}. \quad (9.52)$$

Agora, faça os cálculos para um universo dominado pela radiação, cuja densidade de energia ρ_R obedece a equação 9.40, com constante cosmológica e k desprezíveis. Mostre

que o fator de escala evolui assim:

$$a \sim t^{1/2}. \quad (9.53)$$

Perceba que, em um tempo finito no passado, o fator de escala será nulo, a densidade de energia será infinita e a métrica de FLRW será singular. Chamamos este instante de Big Bang.

Exercício 62. Assuma um universo dominado pela matéria, com a densidade de energia da matéria dada por:

$$\rho_m = \frac{\rho_0}{a^3}. \quad (9.54)$$

Derive a equação 9.51 em relação ao tempo e encontre:

$$2\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3} \left(-\frac{\rho_0}{a^2} + 2a\rho_\Lambda \right). \quad (9.55)$$

Mostre que soluções estáticas (chamadas de *universos de Einstein*), são possíveis apenas quando:

$$\rho_\Lambda = \frac{1}{2}\rho_m. \quad (9.56)$$

Voltando para a equação 9.51, mostre que os universos de Einstein devem ser fechados ($k = 1$), com raio:

$$a = \sqrt{\frac{1}{4\pi G\rho_m}}. \quad (9.57)$$

Veja que podemos escrever a equação 9.51 na seguinte forma:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{4\pi G}{3}a^2\rho_m - \frac{4\pi G}{3}a^2\rho_\Lambda = -\frac{k}{2}. \quad (9.58)$$

Ignorando as constantes e sabendo que ρ_m obedece a equação 9.54, escrevemos:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{1}{a} - \frac{a^2}{2} = -\frac{k}{2}, \quad (9.59)$$

que é análoga a expressão newtoniana da conservação da energia mecânica:

$$E_k + U_G + U_\Lambda = -E, \quad (9.60)$$

sendo E_k a energia cinética $\dot{a}^2/2$, U_G a energia potencial gravitacional $-1/a$, U_Λ uma espécie de energia elástica $-a^2/2$ e $-E$ a energia total que, para o universo de Einstein com $k = 1$, é uma quantidade negativa. Uma solução estática acontece quando a primeira derivada da energia potencial é zero. Portanto:

$$\frac{dU}{da} = \frac{dU_G}{da} + \frac{dU_\Lambda}{da} = \frac{1}{a} - a = 0 \quad (9.61)$$

$$\Rightarrow a = 1. \quad (9.62)$$

Para saber se esta posição de equilíbrio é estável ou instável, fazemos a derivada segunda do potencial. Obtemos:

$$\frac{d^2U}{da^2}(a = 1) < 0. \quad (9.63)$$

Ou seja, a solução estática do universo de Einstein é instável; qualquer perturbação na densidade de matéria pode fazer com que o universo se expanda ou contraía.

9.4 O Nosso Universo

Tomamos a equação de Friedmann e a escrevemos em termos do parâmetro de Hubble H :

$$\frac{1}{2}H^2 = -\frac{k}{2a^2} + \frac{4\pi G}{3}(\rho_m + \rho_\Lambda). \quad (9.64)$$

Dividindo os dois lados da equação por $4/3\pi G$:

$$\frac{3H^2}{8\pi G} = -\frac{3k}{8\pi Ga^2} + \rho_m + \rho_\Lambda. \quad (9.65)$$

Definindo uma densidade de energia associada ao parâmetro de Hubble $\rho_H = 3H^2/8\pi G$ e uma densidade de energia associada à curvatura do universo $\rho_k = -3k/8\pi Ga^2$, temos a seguinte equação:

$$\rho_H = \rho_k + \rho_m + \rho_\Lambda. \quad (9.66)$$

Note que podemos descobrir a curvatura do universo fazendo um análise do balanço dessas diferentes formas de densidade de energia. Se $\rho_m + \rho_\Lambda < \rho_H$, então $\rho_k > 0$ e o universo é aberto ($k = -1$). Se $\rho_m + \rho_\Lambda > \rho_H$, então $\rho_k < 0$ e o universo é fechado ($k = 1$). Mas, se $\rho_m + \rho_\Lambda$ se cancelar exatamente com ρ_H , então o universo é plano ($k = 0$). Portanto, a densidade de energia ρ_H é um limite entre os diferentes modelos de universo. Chamamos de densidade crítica ρ_c :

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (9.67)$$

onde H_0 é o parâmetro de Hubble medido atualmente. Dividindo a equação 9.66, temos:

$$1 = \Omega_k + \Omega_m + \Omega_\Lambda, \quad (9.68)$$

sendo Ω_i a razão entre a densidade de energia ρ_i e a densidade crítica ρ_c . Através de diversas observações e estudos de aglomerados de galáxias, da radiação cósmica de fundo e supernovas, os astrônomos foram capazes de definir os seguintes valores para o nosso universo atual:

$$\Omega_m = 0,3 \quad (9.69)$$

$$\Omega_\Lambda = 0,7 \quad (9.70)$$

$$\Omega_k = 0. \quad (9.71)$$

Tudo indica que vivemos em um universo plano, dominado por uma constante cosmológica positiva (SCHUTZ, 2022). Na verdade, a densidade de energia da matéria Ω_m observada, chamada de matéria bariônica (feita de prótons, nêutrons e elétrons) é de apenas $\Omega_b = 0,04$. O restante da densidade de energia se deve à uma forma de matéria que não emite luz, mas cujos efeitos gravitacionais são perceptíveis, chamada de matéria escura. A observação da rotação das galáxias e a contabilização da matéria em aglomerados de galáxias sugere a existência da matéria escura com $\Omega_d = 0,26$.

Exercício 63. De volta à equação 9.66, dividimos pela densidade crítica ρ_c mas com o parâmetro de Hubble não sendo necessariamente o valor atual H_0 . Teremos:

$$H^2 = H_0^2(\Omega_k + \Omega_m + \Omega_\Lambda). \quad (9.72)$$

Ou, de forma equivalente:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2(\Omega_k + \Omega_m + \Omega_\Lambda). \quad (9.73)$$

Lembrando que a densidade de energia da matéria cai com a^{-3} :

$$\dot{a} = H_0 \sqrt{\Omega_m a^{-1} + \Omega_\Lambda a^2}, \quad (9.74)$$

onde colocamos $\Omega_k = 0$ para o universo plano. Mostre que, se a idade do universo é τ e o fator de escala no presente momento é $a(\tau) = 1$, então:

$$\tau = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{da}{\sqrt{\Omega_m a^{-1} + \Omega_\Lambda a^2}}. \quad (9.75)$$

Usando os valores de Ω_m e Ω_Λ do nosso universo e H_0 em unidades de tempo, calcule a idade do universo. Dica: use um software para realizar a integração numérica.

Há 13,7 bilhões de anos atrás tudo estava comprimido em um ponto infinitamente denso, a singularidade do Big Bang. A relatividade geral prevê a existência de uma singularidade no início do tempo, o que significa que a teoria não é adequada para descrever realisticamente este momento no tempo. Na verdade, esperamos que uma nova teoria da gravidade, que unifique a relatividade geral e a mecânica quântica, possa descrever os momentos iniciais do universo. Nas primeiras frações de segundo após o Big Bang, tudo leva a crer que haviam apenas duas forças da natureza: a gravidade e uma grande força que unifica o eletromagnetismo, a força fraca e forte em altas energias. Essa grande força seria descrita por uma teoria chamada GUT (Grand Unified Theory). Temos muitas teorias candidatas a GUT, mas nenhuma foi universalmente aceita devido a falta de dados experimentais.

Meros 10^{-35} s após o Big Bang, a grande força unificada se divide na força forte e a força eletrofraca. Nessa mesma época, segundo a hipótese da inflação, o universo era dominado por uma grande constante cosmológica, muito maior do que a que medimos hoje em dia, de modo que os termos da matéria e curvatura não eram importantes, e a equação 9.50 ficou assim:

$$\dot{a} \propto a, \quad (9.76)$$

que tem como solução uma lei exponencial do tipo $a \propto e^t$. Portanto, o universo se expandiu de forma exponencial, de forma que uma pequena região do espaço se tornou tão grande quanto o universo observável em uma fração de segundo. A hipótese da inflação cósmica foi criada para explicar a homogeneidade do universo que observamos hoje, pois, um universo muito menor e mais denso no passado teria pequenas inomogeneidades na densidade de energia que seriam ampliadas enquanto o universo se expande. Para que a homogeneidade do início do universo perdurasse, partes distantes do universo teriam que ter entrado em contato, o que é impossível. O rápido período de expansão exponencial da inflação explica como o universo foi homogeneizado. Apesar disso, a real fonte da inflação permanece uma questão ainda não resolvida.

Em 10^{-12} s, haviam quatro forças da natureza: gravidade, eletromagnetismo, força forte e fraca. Não haviam prótons ou nêutrons, apenas um plasma de quarks e glúons que são os blocos fundamentais de construção dos bárions. Quarks nunca são observados livres, estão sempre confinados dentro dos bárions. Entretanto, nas temperaturas e densidades do universo nessa época, os prótons estavam sobrepostos de tal forma que os quarks agiam como se estivessem livres. Em 10^{-5} s, o universo esfriou o bastante para o início da produção de prótons e nêutrons. Em 10^{-4} s, começou a formação de elétrons e pósitrons.

Elétrons e pósitrons, assim como prótons e antiprótons foram produzidos e se aniquilaram mutuamente, como acontece quando a matéria e antimatéria entram em contato. Por algum motivo, a matéria foi produzida em uma quantidade um pouco maior do que a antimatéria, que chamamos de assimetria matéria-antimatéria. Porque o universo preferiu a matéria à antimatéria ainda permanece um mistério a ser resolvido. Em 200 s após o Big Bang, a temperatura caiu ao ponto que a força nuclear começou a agir e foi o início da nucleossíntese. Prótons e nêutrons se combinaram para formar núcleos de hélio, lítio, berílio e traços de outros elementos leves. Todo o hélio e lítio do universo que nós vemos no universo foram formados nessa época, pois os processos nucleares dentro das estrelas tendem a destruir elementos leves. A abundância desses elementos que observamos hoje no universo concorda com a Teoria do Big Bang.

Até mais ou menos 380 mil anos após o Big Bang, a matéria e a radiação intera-

giam com frequência e o espaço opaco era preenchido por plasma. Quando o universo expandiu o suficiente, a temperatura e energia dos elétrons diminuiu, permitindo que eles fossem capturados pelos núcleos, formando átomos neutros. Essa foi a época da recombinação e o momento da criação da radiação cósmica de fundo em micro-ondas, quando os átomos foram formados e os fótons passaram a interagir pouco com a matéria, sendo livres para se propagar pelo espaço. Radiação e matéria se separaram para sempre e o universo deixou de ser dominado pela radiação e passou a ser dominado pela matéria.

Em 500 milhões de anos após o Big Bang, flutuações na densidade nas nuvens de gás causaram o colapso gravitacional e o nascimento das primeiras estrelas e galáxias. As estrelas dessa primeira geração eram constituídas basicamente de hidrogênio e hélio, tinham grande massa e eram muito mais brilhantes do que o Sol e, por isso, queimavam seu combustível nuclear em poucos milhões de anos, explodindo em supernova e enriquecendo o espaço de elementos mais pesados. Esses elementos foram incorporados às novas estrelas que adquiriram maior estabilidade na fusão nuclear e, portanto, maior tempo de vida. Além disso, tais elementos permitiram a formação de planetas e o surgimento da vida.

10 Teoria Quântica de Campos em um Espaço-Tempo Curvo

A nossa abordagem será a aproximação da gravitação semi-clássica, onde os campos serão quânticos, mas a métrica do espaço-tempo continua clássica conforme descrita pela relatividade geral. Nesta aproximação, assumimos que a curvatura do espaço-tempo não é afetada pelos campos quânticos, ou seja, o espaço-tempo será visto como um plano de fundo onde os campos quânticos podem se propagar.

10.1 Princípios da Mecânica Quântica

A mecânica quântica, junto com a relatividade geral, são as duas teorias com maior êxito da física moderna. Entretanto, a mecânica quântica possui uma fama de estranha, pois é diferente de todas as teorias clássicas, propondo uma ruptura em conceitos fundamentais como estados, medições, partículas e ondas, que eram tidos como certos na mecânica clássica.

Na mecânica clássica, o estado de uma partícula é descrito por sua posição $x(t)$ e sua velocidade $\dot{x}(t)$ ou momento linear $p(t)$ em um certo instante de tempo. A evolução do estado do sistema, ou seja, a mudança da posição e do momento com o passar do tempo, é descrita pela solução das equações de movimento. A mecânica clássica possui várias formulações, que fornecem equações de movimento equivalentes.

Para a formulação newtoniana, a equação que mostra a evolução do sistema é a *segunda lei de Newton*:

$$m\ddot{x} = -\nabla V, \quad (10.1)$$

ou, de forma equivalente,

$$\dot{p} = -\nabla V, \quad (10.2)$$

onde m é a massa da partícula e V é a função potencial relacionada com a interação que está afetando o sistema. O momento linear é tão somente $p = m\dot{x}$.

Para a formulação lagrangiana, a equação de movimento é resultado da *equação de Euler-Lagrange*:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad (10.3)$$

onde $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V$ é a Lagrangiana do sistema, a diferença entre a energia cinética e a energia potencial. Podemos encontrar o momento linear calculando:

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}. \quad (10.4)$$

E, para a formulação hamiltoniana, a evolução do sistema é solução das *equações de Hamilton*:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (10.5)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (10.6)$$

onde $H = p\dot{x} - L$ é a Hamiltoniana do sistema, que é a transformada de Legendre da Lagrangiana, que substitui \dot{x} por p . Fazendo esta transformação, pode-se encontrar que $H = \frac{p^2}{2m} + V$, a soma da energia cinética com a energia potencial.

Imagine um sistema clássico de uma partícula presa em uma mola. O potencial de um oscilador harmônico simples, dada pela lei de Hooke, é $V = \frac{1}{2}kx^2$, onde k é a constante elástica da mola. A Lagrangiana para este sistema será:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2x^2. \quad (10.7)$$

E a Hamiltoniana:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2}, \quad (10.8)$$

onde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. A equação do movimento pode ser facilmente encontrada aplicando qualquer uma das formulações, que é:

$$\ddot{x} + \omega^2x = 0. \quad (10.9)$$

Verifique que a solução para esta equação, que descreve a completa evolução do sistema em qualquer tempo t , é uma exponencial complexa do tipo:

$$x(t) = x(0)e^{i\omega t}. \quad (10.10)$$

Agora, para a mecânica quântica, as coisas mudam de figura (CARROLL, 2019). O estado de uma partícula é descrito por um vetor de estado $|\psi\rangle$ em um espaço vetorial complexo chamado *espaço de Hilbert*, munido de um produto interno com a propriedade:

$$\langle\psi_2|\psi_1\rangle^* = \langle\psi_1|\psi_2\rangle. \quad (10.11)$$

Já os observáveis, como posição x e momento p , são convertidos em operadores auto-adjuntos no espaço de Hilbert, que devem ser aplicados nos vetores de estado. Por serem auto-adjuntos (hermitianos), possuem a propriedade de serem iguais ao seu transporte conjugado:

$$\hat{A}^\dagger = \hat{A}. \quad (10.12)$$

Operadores auto-adjuntos possuem autovalores reais, que são os possíveis resultados de uma medição. Na mecânica quântica, não podemos determinar o resultado da medição dos observáveis com certeza total. O máximo que podemos fazer é calcular as

probabilidades de uma certa medição. Por exemplo, a probabilidade do sistema $|\psi\rangle$ ser encontrado no estado $|a\rangle$ é:

$$P(a) = |\langle a|\psi\rangle|^2. \quad (10.13)$$

E o valor esperado de um observável \hat{A} :

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi|\hat{A}|\psi\rangle. \quad (10.14)$$

Em geral, os operadores não comutam entre si. Por exemplo, os operadores de posição e momento possuem uma relação de comutação chamada de relação canônica:

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = \hat{x}_i\hat{p}_j - \hat{p}_j\hat{x}_i = i\hbar\delta_{ij}. \quad (10.15)$$

Isto equivale dizer que posição e momento não podem ser medidos simultaneamente com máxima precisão. Daí surge o princípio da incerteza de Heisenberg, $\Delta x\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$.

A evolução do sistema pode ser descrita por duas formas equivalentes. Uma das formas é a representação de Schrodinger, em que o vetor de estado sofre uma evolução unitária causada pelo operador de evolução temporal. Ou seja, os vetores de estado variam com o passar do tempo, enquanto os operadores são mantidos fixos. A equação do movimento é a *equação de Schrodinger*:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle, \quad (10.16)$$

onde \hat{H} é o operador Hamiltoniano do sistema. Já a segunda forma, a representação de Heisenberg, os operadores dos observáveis variam no tempo, enquanto os vetores de estado são mantidos fixos. A *equação de movimento de Heisenberg* para um operador \hat{A} é escrita como segue:

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{H}]. \quad (10.17)$$

Agora, usando deste arcabouço, podemos quantizar o oscilador harmônico que foi resolvido classicamente (SAKURAI; COMMINS, 1995). Para isso, escrevemos a Hamiltoniana do sistema, que será a mesma da Equação 10.8, onde os observáveis se tornaram operadores:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}. \quad (10.18)$$

Podemos resolver a equação de Schrodinger com esta Hamiltoniana, determinando os autovalores e autovetores de energia. Entretanto, existe um método mais natural de resolver o problema, introduzindo o operador de destruição:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right), \quad (10.19)$$

e o operador de criação:

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega} \right). \quad (10.20)$$

Exercício 64. Usando as relações de comutação canônicas (Equação 10.15), mostre que:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (10.21)$$

Definimos o operador número \hat{N} assim:

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (10.22)$$

com autovalores n e autovetores $|n\rangle$, de forma que:

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle. \quad (10.23)$$

Usando o operador número, podemos escrever a Hamiltoniana de uma forma mais simples, onde \hat{H} é função linear de \hat{N} :

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{N} - \frac{1}{2} \right). \quad (10.24)$$

Exercício 65. Usando a definição do operador número e dos operadores de criação e destruição, mostre que a Equação 10.24 é equivalente a Equação 10.18.

Portanto, os autovalores de energia, ou seja, os valores permitidos de energia para o sistema, são:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega. \quad (10.25)$$

Exercício 66. Usando a relação de comutação entre os operadores de destruição e criação (Eq. 10.21), mostre que

$$[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \quad (10.26)$$

e

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger. \quad (10.27)$$

Exercício 67. Usando as relações de comutação acima, mostre que

$$\hat{N}\hat{a}^\dagger|n\rangle = (n+1)\hat{a}^\dagger|n\rangle \quad (10.28)$$

e

$$\hat{N}\hat{a}|n\rangle = (n-1)\hat{a}|n\rangle. \quad (10.29)$$

Note pelas Equações 10.28 e 10.29 que o operador de criação \hat{a}^\dagger age em $|n\rangle$ gerando um autovetor com autovalor $(n + 1)$, enquanto o operador de destruição \hat{a} age em $|n\rangle$ gerando um autovetor com autovalor $(n - 1)$, explicando seus nomes. O \hat{a}^\dagger cria um quantum de energia, enquanto \hat{a} destrói um quantum.

Portanto, os vetores $\hat{a}|n\rangle$ e $|n - 1\rangle$ são os mesmos, a menos de uma constante de proporcionalidade:

$$\hat{a}|n\rangle = c|n - 1\rangle. \quad (10.30)$$

Podemos encontrar c fazendo uso da condição de normalização:

$$\langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = |c|^2. \quad (10.31)$$

Perceba que $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ é apenas o operador \hat{N} , logo

$$c = \sqrt{n}. \quad (10.32)$$

A energia do estado fundamental $|0\rangle$, também chamado vácuo, satisfaz:

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad (10.33)$$

Partindo do vácuo, podemos chegar no primeiro estado excitado aplicando o operador de criação:

$$|1\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{1}}|0\rangle. \quad (10.34)$$

Podemos contruir o segundo estado excitado a partir do vácuo aplicando o operador de criação duas vezes:

$$|2\rangle = \frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}|1\rangle = \left[\frac{(\hat{a}^\dagger)^2}{\sqrt{2}} \right] |0\rangle. \quad (10.35)$$

Portanto, podemos construir todos os estados excitados aplicando o operador de criação sucessivas vezes, seguindo a fórmula:

$$|n\rangle = \left[\frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \right] |0\rangle. \quad (10.36)$$

O estado genérico de um sistema é uma superposição de todos os autoestados da Hamiltoniana evoluídos no tempo, ou seja:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{-iE_n t} |n\rangle, \quad (10.37)$$

onde c_n são coeficientes da expansão que devem estar normalizados para uma interpretação probabilística correta.

10.2 Teoria Quântica de Campos no Espaço-Tempo Plano

Ao contrário de uma partícula, que se encontra localizada em um ponto do espaço em um determinado instante no tempo, um campo está espalhado por todo o espaço, associando um valor ou um conjunto de valores para cada ponto do espaço-tempo. O campo gravitacional newtoniano, os campos elétrico e magnético e a métrica do espaço-tempo da relatividade geral são exemplos de campos clássicos. O campo gravitacional newtoniano é um escalar, pois associa apenas um número a cada ponto do espaço, ou seja, $\phi(t, \mathbf{x})$. Os campos elétricos e magnéticos são vetores, pois associam um vetor para cada ponto do espaço, $\vec{E}(t, \mathbf{x})$ e $\vec{B}(t, \mathbf{x})$. Já a métrica do espaço-tempo é um tensor, pois associa um tensor a cada ponto do espaço-tempo, $g_{\mu\nu}(x^\rho)$.

A teoria de campos, que descreve a dinâmica e evolução dos campos, é escrita na linguagem do formalismo Lagrangiano, onde trocamos a posição $x(t)$ pelo conjunto de campos $\phi^i(x^\mu)$ e a derivada temporal \dot{x} pelo conjunto de derivadas em todas as coordenadas do espaço-tempo $\partial_\mu\phi^i$. Primeiramente, lidaremos com o espaço-tempo da relatividade especial, portanto, os campos se propagarão no espaço-tempo plano da métrica de Minkowski:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (10.38)$$

A versão invariante da Lagrangiana é a densidade de Lagrangiana \mathcal{L} . A equação de movimento para o campo é a equação de Euler-Lagrange análoga à Equação 10.3:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^i)} \right) = 0. \quad (10.39)$$

Focaremos no caso mais simples, em que o campo é um escalar ϕ . Para este caso, a densidade de Lagrangiana é a seguinte (CARROLL, 2019):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (10.40)$$

Podemos ver paralelos entre esta e a Lagrangiana para uma partícula presa em uma mola (Equação 10.7). A posição x tornou-se o campo escalar $\phi(t, \vec{x})$. O primeiro termo, com as derivadas espaço-temporais, é a versão invariante do termo de energia cinética. O último termo é equivalente ao potencial da lei de Hooke.

Exercício 68. Aplicando à equação de Euler-Lagrange (Eq. 10.39) para a densidade de Lagrangiana do campo escalar, encontre a equação de movimento:

$$\square\phi - m^2\phi = 0, \quad (10.41)$$

onde $\square = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ é o operador d'Alembertiano, ou seja, a generalização do Laplaciano para o espaço-tempo de Minkowski. Esta é a equação de Klein-Gordon.

A equação de Klein-Gordon se parece muito com a equação de onda, com a adição de um termo com o parâmetro m . Ao quantizarmos o campo, veremos que ele é composto por uma coleção de partículas com massa m .

Do mesmo modo em que passamos da concepção de partícula para campo substituindo a posição x por ϕ e derivadas temporais \dot{x} por derivadas em todas as coordenadas do espaço-tempo $\partial_\mu\phi$, podemos encontrar uma quantidade análoga ao momento p chamada momento conjugado π :

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}. \quad (10.42)$$

A equação de Klein-Gordon é uma equação diferencial parcial, linear, de segunda ordem. Por ser linear, podemos encontrar novas soluções fazendo combinações lineares de soluções linearmente independentes. A onda plana é uma solução genérica:

$$\phi = \phi_0 e^{ik_\mu x^\mu}, \quad (10.43)$$

onde $k^\mu = (\omega, \vec{k})$ é o número de onda e $\omega^2 = \vec{k}^2 + m^2$ é a relação de dispersão, em que $\omega > 0$ é a frequência.

A massa m é uma constante, mas \vec{k} pode assumir uma infinidade de valores. Então, o conjunto de soluções $\{\phi, \phi^*\}$ (Eq. 10.43) formam uma base para o espaço vetorial das soluções da equação de Klein-Gordon. Tais soluções são ortogonais com respeito ao produto interno que é a integral sobre a hipersuperfície Σ_t de tempo constante:

$$(\phi_1, \phi_2) = -i \int_{\Sigma_t} (\phi_1 \partial_t \phi_2^* - \phi_2^* \partial_t \phi_1) d^3x. \quad (10.44)$$

A constante ϕ_0 deve ser tal que as soluções estejam normalizadas:

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}. \quad (10.45)$$

Uma solução geral, que é a combinação linear de todas as ondas planas possíveis, pode ser encontrada fazendo a expansão de Fourier ([AITCHISON; HEY, 1984](#)):

$$\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} [a(k) e^{ik_\mu x^\mu} + a^*(k) e^{-ik_\mu x^\mu}], \quad (10.46)$$

onde $a(k)$ e $a^*(k)$ são os coeficientes da expansão.

Para quantizarmos o campo, aplicaremos as mesmas regras de quantização canônica que usamos no oscilador harmônico simples, transformando observáveis em operadores e aplicando relações de comutação. Logo, o campo ϕ e o seu momento

conjugado π serão convertidos nos operadores $\hat{\phi}$ e $\hat{\pi}$, obedecendo as relações de comutação análogas à Equação 10.15:

$$[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\phi}(t, \vec{x}')] = 0 \quad (10.47)$$

$$[\hat{\pi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] = 0 \quad (10.48)$$

$$[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (10.49)$$

onde o delta de Kronecker foi convertido no delta de Dirac na generalização para o contínuo. Ao quantizarmos o operador de campo (Equação 10.46) promovemos os coeficientes da expansão à operadores da seguinte forma:

$$\hat{\phi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega}} [\hat{a}(k)e^{ik_\mu x^\mu} + \hat{a}^\dagger(k)e^{-ik_\mu x^\mu}]. \quad (10.50)$$

Exercício 69. Colocando a expansão acima nas relações de comutação entre os operadores de campo e momento conjugado (Equações 10.47, 10.48 e 10.49), mostre que os operadores $\hat{a}(k)$ e $\hat{a}^\dagger(k)$ devem obedecer:

$$[\hat{a}(k), \hat{a}(k')] = 0 \quad (10.51)$$

$$[\hat{a}^\dagger(k), \hat{a}^\dagger(k')] = 0 \quad (10.52)$$

$$[\hat{a}(k), \hat{a}^\dagger(k')] = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (10.53)$$

Lembre-se como podemos obter o momento conjugado (Equação 10.42).

Se compararmos essas relações de comutação com as relações para os operadores de criação e destruição do oscilador harmônico (Equação 10.21) podemos ver a similaridade. É claro que temos uma grande diferença, já que para cada número de onda k existe um par de operadores $\hat{a}(k)$ e $\hat{a}^\dagger(k)$. Mas, são essencialmente operadores de criação e destruição para os estados do campo para o número de onda k . Podemos definir o estado fundamental do campo como sendo aquele que:

$$\hat{a}(k)|0\rangle = 0, \quad (10.54)$$

para todo k . Podemos construir estados excitados aplicando o operador de criação no estado de vácuo $|0\rangle$. As excitações no campo são chamadas de partículas. Por exemplo, se aplicarmos os operadores $\hat{a}^\dagger(k_1)$ e $\hat{a}^\dagger(k_2)$ no vácuo, teremos um estado de duas partículas com momentos k_1 e k_2 :

$$|0, \dots, 1, \dots, 1, \dots, 0\rangle = \hat{a}^\dagger(k_1)\hat{a}^\dagger(k_2)|0\rangle. \quad (10.55)$$

Um estado arbitrário, com n_i partículas com momento k_i , pode ser construído assim:

$$|n_1, n_2, \dots, n_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!\dots n_j!}} \left(\hat{a}^\dagger(k_1)\right)^{n_1} \left(\hat{a}^\dagger(k_2)\right)^{n_2} \dots \left(\hat{a}^\dagger(k_j)\right)^{n_j} |0\rangle. \quad (10.56)$$

Também podemos definir o operador número $\hat{n}(k)$ para cada número de onda:

$$\hat{n}(k) = \hat{a}^\dagger(k)\hat{a}(k), \quad (10.57)$$

em que, aplicado na base de vetores $|n\rangle$ que construímos a partir do vácuo $|0\rangle$, chamado *espaço de Fock*, deve obedecer:

$$\hat{n}(k_i)|n_1, n_2, \dots\rangle = n_i|n_1, n_2, \dots\rangle. \quad (10.58)$$

10.3 Teoria Quântica de Campos no Espaço-Tempo Curvo

Como vimos no Capítulo 6, para fazer a transição do espaço-tempo plano para o espaço-tempo curvo, devemos generalizar as leis físicas em uma forma covariante, ou seja, independente do sistema de coordenadas. Primeiro, devemos substituir a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ pela métrica da relatividade geral $g_{\mu\nu}$. Depois, trocamos derivadas parciais ∂_μ por derivadas covariantes ∇_μ . Fazendo isso, temos que a densidade de Lagrangiana para o campo escalar no espaço-tempo curvo é (ZEE, 2013):

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right), \quad (10.59)$$

onde temos que incluir o fator de elemento de volume $\sqrt{-g}$, que para o espaço de Minkowski é igual a unidade.

Podemos seguir como fizemos antes, quantizando canonicamente o campo e o momento conjugado:

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\nabla_0\phi)}, \quad (10.60)$$

onde devemos impor relações de comutação parecidas com as que vimos anteriormente:

$$[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\phi}(t, \vec{x}')] = 0 \quad (10.61)$$

$$[\hat{\pi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] = 0 \quad (10.62)$$

$$[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] = \frac{i}{\sqrt{-g}}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (10.63)$$

A equação de movimento para a densidade de Lagrangiana do campo escalar no espaço-tempo curvo será exatamente a equação de Klein-Gordon:

$$\square\phi - m^2\phi = 0, \quad (10.64)$$

com o detalhe que agora o operador d'Alembertiano é a sua versão covariante, $\square = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$.

Podemos seguir o procedimento do espaço-tempo plano, encontrando soluções linearmente independentes para a equação de Klein-Gordon, fazendo uma expansão

de Fourier com todas essas soluções (dividindo-as em ϕ e ϕ^*) e interpretando os coeficientes da expansão como operadores de criação e destruição. Entretanto, aqui surge uma diferença fundamental entre o espaço-tempo plano e curvo. Para o espaço-tempo plano, dividimos as soluções em ϕ e ϕ^* , frequência positiva e negativa respectivamente com respeito à coordenada temporal, de modo que:

$$\partial_t \phi = -i\omega \phi \text{ (frequência positiva)} \quad (10.65)$$

e

$$\partial_t \phi^* = i\omega \phi^* \text{ (frequência negativa)}. \quad (10.66)$$

Em geral, para o espaço-tempo curvo, não há uma coordenada temporal global, ou seja, não existe um vetor de Killing tipo-tempo na qual podemos separar os componentes das soluções em fatores dependentes do tempo e do espaço, de modo a dividir as soluções em frequência positiva e negativa. Ainda podemos encontrar um conjunto completo de soluções, mas esse conjunto *não* será geral, pois outra pessoa pode encontrar um conjunto de soluções completamente diferente e igualmente válida. De fato, é nesta diferença que reside o fato mais interessante da teoria quântica de campos no espaço-curvo. Como o estado de vácuo depende do conjunto de soluções que um observador está usando, dois observadores diferentes, utilizando conjuntos diferentes, observarão estados de vácuo diferentes. Dizemos que o vácuo é um conceito que depende do observador.

Um observador, que pode ser um detector de partículas, utiliza o conjunto de soluções que são divididos em frequências positivas e negativas com respeito ao tempo próprio τ da sua trajetória pelo espaço-tempo. Este conjunto de soluções, denotado por (f_i, f_i^*) , deve obedecer:

$$\frac{D}{d\tau} f_i = U^\mu \nabla_\mu f_i = -i\omega f_i \text{ (frequência positiva)} \quad (10.67)$$

e

$$\frac{D}{d\tau} f_i^* = U^\mu \nabla_\mu f_i^* = i\omega f_i^* \text{ (frequência negativa)}. \quad (10.68)$$

Entretanto, este conjunto de soluções não servirá para outro detector viajando em outra trajetória do espaço-tempo com um tempo próprio diferente. Neste caso, os detectores não concordarão com o estado de vácuo observado. Onde um verá um vácuo ausente de partículas, o outro detectará um mar de partículas. Mas, para o caso dos espaços-tempos estáticos, onde existe um vetor de Killing tipo-tempo K^μ , podemos encontrar um sistema de coordenadas onde a equação de Klein-Gordon pode ser separada em termos espaciais e temporais. Neste caso, é possível separar soluções em frequências positivas e negativas, de modo que obedeça:

$$K^\mu \partial_\mu f_i = -i\omega f_i \text{ (frequência positiva)} \quad (10.69)$$

e

$$K^\mu \partial_\mu f_i^* = i\omega f_i^* \text{ (frequência negativa)}. \quad (10.70)$$

Detectores que viajam em trajetórias seguindo o campo de Killing, com sua quadri-velocidade U^μ proporcional a K^μ , terão tempo próprio τ proporcional ao tempo t , e as soluções de frequência positiva e negativas com respeito ao vetor de Killing servirão de base natural para as soluções da equação de Klein-Gordon. Obviamente, detectores viajando em outras trajetórias terão conjuntos diferentes.

Como vimos, o conceito de campo, partícula e vácuo depende fortemente do observador. Observadores que não compartilham do mesmo estado de movimento pelo espaço-tempo, tomarão um conjunto diferente de soluções para a equação de Klein-Gordon e poderão discordar do que observam. Enquanto um observador vê apenas um espaço vazio, outro poderá dizer que o espaço está repleto de um gás quente de partículas. Nas próximas seções, veremos as consequências deste resultado que dão origem ao efeito Unruh e a radiação Hawking.

10.4 Efeito Unruh

Voltamos para o espaço-tempo plano de Minkowski. Queremos descrever o movimento de um observador acelerado por este espaço-tempo, mas nos concentrando em seu movimento em apenas duas dimensões (t, x) , suprimindo as outras duas coordenadas espaciais, pois a trajetória deste observador é uma linha reta no eixo x . A métrica fica

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2. \quad (10.71)$$

Em coordenadas de cones de luz, ou coordenadas nulas, com esta transformação:

$$\bar{u} = x + t \quad (10.72)$$

$$\bar{v} = x - t, \quad (10.73)$$

a métrica é simplesmente,

$$ds^2 = d\bar{u}d\bar{v}. \quad (10.74)$$

Um observador se movendo em aceleração uniforme com magnitude α , com tempo próprio τ , descreverá uma hipérbole no diagrama do espaço-tempo com as equações paramétricas:

$$t(\tau) = \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha\tau) \quad (10.75)$$

$$x(\tau) = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha\tau). \quad (10.76)$$

Exercício 70. Verifique que as Equações 10.75 e 10.76 representam um observador uniformemente acelerado com quadriaceleração

$$a^\mu = \frac{D^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \quad (10.77)$$

e magnitude $\sqrt{a_\mu a^\mu} = \alpha$.

Queremos encontrar novas coordenadas que o observador acelerado pode usar como seu próprio referencial de repouso. Tais coordenadas (η, ξ) existem e são chamadas *coordenadas de Rindler*, com a lei de transformação:

$$t = \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh(a\eta) \quad (10.78)$$

$$x = \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh(a\eta), \quad (10.79)$$

para $a > 0$, $-\infty < \eta$ e $\xi > 0$, cobrindo a região $x > |t|$. O movimento de observadores descrito por estas equações quando $\eta = \text{constante}$ é uma linha reta no diagrama do espaço-tempo, pois $x \propto t$. Quando $\xi = \text{constante}$, o observador traça uma hipérbole pelo espaço-tempo que se aproxima assintoticamente dos raios de luz $\bar{u} = \bar{v} = 0$ quando $\eta \rightarrow \pm\infty$, ou seja, se aproximam da velocidade da luz sem nunca alcançá-la. Tais observadores acelerados são chamados *observadores de Rindler*.

Exercício 71. Mostre que, nas coordenadas de Rindler, a métrica 10.71 fica assim:

$$ds^2 = e^{2a\xi} (-d\eta^2 + d\xi^2). \quad (10.80)$$

Tal métrica pode ser encarada como um espaço-tempo curvo da relatividade geral já que, visto pela ótica do princípio da equivalência, em experimentos locais, não há diferença entre aceleração uniforme e campo gravitacional.

Coordenadas para a região $x < |t|$ podem ser facilmente obtidas mudando os sinais à direita da igualdade:

$$t = -\frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh(a\eta) \quad (10.81)$$

$$x = -\frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh(a\eta). \quad (10.82)$$

Portanto, temos dois conjuntos de coordenadas que descrevem duas regiões do espaço-tempo, R e L. Como os observadores de Rindler se aproximam dos raios de luz $\bar{u} = \bar{v} = 0$ mas não os cruzam, já que para cruzar deveriam estar mais rápidos do que a luz, os raios de luz se comportam como horizontes de eventos. Por isso, nenhum

evento que acontece na Região L pode afetar casualmente a Região R, e o contrário também é verdade. As características das coordenadas de Rindler podem ser vistas na Figura 23.

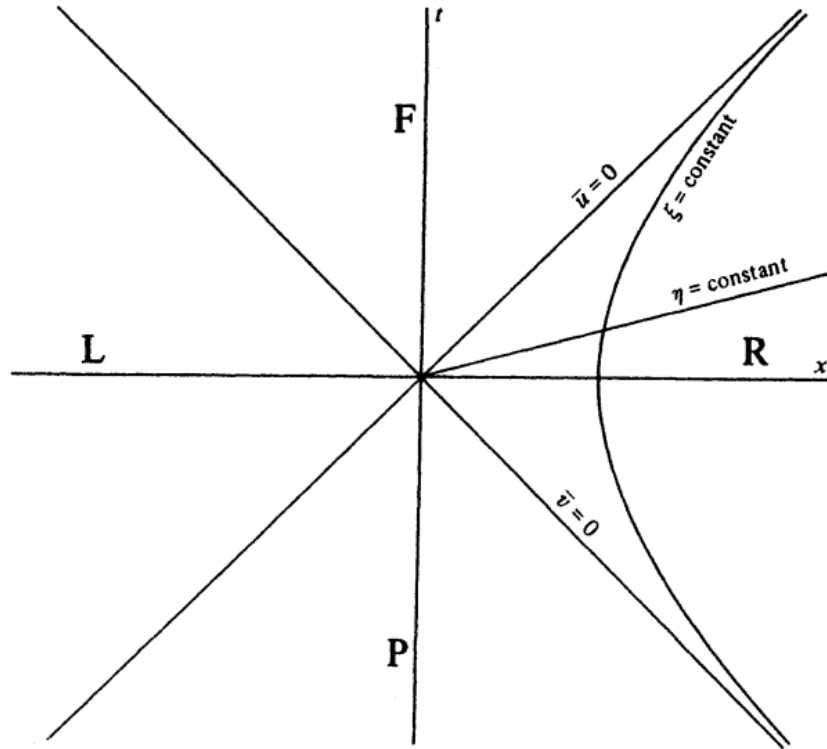


Figura 23 – Espaço-tempo de Minkowski nas coordenadas de Rindler. (BIRRELL; BIRRELL; DAVIES, 1984)

Nosso objetivo é encontrar soluções para a equação de Klein-Gordon nas coordenadas de Minkowski e Rindler, escrever o operador número de Rindler em função dos operadores de criação e destruição de Minkowski e calcular o número de partículas esperado para o vácuo de Minkowski conforme visto por um observador de Rindler.

Primeiro, vamos escrever as soluções para a equação de Klein-Gordon nas coordenadas de Minkowski. A equação fica:

$$\square\phi = \left(\partial_t^2 - \partial_x^2\right)\phi = 0, \quad (10.83)$$

que, como vimos, possui soluções ortogonais (f_k, f_k^*) , onde:

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{ikx - i\omega t}, \quad (10.84)$$

nos atentamos ao fato de termos apenas uma dimensão espacial, $\omega = |k| > 0$.

Para a métrica de Rindler, o d'Alembertiano não é trivial, e a equação de Klein-Gordon fica:

$$\square\phi = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi = g^{00}\partial_0\partial_0\phi + g^{11}\partial_1\partial_1\phi = e^{2a\xi}(-\partial_\eta^2 + \partial_\xi^2)\phi = 0. \quad (10.85)$$

Observe que os componentes da métrica de Rindler são independentes de η , logo o vetor ∂_η é um vetor de Killing, já que η se comporta de forma semelhante ao tempo t . Portanto, ∂_η pode ser usado para dividirmos as soluções da equação de Klein-Gordon em frequências positivas e negativas. Analisando a equação de Klein-Gordon em coordenadas de Rindler, vemos que aceita soluções parecidas com a equação em Minkowski:

$$g_k = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{ik\tilde{\zeta} \pm i\omega\eta}, \quad (10.86)$$

onde $\omega = |k| > 0$, o sinal positivo serve para a Região L e o sinal negativo para a Região R, que são frequência positiva em relação ao vetor de Killing ∂_η em R e $-\partial_\eta$ em L. Podemos definir um conjunto completo de soluções para as coordenadas de Rindler:

$$g_k^R = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{ik\tilde{\zeta} - i\omega\eta}, \text{ em R} \quad (10.87)$$

$$= 0, \text{ em L} \quad (10.88)$$

$$g_k^L = 0, \text{ em R} \quad (10.89)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{ik\tilde{\zeta} + i\omega\eta}, \text{ em L.} \quad (10.90)$$

Tanto o conjunto das soluções em Minkowski quanto em Rindler podem ser usados para expandirmos o campo ϕ :

$$\hat{\phi} = \sum_k \left(\hat{a}_k f_k + \hat{a}_k^\dagger f_k^* \right), \text{ em coordenadas de Minkowski} \quad (10.91)$$

e

$$\hat{\phi} = \sum_k \left(\hat{b}_k^{(1)} g_k^L + \hat{b}_k^{(1)\dagger} g_k^{L*} + \hat{b}_k^{(2)} g_k^R + \hat{b}_k^{(2)\dagger} g_k^{R*} \right), \text{ em coordenadas de Rindler.} \quad (10.92)$$

Estas duas bases formam o espaço de Fock e dois estados de vácuo $|0_M\rangle$ e $|0_R\rangle$ definidos por meio dos seus operadores de destruição:

$$\hat{a}_k |0_M\rangle = 0 \quad (10.93)$$

$$\hat{b}_k^{(1)} |0_R\rangle = \hat{b}_k^{(2)} |0_R\rangle = 0. \quad (10.94)$$

Entretanto, os dois estados de vácuo não são equivalentes, já que as soluções para as coordenadas de Rindler não são analíticas em $\bar{u} = \bar{v} = 0$ e a mudança de g_k^R para g_k^L não é suave. Isto sugere que os observadores, um utilizando o conjunto de Minkowski e o outro utilizando o conjunto de Rindler, não concordarão com o estado de vácuo observado. O número de partículas esperado visto pelo observador de Rindler no vácuo de Minkowski será

$$\langle 0_M | \hat{b}_k^{(1,2)\dagger} \hat{b}_k^{(1,2)} | 0_M \rangle, \quad (10.95)$$

onde $\hat{b}_k^{(1)}$ é o operador número para a Região L e $\hat{b}_k^{(2)}$ para a Região R. Para realizar este cálculo, devemos escrever o operador número de Rindler em função dos operadores de criação e destruição de Minkowski. O método tradicional de resolver este problema é encontrar a *transformação de Bogolubov* entre os dois conjuntos. Um método mais fácil e elegante, devido a Unruh (1976) (BIRRELL; BIRRELL; DAVIES, 1984), é notar que, apesar de g_k^L e g_k^R não serem analíticos, as duas combinações

$$g_k^L + e^{-\frac{\pi\omega}{a}} g_{-k}^{L*} \quad (10.96)$$

$$g_{-k}^{R*} + e^{\frac{\pi\omega}{a}} g_k^L \quad (10.97)$$

são analíticas para todo \bar{u} e \bar{v} real. Como estas compartilham a propriedade das frequências positivas das soluções em Minkowski f_k , elas devem compartilhar o mesmo estado de vácuo $|0_M\rangle$. Então, podemos expandir o campo em termos destas funções

$$\hat{\phi} = \sum_k \left[2 \sinh \left(\frac{\pi\omega}{a} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \left[\hat{d}_k^{(1)} \left(e^{\frac{\pi\omega}{2a}} g_k^R + e^{-\frac{\pi\omega}{2a}} g_{-k}^L \right) + \hat{d}_k^{(2)} \left(e^{-\frac{\pi\omega}{2a}} g_{-k}^{R*} + e^{-\frac{\pi\omega}{2a}} g_k^L \right) \right], \quad (10.98)$$

onde

$$\hat{d}_k^{(1)} |0_M\rangle = \hat{d}_k^{(2)} |0_M\rangle = 0. \quad (10.99)$$

Realizando os produtos internos (ϕ, g_k^R) e (ϕ, g_k^L) , podemos escrever os operadores $\hat{b}_k^{(1,2)}$ em função dos operadores $\hat{d}_k^{(1,2)}$:

$$\hat{b}_k^{(1)} = \left[2 \sinh \left(\frac{\pi\omega}{a} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \left[e^{\frac{\pi\omega}{2a}} \hat{d}_k^{(2)} + e^{-\frac{\pi\omega}{2a}} \hat{d}_{-k}^{(1)\dagger} \right] \quad (10.100)$$

$$\hat{b}_k^{(2)} = \left[2 \sinh \left(\frac{\pi\omega}{a} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \left[e^{\frac{\pi\omega}{2a}} \hat{d}_k^{(1)} + e^{-\frac{\pi\omega}{2a}} \hat{d}_{-k}^{(2)\dagger} \right]. \quad (10.101)$$

Usando estas transformações, podemos calcular o valor esperado para o número de partículas com número de onda k no vácuo de Minkowski, conforme visto observador de Rindler:

$$\langle 0_M | \hat{b}_k^{(1,2)\dagger} \hat{b}_k^{(1,2)} | 0_M \rangle = \frac{e^{-\frac{\pi\omega}{a}}}{2 \sinh \left(\frac{\pi\omega}{a} \right)} = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{a}} - 1}. \quad (10.102)$$

Esta expressão é um espectro de Planck para a radiação na temperatura:

$$\boxed{T = \frac{a}{2\pi}}. \quad (10.103)$$

Concluimos que um observador uniformemente acelerado no espaço-tempo de Minkowski observará um espectro térmico de partículas. Este é o *efeito Unruh*.

10.5 Radiação Hawking

Aqui, convém voltarmos para a discussão sobre buracos negros do Capítulo 8. A métrica de Schwarzschild é estática, pois não depende da coordenada temporal

t . Portanto, o vetor $K^\mu = (1, 0, 0, 0)$ é um vetor de Killing. Suponha um observador estático, simplesmente parado em sua posição, ou seja, com as componentes espaciais da quadrivelocidade nulas ($U^i = 0$). Note que, para quadrivelocidade de observador estático vale a expressão:

$$K^\mu = V(x)U^\mu, \quad (10.104)$$

onde $V(x)$ é uma função que depende das coordenadas no ponto. Usando a condição de normalização da quadrivelocidade $U_\mu U^\mu = -1$, vemos que $V(x)$ nada mais é do que a magnitude de K^μ :

$$V = \sqrt{-K_\mu K^\mu}. \quad (10.105)$$

A função V é chamada de *fator de redshift*, pois se relaciona com o efeito doppler gravitacional sofrido pela luz. Lembre-se que a energia de um fóton medida por um observador com quadrivelocidade U^μ é $E = -p_\mu U^\mu$. Usando a Equação 10.104, podemos escrever a energia do fóton em função de V :

$$E = \frac{p_0}{V}, \quad (10.106)$$

lembrando que $K^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Um fóton emitido no ponto onde $V = V_1$ e medido no ponto onde $V = V_2$, terá sofrido um redshift assim:

$$\nu_2 = \frac{V_1}{V_2} \nu_1, \quad (10.107)$$

onde $E = h\nu$, sendo ν a frequência do fóton.

Exercício 72. Mostre que o fator de redshift definido pela Equação 10.105 para a métrica de Schwarzschild é:

$$V = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r}}. \quad (10.108)$$

Note que, quando $r \rightarrow \infty$, $V_\infty \rightarrow 1$.

Podemos escrever a quadriaceleração de um observador estático ($a^\mu = U^\nu \nabla_\nu U^\mu$) em função do fator de redshift:

$$a_\mu = \nabla_\mu \ln V. \quad (10.109)$$

O módulo da quadriaceleração será:

$$a = \sqrt{a_\mu a^\mu} = \frac{1}{V} \sqrt{\nabla_\mu V \nabla^\mu V}. \quad (10.110)$$

Um observador no infinito $V_\infty \rightarrow 1$, irá medir uma aceleração que sofreu "redshift":

$$a_\infty = \frac{V}{V_\infty} a = Va. \quad (10.111)$$

Quando esta quantidade é avaliada no horizonte de eventos, chamamos de *gravidade superficial*, $k = Va$. Podemos interpretar k da seguinte forma: colocamos um objeto no horizonte preso em uma corda e o estique até o infinito, k será a aceleração medida no final da corda.

Agora, vamos supor um observador estático próximo ao horizonte de eventos de um buraco negro de Schwarzschild. Usando as Equações 10.108 e 10.110, encontramos que o módulo da quadriaceleração do observador estático é:

$$a = \frac{GM}{r^2 \sqrt{1 - \frac{2GM}{r}}}. \quad (10.112)$$

A constante de gravidade superficial é $k = Va$, calculada no horizonte de eventos $r = 2GM$, será:

$$k = \frac{1}{4GM}. \quad (10.113)$$

Um observador em queda livre próximo ao horizonte de eventos, observará o estado quântico de um campo escalar ϕ idêntico ao vácuo de Minkowski. Isto é razoável a luz do princípio da equivalência de Einstein, observadores em queda livre são os verdadeiros referenciais inerciais locais e o espaço-tempo é localmente plano. Ainda invocando o princípio da equivalência, um observador estático é equivalente a um observador uniformemente acelerado no espaço-tempo localmente plano. Este observador estático irá observar uma temperatura devido ao efeito Unruh de

$$T = \frac{a}{2\pi}. \quad (10.114)$$

Um observador estático no infinito ($r \rightarrow \infty$) verá uma temperatura devido ao efeito de Unruh tendendo a zero, pois $a \rightarrow 0$. Mas, um observador no infinito verá a radiação irradiada próxima do horizonte se propagando para o infinito com um fator de redshift V/V_∞ , onde V é avaliado no horizonte. Como vimos, no infinito, $V_\infty \rightarrow 1$, então a temperatura observada será:

$$T_\infty = \frac{V}{V_\infty} T = VT = \frac{Va}{2\pi} = \frac{GM}{2\pi r^2} = \frac{k}{2\pi}. \quad (10.115)$$

Esta temperatura é a expressão para a *radiação Hawking*:

$$\boxed{T = \frac{k}{2\pi}}. \quad (10.116)$$

Ou seja, observadores muito distantes do horizonte verão um fluxo contínuo de energia termal que é emitido pelo buraco negro. A existência de um horizonte de eventos é fundamental. A radiação Hawking não existiria sem o efeito do horizonte no campo quântico. Segue uma possível interpretação para a radiação Hawking. O vácuo, como consequência do princípio da incerteza de Heisenberg, é repleto de flutuações quânticas, pares de partículas e antipartículas que são criadas e destruídas em um intervalo

de tempo menor do que $\Delta t = \frac{\hbar}{2\Delta E}$, onde a conservação da energia é momentaneamente violada (ZEE, 2013). Se uma das partículas cruza o horizonte de eventos antes de Δt , a outra partícula pode escapar para o infinito em forma de radiação térmica. Passando pelo horizonte, as componentes de dt e dr do espaço-tempo de Schwarzschild trocam de sinal, ou seja, energia e momento são trocados. A partícula que cai tem energia negativa e o buraco negro perde massa e diminui de tamanho, processo chamado de *evaporação do buraco negro*.

Derivando a expressão de Hawking, resolvemos o problema da temperatura do buraco negro que surgiu no Capítulo 8. Tudo leva a crer que buracos negros emitem radiação, embora seja muita fraca para ser detectada. Retornando à Equação 8.41 e usando a temperatura de Hawking, podemos finalmente determinar a entropia de um buraco negro, que será diretamente proporcional a área do horizonte de eventos:

$$S = \frac{A}{4}. \quad (10.117)$$

10.6 Paradoxo da Informação

Suponha um buraco negro de Schwarzschild com massa M e entropia $A/4$. Do ponto de vista da mecânica estatística, a entropia é o logaritmo do número de microestados acessíveis. Mas o buraco negro de Schwarzschild possui apenas um grau de liberdade, a sua massa. Onde está localizada a informação desses microestados? Pode-se argumentar que a informação dos microestados podem ser rastreados no interior do buraco negro, escondidos atrás do horizonte.

Durante o processo de irradiação, o buraco negro perde massa e diminui de tamanho. A temperatura de Hawking é proporcional à M^{-1} . Pela lei de Stefan-Boltzmann, a potência irradiada é proporcional à AT^4 , ou seja, é proporcional à M^{-2} . Então, a variação da energia do buraco negro é:

$$\frac{dM}{dt} \sim M^{-2}. \quad (10.118)$$

Logo, o tempo que o buraco negro leva para evaporar é finito e da ordem de:

$$\tau \sim M^3. \quad (10.119)$$

A radiação Hawking é puramente térmica, aleatória, não contém informação alguma. Quando o buraco negro evapora totalmente e desaparece, a informação dos microestados do buraco negro é perdida, violando a evolução unitária da mecânica quântica que afirma: "A informação necessária para especificar um estado em um tempo anterior é precisamente igual à necessária para especificar um estado em um tempo posterior, desde que os estados sejam conectados por equações de movimento". Esse é o *paradoxo da informação* e a sua solução pode iluminar o caminho para a gravidade quântica.

Referências

- AITCHISON, I.; HEY, A. **Gauge theories in particle physics**. [S.l.: s.n.], 1984.
- ASTRONOMERS Capture First Image of a Black Hole. 2019. Url: <https://eventhorizontelescope.org/press-release-april-10-2019-astronomers-capture-first-image-black-hole>.
- BIRRELL, N. D.; BIRRELL, N. D.; DAVIES, P. **Quantum fields in curved space**. [S.l.]: Cambridge university press, 1984.
- CARROLL, S. M. **Spacetime and geometry**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019.
- D'INVERNO, R. A. Introducing einstein's relativity. **Introducing Einstein's relativity by RA D'Inverno**. New York: Oxford University Press, 1992.
- NEWTON, I. **Principia: princípios matemáticos de filosofia natural**. [S.l.]: Edusp, 2008.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica: Mecânica (vol. 1)**. [S.l.]: Editora Blucher, 2013. v. 394.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica: Ótica, relatividade, física quântica (vol. 4)**. [S.l.]: Editora Blucher, 2014.
- SAKURAI, J. J.; COMMINS, E. D. **Modern quantum mechanics, revised edition**. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1995.
- SCHUTZ, B. **A first course in general relativity**. [S.l.]: Cambridge university press, 2022.
- WALD, R. M. **General relativity**. [S.l.]: University of Chicago press, 2010.
- WEINBERG, S. Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity. 1972.
- WHEELER, J. **Geons Black Holes And Quantum Foam: A Life in Physics**. [S.l.]: W W Norton, 2000.
- ZEE, A. **Einstein gravity in a nutshell**. [S.l.]: Princeton University Press, 2013. v. 14.