## Trabalho de Conclusão de Curso

# Caos em sistemas dinâmicos: da equação logística à equação de Dirac

Júlio L. Silvério e Marcos R. S. Tavares

Centro de Ciências Naturais e Humanas Universidade Federal do ABC, Santo André - SP, Brasil

Nas últimas décadas a teoria do caos vem sendo estudada muito fortemente em diversas áreas do conhecimento, tornando-se um tema interdisciplinar e bem atual. Dentro deste contexto, este trabalho procura estudar, explicar e analisar quatro situações físicas seminais onde o caos se manifesta. São elas: (i) modelagens de problemas através de equações de recorrência (logísticas); (ii) o sistema de Lorenz; (iii) o pêndulo amortecido forçado e (iv) os elétrons de Dirac no grafeno.

Para mostrar o poder das ferramentas matemáticas recorrentemente usadas no estudo desses sistemas, é feita uma revisão bibliográfica de artigos que tratam as situações listadas acima. Na maioria dos casos, reproduzimos seus resultados dando, de próprio punho, pequenas contribuições modificando seus códigos para incluir efeitos de nosso interesse. Investigamos os diagramas de bifurcação que são certeiros para sacar assinaturas de caos. Parâmetros como expoentes de Lyapunov também são estudados para mostrar a intensidade do efeito borboleta. Ademais, o espaço de fase e a seção de Poincaré são analisados no estudo da periodicidade (e a falta dela) na dinâmica de sistemas que possuem atratores de ponto fixo e estranhos.

Estudamos, por fim e de maneira breve, como o caos se manifesta no transporte de férmions relativísticos em materiais bi-dimensionais como o grafeno. Trata-se de efeitos importantes para a área de spintrônica, pois elétrons com spin para cima, diferentemente dos de spin para baixo, são os que apresentam picos de tunelamento caóticos.

## 1. INTRODUÇÃO

Desde a apresentação do cálculo diferencial e integral introduzido por Isaac Newton, a comunidade científica tenta compreender os fenômenos naturais através de modelos matemáticos que visam descrever o que é observado na natureza. Por muito tempo pensou-se que a solução de equações diferenciais, quando é possível resolvê-las, determinariam o futuro do sistema estudado e, assim, cientistas conseguiriam predizer univocadamente o que aconteceria com tais objetos de estudo. Contudo, algumas dessas equações diferenciais eram complicadas o suficiente para serem resolvidas analiticamente. Este é o caso da maioria das equações não lineares, que, com o avançar da ciência, foram tornando-se mais e mais complexas.

Um sistema é não linear quando a equação que dita a sua dinâmica possui termos que, por serem exponenciais ou trigonométricos, fazem com que o total seja diferente da soma das partes individuais [1]. A maioria dos cientistas contornavam esse problema estudando casos específicos dessas equações, como por exemplo, estudar pequenas oscilações em torno de um ponto de equilíbrio ou assumindo pequenas perturbações em um sistema mais simplificado. Ainda assim, com o avanço do poder de computação, foi sendo possível investigar numericamente essas difíceis equações, levando a uma das mais fascinantes descobertas recentes na história da física, a percepção de que a maioria dos sistemas não lineares podem exibir caos [2].

O começo da percepção de dinâmicas caóticas pode ser datado lá pelo final do Séc. XIX no estudo de Henri Poincaré sobre o que hoje é chamado de problema de três corpos [3]. Estudando esse problema mais a fundo, Jacques Hadamard [4] notou a divergência das trajetórias, o que motivou estudos sobre o significado deste efeito, como o de Pierre Duhem em 1908 [5]. Porém, nas décadas seguintes, mesmo com o avanço da matemática na resolução de equações diferenciais, não houve muito progresso significativo numa teoria do caos. De fato, a comunidade científica estava mais interessada, naquele momento, no advento dos estudos e descobertas das novíssimas física relativística e mecânica quântica, deixando de lado as complicadas equações não lineares que requereriam muito tempo e contas para serem resolvidas numericamente.

Porém, na segunda metade do Séc. XX, com o avanço da tecnologia e a introdução da computação, o estudo sobre o caos finalmente voltou ao radar de cientistas e matemáticos

impulsionado, primeiramente, pelo comportamento caótico da equação logística proposta por Robert May [6]. Esta equação tenta modelar a dinâmica do crescimento populacional de certas espécies. Outro pioneiro na teoria do caos foi Edward Lorenz, cujo interesse no tema já podia ser percebido no seu trabalho de 1961 [7]. E desde então, vêm-se fazendo simulações de dinâmicas complexas em computadores, que foram evoluindo com tempo, tendo respostas mais rápidas e precisas.

Não é simples definir, pelo menos no aspecto filosófico, exatamente o que é o caos revelado pelas resoluções dessas equações. O termo "caos" pode referir-se à limitação da mente humana atual em tentar compreender a imprevisibilidade encontrada nas soluções do sistema[8]. Na matemática, a necessidade de descrever a sua complexidade fez com que fossem criadas novas técnicas para interpretação de tais sistemas. Este trabalho tem como objetivo compilar, explicar e mostrar exemplos de aplicações na física de algumas dessas técnicas que são utilizadas frequentemente nos estudos sobre sistemas caóticos, são elas: diagramas de bifurcação, expoentes de Lyapunov, órbitas no espaço de fases e seções de Poincaré. Ao final deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) o leitor terá se envolvido com poderosas ferramentas e como elas facilitam a análise de dinâmicas caóticas.

A teoria do caos é bem recente na história da física, mesmo assim há uma vasta quantidade de artigos sobre o assunto. Por exemplo, Leigh e Wegsman [9] apresentam um diagrama esquemático que contém toda a informação quantitativa necessária para analisar a maioria das interações do problema de três corpos de Poincaré. Leigh, em outro artigo, vai além e analisa o problema de quatro corpos [10]. De fato, nos anos recentes, há vários estudos relacionados ao caos em órbitas na astronomia e astrofísica, como por exemplo, o trabalho de Gurzadyan [11], que analisa o comportamento das órbitas dos planetas do sistema solar e de aglomerados de galáxias.

Porém, não é só na física clássica em que o caos é encontrado, na realidade este conceito capturou o interesse de cientistas de diversas áreas. Um exemplo disso são as várias descobertas recentes de atratores estranhos vindos de diversos modelos diferentes, Sprott *et al.* [12] compilam vários atratores encontrados recentemente. A teoria do caos também capturou o interesse das físicas mais modernas, na física quântica, por exemplo, Wittman *et al.* na Ref. [13] investigaram o caos gerado ao mudar o potencial de bósons interagindo em um poço triplo.

Nesta última década surgiram estudos que usam juntamente a teoria do caos, a teoria da

relatividade e a mecânica quântica: o caos relativístico quântico [14]. Um exemplo muito interessante e que será tratado neste trabalho vem dos estudos com objetos chamados de materiais bi-dimensionais (2D) com cones de Dirac. Esses materiais, como o grafeno, possuem alguns elétrons que podem ter um comportamento de quasipartícula e se comportam como partículas de massa de repouso nula quando transportadas nestes materiais. Outros estudos de espalhamento relativístico de quasipartículas, como o feito na Ref. [15], mostram que o estado atual da teoria do caos é muito abrangente na física e mais cientistas e matemáticos são atraídos por ela. Por isso, é muito importante conhecer quais são as ferramentas mais usadas para se perceber, interpretar e analisar os fenômenos caóticos.

Este trabalho se divide em três seções principais. A primeira é a revisão da física a ser atacada, onde são introduzidos a equação logística, o diagrama de bifurcação, os expoentes de Lyapunov (EL), os atratores e seções de Poincaré, as ferramentas essenciais para a compreensão das análises feitas e a relação de dispersão, vinda da equação de Dirac, dos elétrons no grafeno. A seção seguinte fala sobre as formulações teóricas em que se discute sobre a caotização através da função seno, o atrator de Lorenz, o pêndulo amortecido forçado e o modelo de Xu *et al.* [14]; este último feito para mostrar o caos dos elétrons do grafeno. Por fim, na seção seguinte, discutimos os resultados de Xu *et al.* para os elétrons de Dirac e também mostramos resultados feitos de próprio punho, onde analisamos as informações extraídas do código desenvolvido neste TCC. Desenvolvemos códigos que descrevem (i) as equações logísticas na presença de caotização devida a uma função seno; (ii) as convecções atmosféricas modeladas pelo sistema de Lorenz e (iii) para o pêndulo amortecido restaurativo forçado. Todo esforço deste TCC é feito na compreensão e domínio das técnicas e resultados já existentes em literatura, procurando, em seguida, dar uma contribuição acadêmica ao propor, de maneira breve, leves mudanças nas técnicas e seus consequentes resultados.

## 2. REVISÃO DA FÍSICA A SER ATACADA

#### 2.1. Equação logística e diagrama de bifurcação

Uma das maneiras mais simples de se modelar o caos de um sistema que se modifica no tempo é usando uma equação de recorrência, também conhecida como técnica de mapeamento. Para um sistema unidimensional, seja x um observável e n a denotação da sequência temporal dessa variável. Adota-se

$$x_{n+1} = f(x_n),\tag{1}$$

onde  $x_n$  é a variável na *n*-ésima iteração e  $f(x_n)$  uma função que estabelece a recorrência. Um exemplo clássico de uma função de recorrência é a função logística popularizada pelo biólogo Robert May [6] para descrever a lei de crescimento populacional. A recorrência proposta é dada pela seguinte equação

$$x_{n+1} = bx_n(1 - x_n), (2)$$

onde  $b \in [0, 4]$  é o parâmetro de controle do crescimento e  $x_n$  é restrito ao intervalo [0,1]. Veja que, para a equação logística, a função é  $f(b, x_n) = bx_n(1 - x_n)$ .

Existem muitas outras possíveis funções  $f(b, x_n)$  estudadas na literatura, sendo que a comunidade científica analisa suas propriedades da mesma forma que fazem com a equação logística (2). Um exemplo de tal equação de recorrência é a equação logística cúbica, mostrada pela equação

$$x_{n+1} = bx_n(1 - x_n^2). (3)$$

Note que nestas equações podemos fixar um dado parâmetro de crescimento e, usando um valor inicial para o observável  $x_0$ , é possível observar como x evolui no tempo, isto é, investigar cada iteração n. Dependendo do valor de b e após certo número de iterações o observável pode convergir para um equilíbrio, ficar trocando entre dois ou mais valores de equilíbrio ou não convergir para equilíbrio algum. Este último caso é um sinal de que o sistema é caótico.

Os resultados de uma dada função que apresenta caos pode ser observados mais facilmente de maneira gráfica. Para isto, nesta seção será mostrado o conceito do diagrama de bifurcação, que é o gráfico mais usual que descreve tais resultados. Para exemplificar este conceito, será mostrado o diagrama de bifurcação da equação logística, Eq. (2).

Como dito acima, a equação de recorrência pode convergir ou não para o equilíbrio, a depender do valor do parâmetro da função de recorrência. Pode-se ilustrar, então, a dependência do valor de equilíbrio com o parâmetro de uma dada equação de recorrência (ou diferencial) ao construir um gráfico em que o eixo das abscissas descreve os valores do parâmetro b e as ordenadas descrevem a posição de equilíbrio. Este gráfico apresenta bifurcações e sua explicação é a dada a seguir. A Fig. 1 mostra o diagrama de bifurcação da equação logística, Eq. (2).



Figura 1: Diagrama de bifurcação para a equação logística, Eq. (2).

Se um sistema é periódico com período N, então ele irá se repetir depois de N ciclos. No caso de uma equação de recorrência, o sistema tem período N se depois de N iterações ele se repete, i.e.  $x_{n+N} = x_n$ . A Fig. 1 mostra que, para valores de b entre 0 e aproximadamente 3, o observável converge para um único valor, ou seja, os valores sucessivos de  $x_n$ são todos os mesmos, isso quer dizer que, neste intervalo, o sistema tem período N = 1, entrando em equilíbrio depois de um certo número de iterações. Para valores de b entre 3 e aproximadamente 3,45 os valores de convergência de x se alternam entre dois valores diferentes. Portanto, para pontos sucessivos de  $x_n$  criam exatamente dois pontos no gráfico da Fig. 1 e a curva bifurca em b = 3. Isso quer dizer que, depois de um certo número de iterações, o sistema alterna entre somente dois estados possíveis com período N = 2, ou seja, seu período dobra.

Na realidade, conforme b cresce, o período N vai dobrando muito rapidamente até que o gráfico torna-se quase uma desordem de pontos, ou seja, não é mais possível dizer que  $x_n$  converge para um valor ou para um pequeno conjunto de valores. Essa grande desordem que aparece no gráfico para valores de b > 3,45 é uma assinatura da presença de caos nesta equação. Este tipo de efeitos caóticos presentes na Fig. 1 serão discutidos em mais detalhes na seção de resultados originais deste TCC.

#### 2.2. Expoentes de Lyapunov

O expoente de Lyapunov (EL) é um parâmetro utilizado para se ter uma noção da dependência que um determinado sistema tem com as condições iniciais. A dependência sensitiva das condições iniciais é a noção de que pequeníssimas diferenças nas condições iniciais ou nas condições externas trazem uma grande diferença no comportamento do sistema após um período considerável de tempo ter passado.

Para ajudar no entendimento do conceito, a Fig. 2 mostra a evolução temporal x(t) de um sistema unidimensional. Imagine que, em t = 0, foram colocados no sistema dois pontos iniciais x(0) e x'(0) separados por uma diferença inicial tão pequena quanto se queira  $\delta(0)$ , ou seja,  $x'(0) - x(0) = \delta(0) e |\delta(0)| \ll 1$ . É de se esperar que, depois de evoluírem no tempo, a diferença entre elas passa a ser

$$x'(t) - x(t) = \delta(t); \qquad \qquad x'_n - x_n = \delta_n, \qquad (4)$$

onde a igualdade à esquerda é para o caso da evolução temporal do sistema ser descrita por funções e à direita, por iterações.



Figura 2: Sistema unidimensional fazendo duas evoluções temporais diferentes  $x(t) \in x'(t)$ . As condições iniciais de cada evolução  $(x(0) \in x'(0), \text{ respectivamente})$  são separadas inicialmente por uma pequena diferença  $x'(0) - x(0) = \delta(0)$ , onde  $|\delta(0) \ll 1$ . Logo, considera-se a diferença entre ambas evoluções em qualquer instante de tempo como  $x'(t) - x(t) = \delta(t)$ .

Se o sistema não for caótico, espera-se que a diferença em qualquer instante de tempo  $|\delta(t)|$  nunca se torne muito grande ou até convirja para zero, de forma que tanto x(t) quanto x'(t) façam trajetórias semelhantes entre si. Por outro lado, se o sistema for caótico, espera-

se que  $|\delta(t)|$  fique grande o suficiente para chegar ao ponto de x(t) e x'(t) exibirem trajetórias completamente diferentes entre si.

Segundo a Ref. [2], a diferença  $\delta$  evolui exponencialmente no tempo, ou seja,

$$|\delta(t)| = |\delta(0)|e^{\gamma t}, \qquad \qquad |\delta_n| = |\delta_0|e^{\gamma n}; \tag{5}$$

onde  $\gamma$  é o expoente de Lyapunov (EL) e, novamente, a igualdade à esquerda é da descrição por funções temporais e, à direita, por iterações. Veja que, se  $\gamma < 0$ , então a Eq. (5) indica que  $|\delta(t)| < |\delta(0)|$ . Logo a diferença entre as coordenadas  $x \in x'$  diminui e elas ficam mais próximas entre si ao passar do tempo. Porém, se  $\gamma > 0$ , a Eq. (5) indica que  $|\delta(t)| > |\delta(0)|$ , logo elas se afastam conforme evoluem no tempo.

Portanto, é possível concluir que o EL mede a dependência sensitiva das condições iniciais de um determinado sistema. Se  $\gamma < 0$ , as evoluções temporais de diferentes condições iniciais tendem a convergir para a mesma trajetória, o que não é um indicativo de caos. Mas se  $\gamma > 0$ , as evoluções temporais ficam completamente distintas entre si, um evidente sintoma de um sistema caótico. Além disso, o EL também consegue dar uma noção do quão sensível às condições iniciais um sistema é: quanto mais negativo for o valor de  $\gamma$ , mais rápido as diferentes evoluções convergem para a mesma dinâmica; e quanto mais positivo for o valor de  $\gamma$ , mais rapidamente se observa que as trajetórias se diferem drasticamente.

Como mostrado nas Refs. [16] e [17], define-se o expoente de Lyapunov como

$$\gamma = \lim_{\substack{t \to \infty \\ \delta(0) \to 0}} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\delta(t)}{\delta(0)} \right|, \qquad \gamma = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_i} \right|; \tag{6}$$

onde  $f(x_i)$  é a função de recorrência. É possível perceber que o expoente de Lyapunov, no caso de equações de recorrência, é a média do logaritmo natural do valor absoluto da derivada da função de recorrência. Há vários métodos numéricos para se calcular numericamente o expoente de Lyapunov no caso de funções temporais, *e.g.*, o método de Wolf, o método de Rosenstein, o método de Kantz e o método de sincronização, dentre outros [16].

Como visto na Sec. 2.2 para caso da equação logística, a presença do caos depende também dos valores dos parâmetros da equação (naquele caso, do valor de *b*). Portanto é possível afirmar que o EL de uma variável depende dos valores dos parâmetros, por isso é muito comum construir gráficos do EL versus o parâmetro em questão. Esses gráficos são muito úteis para poder analisar a influência dos parâmetros de uma dada equação na sensitividade das condições iniciais.

#### 2.3. Atratores e seções de Poincaré

Nesta subseção introduziremos, primeiramente, a noção do espaço de fases, também conhecido como espaço de estados para depois estudar as condições em que o caos se manifesta neste espaço. O espaço de fases mostra as taxas de variação com o tempo da coordenadas generalizadas  $q_i$ , ou seja  $\dot{q}_i(q)$ , em função dos próprios  $q_i$ . Já o estado de um sistema mecânico é representado por um ponto neste plano  $(q_i \dot{q}_i)$ . Uma órbita nesse espaço é, então, uma curva formada pelos possíveis estados do sistema, ou seja todos os pontos de estado  $(q_i, \dot{q}_i)$ como uma função implícita do tempo. Analisando o espaço de fases é possível, em muitos casos, identificar comportamentos caóticos, periódicos ou auto-organizados.

Sistemas dinâmicos auto-organizados são sistemas que espontaneamente convergem para um mesmo ponto ou região no espaço de fases, não importando as condições iniciais escolhidas dentro de um determinado intervalo. Para essas regiões e pontos dá-se o nome de atratores, porque é como se as trajetórias fossem atraídas para um lugar específico no espaço de fases. Depois que as trajetórias se aproximam desses atratores, elas não saem mais de lá.

Os atratores que convergem a um único ponto levam o nome de atratores de ponto fixo e estes não acarretam num comportamento caótico do sistema. Porém, há outros tipos de atratores e uma das importâncias destes outros se dá quando servem como uma assinatura para o comportamento caótico. Há vários exemplos na literatura da existência de atratores caóticos, os quais recebem o nome de atratores estranhos. Além disso, em muitos sistemas, principalmente os caóticos, o espaço de fases pode abrigar muitos pontos em seu gráfico, ficando muito cheio de informação para ter algum uso. Porém, existe um artifício para extrair uma quantidade menor de informações mais organizadas e úteis do espaço de fases: a chamada seção de Poincaré.

Segundo a técnica criada por Henry Poincaré, em vez do movimento no espaço de fases ser construído por coordenadas  $(q, \dot{q})$  parametrizadas por uma variável de tempo tcontínua, Poincaré sugere que a parametrização dessa coordenada seja feita por um tempo não contínuo. A ideia consiste em graficar cada ponto no espaço de estados uma vez por ciclo, em instantes  $t = t_0, t_0 + T, t_0 + 2T, t_0 + 3T, ...,$  onde T é o período de um ciclo e  $t_0$  é o tempo inicial escolhido de modo que o movimento transiente inicial tenha desaparecido. Ou seja, na seção de Poincaré, a órbita é dispensada e desenha-se apenas um ponto por ciclo.

Com isso, é possível concluir que, para sistemas periódicos, haverá apenas alguns pontos

desenhados nos gráficos dependendo do período T do ciclo. Seja  $\eta$  o número de pontos na seção de Poincaré, então o período do movimento é dado por  $\eta T$ . Por exemplo, se  $\eta = 2$ , então o período do movimento é 2T [2]. Agora, se o movimento for caótico, então ele nunca se repete, fazendo seu período tender ao infinito, logo é esperado aparecer uma quantidade imensa de pontos no gráfico, criando uma figura no plano de Poincaré.

#### 2.4. Elétrons de Dirac no grafeno e caos na óptica clássica

Neste tópico entraremos no mundo da física moderna. O grafeno, o primeiro exemplo de material bidimensional (2D), é uma camada única de átomos de carbono que se encontram arranjados numa rede hexagonal 2D. Ademais, esta rede pode ser entendida com uma rede de Bravais [18], podendo ser desenhada através de duas sub-redes triangulares A e B, como mostradas na Fig. 3(a).

O carbono possui 4 elétrons livres para realizar suas ligações químicas. Porém, a Fig. 3(a) mostra que no grafeno cada átomo de carbono liga-se apenas a 3 outros átomos. Essas ligações são do tipo  $sp^2$ , sobrando um elétron, que se comporta praticamente como partícula livre, para cada carbono. Como visto na Fig. 3(a), A e B são duas sub-redes não equivalentes e, além disso, provém dois tipos independentes de movimento. Como o elétron pode ocupar tanto A quanto B, ele adquire um pseudospin além em ao seu spin intrínseco 1/2. Pode-se chamar de s uma forma reduzida de quantificar esses dois efeitos, onde s = 1 para spin-down [19].

Usando modelo Tight Binding, proposto por Bloch [20] para descrever estrutura de bandas em sólidos cristalinos, será necessário usar a equação de Dirac para esses elétrons [21]. Supondo uma energia potencial eletrostática de barreira  $\nu$ , o operador hamiltoniano para baixas energias pode ser escrito como

$$\hat{H} = \hbar v_f \mathbf{k} \cdot \hat{\sigma} + \nu \hat{1} = \hbar v_f \begin{bmatrix} 0 & k_x - ik_y \\ k_x + ik_y & 0 \end{bmatrix} + \nu \hat{1}, \tag{7}$$

onde  $\hbar$  é a constante de Planck,  $v_f \approx 10^6$  m/s é a velocidade de Fermi,  $\hat{1}$  é a matriz identidade,  $\hat{\sigma}$  é o vetor formado pelas matrizes de Pauli e  $k_x$  e  $k_y$  são as componentes do vetor de onda **k** do elétron nas direções  $x \in y$ , respectivamente [22]. Calculando os autovalores do hamiltoniano, encontra-se as seguintes energias do sistema:

$$E(k) = \nu \pm \hbar v_f \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \nu \pm \hbar v_f |\mathbf{k}|$$
(8)

A relação de dispersão dada na equação (8) mostra um fato muito interessante: a energia depende linearmente do momento, dado pelo vetor de onda  $\mathbf{k}$ . Esse fenômeno, mostrado na figura 3(b), é um produto da geometria da rede do grafeno e da equação de Dirac.



Figura 3: (a) Representação esquemática da rede cristalina hexagonal do grafeno. A rede é construída por átomos denominados A (em vermelho) e B (em azul). Um átomo da subrede triangular de tipo A está ligado a três átomos da sub-rede de tipo B, e vice-versa. (b) Relação de dispersão linear, chamada de cone de Dirac, de um elétron livre, i.e.  $\nu = 0$ (energia positiva, em verde), e do buraco (energia negativa, em laranja). Adaptadas da Ref. [21].

As energias que consideram o termo do vetor de onda como positivo na equação (8) são os da banda de condução, onde o elétron analisado transita; já as energias que consideram negativo termo do vetor de onda são os da banda de valência, que dita a energia do buraco deixado pelo elétron. Sendo  $\nu$  uma constante, o seu valor define o ponto de Dirac (ponto em que E = 0) em relação ao plano  $k_x k_y$ .

Da óptica clássica, o índice de refração da luz em um meio  $n_{meio}$  é definido como

$$n_{meio} = \frac{c}{v_{meio}} = \frac{k_{meio}}{k_c},\tag{9}$$

onde  $c \in k_c$  são a velocidade da luz e o número de onda da luz no vácuo, respectivamente. Já  $v_{meio}$  e  $k_{meio}$  são a velocidade da luz e o número de onda da luz no meio, respectivamente. É sabido que quando um feixe de luz em um meio com índice de refração  $n_i$  incide numa superfície de um outro meio, com índice de refração  $n_r$ , parte da luz reflete e a outra parte refrata, com o ângulo refratado dado pela lei de Snell. Porém, se  $n_i > n_r$ , a luz pode sofrer reflexão interna total se os ângulos de incidência forem maiores que o ângulo crítico e não refratará. A figura 4 mostra o comportamento da luz numa cavidade que contém dois círculos não concêntricos, os quais definem a divisão de 3 regiões: I, de índice refração  $n_I$ ; II que possui índice refração  $n_{II}$ ; e III, com  $n_{III}$ . Os índices de refração são tais que  $n_I < n_{II} < n_{III}$ .



Figura 4: Comportamento caótico da luz em um modelamento de 3 regiões. O raio inicial de luz (em azul) tem um leve desvio no seu ângulo  $\theta$  (imagem da esquerda) para um  $\theta$ ' (imagem da direita), sendo este desvio muito pequeno:  $\theta' - \theta = 10^{-4}$ . A trajetória da luz de ângulo  $\theta$  tem quase um padrão de repetição, enquando a do  $\theta$ ' faz um caminho caótico. Essas trajetórias bem distintas evidenciam a sensitividade às condições iniciais, elemento do caos. Figura reproduzida da Ref. [21].

A Fig. 4 mostra que, embora os dois raios de luz difiram apenas ligeiramente em seus ângulos iniciais, os comportamentos resultantes são notavelmente diferentes. Essa sensibilidade é a marca do caos. Como ficará mais evidente na Sec. 3.4, é possível estabelecer uma conexão entre a óptica geométrica e o vetor de onda  $\mathbf{k}$  do elétron do grafeno pela definição do índice de refração, Eq. (9).

## 3. FORMULAÇÕES TEÓRICAS

#### 3.1. Caotização através da função seno

Com o propósito de revisar, em um primeiro momento, sistemas dinâmicos simples que apresentam movimentos caóticos (ou complexos) de maneira natural, foi apresentado na Sec. 2.1 o diagrama de bifurcação para a Eq. (2). Esta equação matemática simples foi proposta ainda na década de 70 do século passado para o estudo de dinâmicas populacionais sujeitas a parâmetros externos de crescimento controláveis [6]. Desde então físicos e matemáticos criaram outros modelos para reproduzir o caos com características diferentes a fim de simular outras dinâmicas observadas na natureza. Mais recentemente, houve necessidade de se obter equações que apresentem caos mais rapidamente e por um maior intervalo de valores do parâmetro de controle do que na equação (2). A Ref. [23] apresenta uma maneira de incrementar a caotização da dinâmica populacional testando outras equações de recorrência. Isto é feito em detrimento da manipulação ou da troca apropriada do parâmetro de crescimento. O propósito dos autores é estabelecer um controle mais efetivo de circuitos eletrônicos de interesse que, por caotização excessiva nos sinais elétricos ou pela falta desta, devem apresentar rendimentos energéticos mais eficientes.

Para isso, esses autores propõem, entre outras funções, a equação dos mapas de recorrência. Trata-se do uso de uma equação de recorrência, por exemplo a equação logística (2), como o *argumento* de uma função senoidal.

$$x_{n+1} = \sin(\pi f(b, x_n)), \tag{10}$$

onde  $f(b, x_n)$  é, como dito na seção 2.1, uma função que estabelece a recorrência. A equação (10) usa a função seno como uma transformação não linear a fim de aprimorar a complexidade caótica de qualquer mapa unidimensional, como o da Eq. (2) por exemplo. De fato, esse exercício pode ser naturalmente estendido usando outras funções trigonométricas de interesse [24]. Aqui focaremos nesta transformação não linear que será referenciada por "senodificação", afinal ela aplica a função seno a qualquer  $f(x_n)$  ali colocado. As propriedades da senodificação serão analisadas na Sec. 4.1.

#### 3.2. O atrator de Lorenz

Foi visto até agora situações caóticas descritas pelas equações logísticas que trata a dinâmica populacional através de um método iterativo. Porém, a maneira mais natural de se encontrar um sistema caótico na física é em uma equação diferencial não linear. Equações diferenciais não lineares são aquelas que envolvem as derivadas de uma variável, a variável em si e uma função não linear, podendo esta ser o produto de duas ou mais variáveis de um sistema.

Outra contribuição deste manuscrito é explorar um sistema de equações diferenciais acopladas que modelam, de maneira bem simplificada, a dinâmica de convecção da atmosfera da Terra. Trata-se das equações seminais no estudo das Ciências Atmosféricas que foram introduzidas na década de 60 do século passado por Lorenz [25]. Convecção atmosférica resulta da instabilidade meteorológica de um fluído de ar oriundo de um gradiente de temperatura entre diferentes camadas da atmosfera. As convecções atmosféricas são objeto de estudo para que previsões meteorológicas possam ser feitas com maior exatidão e maior presteza. O sistema de Lorenz consiste nas seguintes equações diferenciais acopladas:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(r - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$
(11)

Aqui, os parâmetros  $\sigma$ ,  $r \in b$  são chamadas de parâmetros de Lorenz e são constantes resultantes da teoria de fluidos colocados aqui de maneira simplificada para representar efeitos externos controláveis. A função x(t) descreve a intensidade do movimento convectivo das linhas de fluxo a medida que o tempo passa; por outro lado, y(t) corresponde à diferença de temperatura entre as correntes de ascensão e descida e, finalmente, z(t) representa quanto o perfil de temperatura vertical é dispersado de uma variação linear inicialmente esperada.

As equações (11) advém das soluções que governam a convecção em líquidos. Para mais detalhes de sua dedução, vide as Refs. [25] e [26]. Para fins de elucidação, a figura 5 mostra o gráfico tridimensional da equação (11) feito com código do próprio autor com as seguintes escolhas dos parâmetros de Lorenz:  $\sigma = 10$ , r = 28 e b = 8/3. O ponto inicial escolhido foi (0; 1; 20).

Perceba que nos parâmetros de Lorenz não há um ponto fixo, de fato, o atrator de



Figura 5: Atrator de Lorenz em 3D

Lorenz é classificado como um atrator estranho e não irá convergir para um ponto no espaço analisado. Como ele é caótico, também não apresenta periodicidade, logo o sistema nunca retornará a um estado anterior, desenhando uma curva infinita num espaço finito, ou seja, o atrator de Lorenz é um fractal [27].

#### 3.3. O pêndulo amortecido forçado

Um outro exemplo clássico de equação não linear é a equação de um pêndulo simples de massa m e comprimento L que não faz pequenas oscilações em seu ângulo  $\theta$ . A dinâmica desse pêndulo é dada pela equação

$$mL^2\ddot{\theta} = -mgL\sin\theta \tag{12}$$

A não linearidade é essencial para o caos, porém ela não o garante. A equação (12) é um grande exemplo disso, pois ela é não linear por causa da função seno, mas o pêndulo não apresenta comportamento caótico, mesmo com grandes oscilações. Por outro lado, inspirado pela análise feita na Ref. [17], será tomado um famoso problema caótico advindo das equações newtonianas, o pêndulo amortecido e forçado (PAF). Tal pêndulo possui um amortecimento  $-b\dot{\theta}$  e uma força motriz oscilatória  $D(t) = D \cos(\omega_d t)$ , como mostra a figura 6, a equação descreve a bastante conhecida equação de movimento do PAF, que é complexa o suficiente para apresentar caos para alguns valores de parâmetros, de forma que temos a seguinte equação resultante:

$$mL^2\ddot{\theta} = -mgL\sin\theta - b\dot{\theta} + D\cos\left(\omega_d t\right) \tag{13}$$

Em cursos introdutórios sobre oscilações, evita-se o caos ao restringir o movimento do pêndulo a pequenas oscilações, linearizando a equação. Na introdução ao caos, como feita na Ref. [17], retira-se essa restrição e analisa-se o PAF em toda a sua complexidade. Porém,



Figura 6: Pêndulo amortecido sendo acionado sobre seu pivô por uma força oscilatória D(t). Adaptada da Ref. [17].

este trabalho vai além do que foi feito na Ref. [17] e será colocado um elemento a mais na Eq. (13). Imagine que agora há também uma mola adaptada ao pivô do pêndulo exercendo um torque  $\Upsilon = -K\theta$  que tende a restaurar o pêndulo a sua posição  $\theta = 0$ . Neste caso, a equação (13) se torna a equação do pêndulo amortecido restaurativo forçado (PARF), dada pela equação

$$mL^{2}\ddot{\theta} = -mgL\sin\theta - b\dot{\theta} - K\theta + D\cos\left(\omega_{d}t\right).$$
(14)

Dividindo a Eq. (14) por  $mL^2$  e também por  $\omega_0^2 = \frac{g}{L}$ , chega-se na equação

$$\frac{\theta}{\omega_0^2} = -\sin\theta - \frac{b\theta}{mL^2\omega_0^2} - \frac{K\theta}{mL^2\omega_0^2} + \frac{D\cos\left(\omega_d t\right)}{mgL}.$$
(15)

Agora, será definido o tempo adimensional dado por  $t' = \omega_0 t$ . Com essa substituição é possível afirmar que

$$\frac{d}{dt} = \omega_0 \frac{d}{dt'}, \qquad \qquad \frac{d^2}{dt^2} = \omega_0^2 \frac{d^2}{dt'^2}$$

Então, seguindo o que foi sugerido em [17], faz-se as seguintes trocas de variáveis:

$$x = \theta,$$
  $c = \frac{b}{mL^2\omega_0},$   $F = \frac{D}{mgL},$   $\omega = \frac{\omega_d}{\omega_0}$   $e$   $\kappa = \frac{K}{mL^2\omega_0^2};$ 

onde x é a variável oscilante, c é o coeficiente de amortecimento adimensional, F é a intensidade adimensional da força motora,  $\omega$  é a frequência angular adimensional de acionamento e  $\kappa$  é o torque restaurativo adimensional. Substituindo tudo isso na equação (15), chega-se na equação do PARF adimensional:

$$\ddot{x} = -c\dot{x} - \sin x - \kappa x + F \cos \omega t', \tag{16}$$

onde o ponto acima de x simboliza, agora, a derivada em relação ao tempo adimensional t'. Destaca-se o novo termo  $-\kappa x$  na equação (16) em comparação com a Ref. [17]. Este termo vem da introdução do torque da mola restauradora e pode ser entendido como um torque adimensional.

#### 3.4. Modelo do grafeno caótico baseado na óptica

Por causa de suas relações de dispersão serem parecidas, os elétrons de Dirac se comportam de forma análoga aos fótons na óptica [21]. Para observar esse comportamento dos elétrons, a Ref. [21] emulou uma cavidade nos moldes da Fig. 4 usando uma folha de grafeno, introduzindo campos elétricos em algumas regiões. Além disso, nas regiões com campo elétrico também haverá campo magnético para que haja influência dos spins, reforçando o aspecto quântico do sistema a ser estudado.

Esse modelo, mostrado na figura 7(a), consiste em duas regiões circulares que separam a folha de grafeno em 3 regiões: a região I é a folha de grafeno sem influência de algum campo eletromagnético; a região II tem raio  $R_1$  e potencial elétrico constante  $\nu_1$ ; a região III, cujo centro está a uma distância  $\xi$  do centro da região II, possui raio  $R_2$  e potencial elétrico constante  $\nu_2$ . As regiões II e III também estão sob influência de um campo magnético constante e um isolante magnético cobre as regiões II e III. O ferromagnetismo desse material atua nos spin dos elétrons, quebrando a degenerescência e fazendo a energia de um elétron depender de seu spin. Como resultado, os elétrons de spin para cima e para baixo exibem dinâmicas distintas [21].

Por causa da quebra de degenerescência provocada pela interação do spin total com o campo magnético, será acrescido um termo  $s\mu$  na energia dada na Eq. (8), modificando-a para a seguinte equação:

$$E_j(k) = \nu^j - \eta^j s \pm \hbar v_f |\mathbf{k}|, \tag{17}$$

onde s é uma notação reduzida que está associada ao spin (1 se spin-up, -1 se spin-down), j = I, II, III indica a região e  $\eta^j$  representa a quebra da degenerescência provocada pelo campo magnético em cada região. A Fig. 7(b) mostra como a estrutura da banda de energia difere por região para os estados de spin do elétron. A região I não tem campo elétrico, *i.e.*  $\nu^I = 0$ , nem magnético, então os cones de Dirac do elétron para spin up e spin down são degenerados (em verde). Em toda a região com potencial elétrico, o campo magnético quebra a degenerescência, de modo que



Figura 7: (a) Esquemática no grafeno análoga à cavidade de luz na figura 4. (b) Gráfico da energia ao longo do eixo x. A região I tem um potencial elétrico nulo  $\nu^{I} = 0$ . A região II tem um potencial elétrico  $\nu_{1} = \nu^{II} = -\mu$ , e a região III tem um potencial  $\nu_{2} = \nu^{III} = \mu$ . Os cones de Dirac com spin para cima e para baixo do grafeno são degenerados (verde) na região I, mas essa degeneração é quebrada nas regiões II e III: o campo magnético produz uma diferença de energia entre os cones de Dirac de *spin-up* (em vermelho) e *spin-down* (em azul). Adptada da Ref. [21].

o spin-up e o spin-down têm um deslocamento de energia relativa de  $2\mu$ . Dentro região II, um potencial elétrico negativo  $\nu^{II} = \nu_1 = -\mu$  puxa para baixo ambos cones de Dirac na mesma quantidade. Como resultado, usando a Eq. (17), conclui-se que o ponto de Dirac dos elétrons de spin down (em azul) fica em zero, mas dos elétrons de spin up (em vermelho) desce para  $\nu_1 - \mu = -2\mu$ . Já na região III, um potencial elétrico positivo  $\nu^{III} = \nu_2 = \mu$  sobe os pontos de Dirac dos elétrons de spins down para  $\nu_2 + \mu = 2\mu$  e os de spin up ficam em zero.

Vale ressaltar também que os índices de refração dos elétrons do poço (região II) ou da barreira de potencial (região III) do sistema são dados, como visto na Ref. [28], de forma análoga à Eq. (9), sendo definidos como

$$n_s^j = \frac{k_j}{k_I},\tag{18}$$

onde  $k_j$  é o número de onda na região I, II ou III,  $k_I$  é o número de onda no meio exterior (nesse caso, a região I) e  $n_s$  é o índice de refação que depende do número de spin  $s = \pm 1$ por causa da degenescência causada pelo campo magnético. Claro, a lei de Snell funciona para os elétrons de Dirac da mesma maneira que funciona para fótons.

#### 4. **RESULTADOS**

#### 4.1. Equações logísticas

A Fig. 8(a) mostra o diagrama de bifurcação para a Eq. (2), sendo que a Fig. 8(c) mostra o mesmo diagrama para uma equação logística cúbica, ou seja, para a Eq. (3).

Como um primeiro teste destes nossos códigos, foi procurado reproduzir os resultados apresentados na Ref. [23] e ir além. As Figs. 8(b) e 8(d) mostram resultados da senodificação que são reproduzidos aqui através de um código computacional feito pelo autor deste TCC. Note-se que a Ref. [23] não trabalha com a equação logística cúbica e, consequentemente, não mostra resultados para a sua senodificação. Mas este TCC apresenta, a partir da Fig. 8(c), resultados obtidos por nosso código que servem como uma pequena extensão ao trabalho citado.

A figura 8(a) aqui reproduzida é bem conhecida, sendo usada como um exemplo didático de caos em livros de Mecânica Clássica. A figura 8(b), por outro lado, mostra o resultado da técnica de aprimoramento do caos pela função seno [23], ou seja, usa a equação logística de



Figura 8: Diagramas de bifurcação da (a) equação logística,  $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ ; (b) equação logística aprimorada,  $x_{n+1} = \sin[\pi A x_n(1-x_n)]$ ; (c) equação logística cúbica,  $x_{n+1} = bx_n(1-x_n^2)$  e (d) equação logística cúbica aprimorada,  $x_{n+1} = \sin[Bx_n(1-x_n^2)]$ .

Robert May [6] como o próprio argumento da função seno. Note que é possível perceber que o método adiciona um comportamento caótico mais complexo para a dinâmica populacional, um domínio maior, e sendo possível até encontrar valores negativos para os valores do eixo das ordenadas. Os valores no eixo vertical indicam valores de convergência para o número máximo de elementos da amostra populacional. Este número é dado em função (abcissas) do parâmetro de crescimento. O eixo das ordenadas pode apresentar valores negativos, que depende do valor do parâmetro de crescimento. Estes valores negativos costumam ser evitados nos livros-texto e nos exemplos didáticos por não serem de interesse no estudo. É necessário comentar, porém, que a figura 8(c) possui pontos negativos a partir de  $c \ge 2,6$ , mas, para fins de comparação com a figura 8(a), será mantido as figuras com a mesma escala positiva em seus eixos verticais. Embora as figuras  $8(a) \in 8(c)$  terem um formato parecido, é possível observar que a equação cúbica descreve um comportamento caótico para valores menores do parâmetro de crescimento, ou seja, *ela entra em caos mais natural e rapidamente*. Além disso, o intervalo máximo de valores de convergência da variável x é maior no mapa cúbico do que no quadrático, que possui intervalo máximo contido em (0, 1), ou seja, pode-se dizer que a equação cúbica é mais caótica do que a quadrática por possuir um intervalo maior.

Além disso, comparando as figuras 8(a) e 8(b) pode ser observado que o aprimoramento dado pela senodificação do mapa logístico fez com que o intervalo máximo de convergência do valor de x seja aumentado, contendo agora valores negativos e expandindo o intervalo de (0, 1) para (-1, 1). Mais do que isso, o aprimoramento dado pela função seno faz com que os pontos fiquem bem distribuídos por todo esse novo intervalo, isto é, os pontos vermelhos da figura 8(b) preenchem praticamente todo o espaço da figura.



Figura 9: Diagramas de bifurcação da (a) equação logística aprimorada e (b) equação logística cúbica aprimorada; cada uma no intervalo do diagrama de bifurcação das suas respectivas originais.

O mapa logístico quadrático possui, em relação ao seu aprimoramento, um intervalo de parâmetro de crescimento menor. A figura 9(a) mostra o mapa quadrático aprimorado graficado no mesmo intervalo do original. Ela mostra que o mapa original possui um caos mais frágil, por assim dizer, já que no aprimorado o caos ocorre mais cedo (menor valor do parâmetro de crescimento). Também é interessante ver que no mapa senodificado há maiores períodos de ordem entre os de caos, evidenciado pela larga faixa com quase nenhum ponto da figura 9(a). Claro, também há períodos de ordem no mapa quadrático original, mas eles são muito menores, como visto nas pequenas faixas com quase nenhum ponto da Fig. 8(a). De

fato, os mesmos efeitos da senodificação para o mapa logístico cúbico podem ser concluídos quando observadas as figuras  $8(c) \in 8(d) \in 9(b)$ , mostrando a eficácia do aprimoramento em intensificar o caos de uma dada relação de recorrência.

Consegue-se comparar as senodificações entre si pela figura 9. Percebe-se dessa figura que ambos os diagramas de bifurcação são mais semelhantes entre si do que os diagramas originais da figura 8, ou seja, o aprimoramento pela função seno faz com que as caotizações de mapas diferentes fiquem com um comportamento parecido. Mas vale destacar que, assim como nos diagramas originais, o diagrama cúbico aprimorado fica caótico mais rapidamente que o quadrático. Dando um outro exemplo para ilustrar a eficiência do método, a Ref. [23] usa o expoente de Lyapunov (EL) para demonstrar o quão eficaz a senodificação é para modelar um sistema que se torna caótico rapidamente. Na figura 10 estão os expoentes obtidos usando a equação (6) dos mapas logísticos apresentados e de suas senodificações.



Figura 10: Comparação entre os expoentes de Lyapunov dos (a) mapas logístico (em azul) e logístico aprimorado (em vermelho) e (b) mapas logístico cúbico (em azul) e logístico cúbico aprimorado (em vermelho).

Os parâmetros  $A \in B$  foram definidos no intervalo (0, 1000), mas para obter-se uma comparação mais direta os LE's das senodificações foram graficados dividindo-se o parâmetro A por 250 e B por 333,33. Desta forma, estes parâmetros ficam no mesmo intervalo de a e

b, respectivamente.

Como é possível observar da Fig. 10 os LE's dos mapas aprimorados ficam positivos muito mais rapidamente do que dos mapas originais. De fato, quando os parâmetros aumentam de valor, os LE's ficam maiores ainda, provando que a "senodificação" aprimora a complexidade do caos dos mapas originais.

#### 4.2. Convecções atmosféricas

Lorenz na Ref. [25] usa os valores  $\sigma = 10$ , r = 28 e b = 8/3 na Eq. 11 para chegar na Figura 11(a), onde é possível ver um atrator no plano z-y. Um atrator é o ponto (ou pontos) no plano de convecção em torno do qual existe uma atração natural das diferentes curvas que são graficadas no plano a medida que o tempo de simulação evolui. A Figura 11(a) grafica a dispersão da temperatura entre-camadas (z(t), eixo das ordenadas), em função da diferença de temperatura entre as correntes de subida e descida (y(t), eixo das abscissas). Trata-se de uma imagem parecida às asas de uma borboleta. A exemplo da subseção anterior, o intuito aqui é, além de testar o nosso código com os resultados já existentes na literatura, poder fazer pequenas contribuições para a extensão natural dos resultados apresentados nos artigos estudados. A propósito, a Fig. 11 apresentada aqui foi obtida através de código feito próprio do autor e reproduz a Fig. 2 da Ref. [25].



Figura 11: (a) Atrator de Lorenz (efeito Borboleta) no plano z - y para os valores dos parâmetros  $\sigma = 10$ , r = 28 e b = 8/3. (b) Sistemas de Lorenz para as mesmas condições iniciais, porém para  $\sigma = 3$ . A condição inicial usada em ambas as partes, a) e b), foi o ponto (0; 1; 0).

De fato, é bem interessante que esse perfil de figura, asas de borboletas em planos de convecção, sejam assinaturas de caos no modelo de previsões meteorológicas que buscam ser mais e mais apuradas. Afinal, a figura deste artrópode é popularmente usada na divulgação de dinâmicas caóticas. Neste sentido, vale lembrar a indagação feita pelo próprio Lorenz no seu artigo [25]: "... um bater de asas de uma borboleta no Brasil faz surgir um tornado no Texas? ... ". O efeito borboleta, também chamado de dependência sensitiva das condições iniciais e/ou de parâmetros externos, é, como dito anteriormente, a noção de que pequeníssimas diferenças nas condições iniciais, ou nas condições externas, trazem uma grande diferença no comportamento do sistema após um certo tempo ter passado.

Por outro lado, a Figura 11(b) mostra, no mesmo plano de convecção da parte (a), a evolução do sistema de Lorenz com o mesmo ponto inicial, mas com  $\sigma = 3$ , r = 28 e b = 8/3. Nesse caso, o sistema não apresenta um efeito borboleta, sendo atraído para um único ponto (z,y) no plano, cujos valores são dados por aproximadamente z = 29 e y = 10. Este é um ponto de equilíbrio, pois permanece inalterado depois do sistema ter dissipado.

Ambas as Figs,11(a) e 11(b), mostram um atrator no plano de coordenadas, sendo que a (a) representa um atrator estranho (comportamento caótico) e a (b) representa um atrator de ponto fixo (comportamento estacionário). Portanto, a diferença entre as figuras pode ser vista como aspectos nas previsões meteorológicas.

O sistema de Lorenz é amplamente estudado e muitos físicos e matemáticos se empenham em encontrar novos atratores escondidos variando os três parâmetros vistos na Eq. (11). Como, por exemplo, a Ref. [29] encontra dois atratores caóticos coexistindo para os mesmos valores de parâmetros, formando uma imagem de uma borboleta quebrada no plano z - x. A figura 12 mostra essa imagem para os valores dos parâmetros  $\sigma = 0,12$ , r = 0 e b = -0,6. Enfatiza-se que essa também é uma figura obtida por código próprio que reproduz a Fig. 3(b) da Ref. [29].

Os dois atratores da figura 12, mesmo coexistindo, continuam tendo o comportamento de um atrator singular, isto é, trata-se de um sistema que evolui para um dos dois atratores e nunca revisita um mesmo estado, mas que sofre também a influência da dependência sensitiva das condições iniciais externas, ou seja, do efeito borboleta. Entretanto, um sistema com dadas condições iniciais tem uma órbita que converge somente para um dos dois atratores e nunca avança sobre sua contra-parte. Esses são exemplos de sistemas difusivos.



Figura 12: Atratores estranhos coexistindo. A depender das condições iniciais, o sistema faz órbitas diferentes, foi o usado o ponto inicial (-0,8; 3; 0) para o azul e (0,8; -3; 0) para a vermelha.

Inspirados pela complexidade desse sistema, outros autores tratam de montar novos sistemas de equações baseados em uma dinâmica não difusiva. Recentemente, vários trabalhos têm aparecido na literatura propondo pequenas variações nas Eqs.(11). Um exemplo é apresentado na Ref. [30], onde os autores apresentam um modelo de sistema que chamam de não-difusivo, ou seja, mais robusto e mais pré-disposto ao equilíbrio. Esta robustez se reflete no fato de o sistema apresentar mais pontos de equilíbrio do que aqueles encontrados originalmente por Lorenz. O leitor interessado poderá consultar a Ref. [30] para mais detalhes. É bom lembrar, outrossim, que nossos códigos podem ser adaptados aos sistemas não-difusivos, mas irão ficar de fora do escopo desta subseção por razões de brevidade. Continuemos a graficar e explorar as soluções da Eq. (11) tão somente.

Para concluir esta subseção e poder propor uma pequena contribuição aos trabalhos existentes na literatura, será encontrado um conjunto de valores para os parâmetros externos que fazem com que o sistema de Lorenz não seja caótico, ou seja, não apresente borboletas nos seus planos de convecção, convergindo para um ponto de equilíbrio. Para isso, será investigado, num primeiro momento, o diagrama de bifurcação x em função do parâmetro  $\sigma$ , mantendo os valores dos demais parâmetros de r e b iguais àqueles valores usados na Fig. 5(a), ou seja, r = 28 e b = 8/3. A Fig. 13 mostra o diagrama de bifurcação e indica que as bifurcações começam apresentar comportamento caótico no entorno de  $\sigma = 5,75$ . As linhas retas na figuram mostram que deverá existir um ponto de equilíbrio para os respectivos valores de  $\sigma$ .



Figura 13: Diagrama de bifurcação x vs.  $\sigma$  para ponto inicial (0, 1, 0) e parâmetros r = 28 e b = 8/3

É escolhido primeiramente o valor  $\sigma = 5$  como o parâmetro de análise, ou seja, um valor de  $\sigma$  que não provê caos e sim um ponto de equilíbrio em aproximadamente x = -8,48. A pergunta que se coloca é a seguinte: esse conjunto de parâmetros  $\sigma$ ,  $r \in b$  leva ao equilíbrio para qualquer valor para um conjunto de pontos iniciais  $(x_0, y_0, z_0)$ ? Para dar um passo nessa investigação, é plotada a Fig. 14 que mostra um gráfico x em função de uma coordenada inicial  $\lambda \equiv (\lambda, \lambda, \lambda)$  que é a variada dentro do intervalo mostrado na Fig. 14.



Figura 14: Gráfico de x vs  $\lambda$  para  $\sigma = 5$  r = 28 e b = 8/3, o ponto inicial é  $(\lambda, \lambda, \lambda)$ .

A figura 14 mostra que não há caos dentro do intervalo de pontos tomados, mas ela mostra que os pontos iniciais que convergem para somente dois estados finais (x = 8,4853 ou x = -8,4853). Porém, veja que o estado final, a partir de aproximadamente  $\lambda = 4,1$ , alterna entre  $\pm 8,4853$  para pequenas variações em  $\lambda$ . Este é um fenômeno bem interessante, pois evidencia uma certa dependência sensitiva das condições iniciais mesmo quando o resultado não é caótico, afinal, as pequenas mudanças na condição inicial fazem com que o sistema termine em um valor de x ou no outro. Resumindo, pequenas diferenças nas condições iniciais podem fazer o sistema convergir para apenas um de dois estados finais diferentes, sugerindo que há dois atratores de ponto fixo existindo simultaneamente no intervalo estudado.

Para averiguar a existência desses atratores, a figura 15 mostra o gráfico da evolução temporal das três coordenadas  $x,y \in z$  desse sistema com  $\sigma = 5$  r = 28 e b = 8/3 para três pontos iniciais diferentes:  $P_1=(3; 3; 3), P_2=(8,46; 8,46; 8,46) \in P_3=(9; 9; 9).$ 



Figura 15: Evolução do sistema de Lorenz com parâmetros  $\sigma = 5 r = 28 e b = 8/3$  para três pontos iniciais:  $P_1=(3; 3; 3)$  em azul,  $P_2=(8,46; 8,46; 8,46)$  em vermelho e  $P_3=(9; 9; 9)$  em verde.

A figura 15 expõe os dois atratores de ponto fixo coexistindo. Percebe-se que, tanto o ponto inicial  $P_1=(3; 3; 3)$  (em azul) quanto  $P_2=(8,46; 8,46; 8,46)$  (em vermelho), convergem para o mesmo estado final  $F_1=(-8,4853; -8,4853; 27)$ , mas suas evoluções são totalmente distintas. Já o ponto inicial  $P_3=(9; 9; 9)$  converge para o único outro estado final possível:  $F_2=(8,4853; 8,4853; 27)$ . Portanto, é possível concluir que o sistema não é caótico, mas é sensível às condições iniciais e sempre termina, no intervalo testado, em equilíbrio dentro de um desses dois possíveis atratores de ponto fixo, tendo evoluções temporais diferentes.

Logo, é possível concluir que, para  $\sigma$  abaixo de 5,75, uma instituição meteorológica consegue reduzir as possibilidades do clima a longo prazo para somente dois estados. Entretanto, será bem difícil, talvez impossível, essa instituição conseguir fazer um previsão certeira, acertando exatamente qual desses dois estados realmente acontecerá para condições iniciais de  $\lambda > 4,1$ , pois, mesmo com instrumentos altamente precisos, a convergência para um ponto fixo específico é muito sensível às condições iniciais.

Também é possível fazer uma comparação entre a figura 5 e a figura 15. Em primeira vista, elas se assemelham muito, porém é fácil ver que no atrator de Lorenz não há um ponto fixo como na figura 15. De fato, como dito na análise da figura 11, o atrator de Lorenz é classificado como um atrator estranho e não irá convergir para um ponto fixo. Se a instituição meteorológica que quis predizer o clima dado na figura 15 quisesse prever o clima a longo prazo da figura 5, ela teria menos sorte. No atrator de Lorenz não há nenhum ponto fixo para reduzir as possibilidades e ainda apresenta o efeito borboleta, deixando impossível prever o futuro do sistema se não ser conhecido com precisão infinita as suas condições iniciais.

### 4.3. O pêndulo amortecido restaurativo forçado

Na subseção anterior foi explorada a análise do caos por meio do plot das suas coordenadas dinâmicas. Agora, nesta seção, será explorado o método de análise através do espaço de fase e das seções de Poincaré.

Inspirado pelo estudo do pêndulo amortecido forçado (PAF) feito na Ref. [17], analisaremos esse sistema físico. O PAF é, basicamente, o PARF sem o torque restaurativo, portanto a sua equação é a Eq. (16) com  $\kappa = 0$ . Nas próximas 3 subseções será analisado, em cada uma, os casos para  $\kappa = 0$ ,  $\kappa = 0,1$  e  $\kappa = 0,3$ . A análise será feita resolvendo a Eq. (16) numericamente e assim plotar os espaços de fases da variável e seções de Poincaré da variável x para casos de F = 0,4, F = 0,6 e F = 0,9. Nas 3 subseções a seguir foram mantidos fixos os valores de c = 0,05 e  $\omega = 0,7$ , assim como os valores das condições iniciais  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  e  $\dot{x}_0 = 0$ . As seções de Poincaré têm cada ponto plotado após um período adimensional de  $T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 8,97598$  para graficar no mapa. Vale ressaltar que as figuras das próximas 3 subseções foram obtidas através de código próprio do autor.

## 4.3.1. Análise para $\kappa = 0$

A Fig. 16 mostra os espaços de fase e as seções de Poincaré para  $\kappa = 0$  e reproduz alguns dos gráficos da figura 4.19 da Ref. [17].

Na figura 16(a) tem-se o espaço de fase de F = 0,4. É possível perceber que o sistema faz um caminho fechado no espaço de fase. Com isso, conclui-se que o pêndulo faz um movimen-



Figura 16: Espaços de fase (coluna esquerda) e seções de Poincaré (coluna direita) do PAF, i.e.  $\kappa = 0$ , para F = 0, 4, F = 0, 6 e F = 0, 9.

to oscilatório entre dois pontos de retorno e não ultrapassa a sua velocidade máxima, dada quando x = 0. O sistema com essas condições claramente é não caótico. Em especial, a imagem elíptica do seu espaço de fase traz a conclusão de que ele possui um comportamento semelhante a de um pêndulo simples.

Para a figura 16(e) tem-se F = 0.9 e mostra que o pêndulo faz um movimento mais complexo, chegando a fazer ângulos obtusos. Embora este seja um movimento mais complexo, ele não é caótico, pois há uma quantidade bem definida de estados que o sistema pode ter, deixando seu futuro bem definido.

A figura 16(c) mostra o espaço de fase para F = 0.6. O sistema não parece oscilar aparentando estar livre para ter a velocidade e ângulo que quiser. De fato, o que mais chama atenção nessa figura aparentemente caótica é a quantidade enorme de possíveis estados em que o sistema pode estar, porém é muito cheia de informação para ter algum uso. Para obter uma conclusão mais concreta sobre o movimento do pêndulo nesse caso, é preciso graficar a sua seção de Poincaré.

As figuras 16(b) e 16(f) são seções de Poincaré para F = 0,4 e 0,9, respectivamente. No primeiro somente um ponto aparece, enquanto no segundo, dois. Isso significa que em ambos o pêndulo possui um movimento periódico e o valor do período é proporcional ao número de pontos no mapa, isto é,  $T_{F_{0,4}} = T$  e  $T_{F_{0,9}} = 2T$ . Veja que a seção de Poincaré consegue informar com bastante clareza o período de ambos sistemas e até simplificar a análise do sistema com F = 0,9. De fato, os sistemas nessas condições estão longe de serem caóticos.

Já a seção de Poincaré da figura 16(c) revela uma estrutura bem inusitada, mas esperada. De fato, como o sistema nesse estado é caótico e, portanto, possui um movimento que nunca repete sobre si mesmo, a seção de Poincaré, então, deve conter infinitos pontos. Essa quantidade imensa de pontos no gráfico dá a certeza de que não há alguma periodicidade no sistema para esses parâmetros. Pelo contrário, na realidade o pêndulo faz um movimento muito complexo parecendo ser aleatório. Na realidade, os pontos representados na figura 16(c) compõem apenas um subconjunto dos infinitos pontos da órbita, cuja curva em realidade é um fractal.

#### 4.3.2. Análise para $\kappa = 0,1$

Agora será feita a análise da dinâmica do PARF sob uma leve influência do torque restaurador. Para isso, foi escolhido  $\kappa = 0,1$ . A figura 17 ilustra os espaços de fase e seções de Poincaré.

Comparando a figura 16 com a 17, é possível ver que não há alteração no comportamento quando F = 0,4. Porém a adição do torque restaurativo muda drasticamente as dinâmicas para F = 0,6 e F = 0,9. De fato, no lugar do antigo espaço de fase caótico para F = 0,6, agora aparece na Fig. 17(c) um caminho surpreendentemente elegante e simples. Com os três pontos que aparecem na seção de Poincaré da Fig. 17(d) é possível concluir que o período é triplicado, *i.e.*  $T_{F_{09}} = 3T$ . Esta reordem que a adição do torque restaurador proporciona evidencia que ele tem um grande impacto no sistema mesmo para valores de  $\kappa$ menores que os de F.

A expectativa do efeito do torque restaurativo é fazer com que o sistema tenda a fazer um comportamento oscilatório. Contudo, a Fig. 17(e) evidencia que não é uma relação tão



Figura 17: Espaços de fase (coluna esquerda) e seções de Poincaré (coluna direita) para  $\kappa = 0,1.$ 

simples assim. O caos que agora aparece para F = 0, 9 contrasta com o movimento periódico encontrado sem a presença do torque da mola, ou seja, a força restauradora teve o papel de criar caos num sistema que não tinha. Este curioso resultado é endossado pela Fig. 17(f), que mostra uma seção de Poincaré com uma quantidade imensa de pontos, indicando que o movimento nunca se repete.

### 4.3.3. Análise para $\kappa = 0,3$

Gráficos do espaço de fase para  $\kappa \ge 0.4$  com os valores de  $F, c \in \omega$  propostos pela Ref. [17] resultam todos em órbitas elípticas, indicando um movimento oscilatório harmônico do pêndulo. Esse resultado é bastante intuitivo, afinal, quanto maior a rigidez da mola em comparação aos outros parâmetros, mais o sistema tende a fazer o movimento induzido por ela. Por essa razão, esta última análise será feita para  $\kappa = 0, 3$ , que ainda traz alguns resultados que merecem ser comentados. Dada esta explicação, a figura 18 ilustra os espaços de fase e seções de Poincaré para os mesmos valores de  $c, \omega$  e condições iniciais anteriores.



Figura 18: Espaços de fase (coluna esquerda) e seções de Poincaré (coluna direita) para  $\kappa=0,3$ 

A Fig. 18(e) mostra que o PARF para F = 0,9 retorna a ser periódico como era no PAF, descrevendo uma órbita não muito complexa no espaço de fase, mas diferente da feita no PAF. Além disso, comparando as Figs. 16(f) e 18(f) é possível notar pela quantidade de pontos na seção de Poincaré que o período do movimento é o triplo de T, ao invés do dobro como era antes.

Por fim, a figura 18 evidencia que todos os movimentos são periódicos para os valores de F estudados. De fato, assim como os valores de F = 0.4 e 0.6, os valores F = 0.5; 0.7 e

0,8 também analisados pela Ref. [17] e aqui não mostrados também descrevem uma órbita elíptica no espaço de fases. Isso reforça a intuição de que quanto maior o valor de  $\kappa$  em comparação aos outros parâmetros, mais o sistema tende a fazer o movimento induzido por ela.

#### 4.4. Caos Quântico-Relativístico

Agora voltaremos a discutir o modelo caótico proposto na seção 3.4 para os elétrons de Dirac encontrados no grafeno. A Ref. [14] lida com as 3 regiões mostradas na Fig. 7 e chega em resultados muitíssimos interessantes para o avanço dos estudos do caos nas físicas mais modernas. Vale ressaltar que, para os resultados obtidos nesta seção, foram usados valores também usados pela Ref. [14]:  $\nu^{I} = \eta^{I} = 0$ ,  $\nu^{II} = -\mu$ ,  $\nu^{III} = -4\mu$  e  $\eta^{II} = \eta^{III} = \mu$ .

Por causa da manifestação quântica atrelada aos spins, há dois tipos diferentes de dinâmica clássica para o *spin-up* e o *spin-down* do elétron, como ilustrado na figura 19. Por exemplo, em um sistema com um dado  $R_1 \in R_2$ , a média de tempo,  $\tau$ , dos elétrons de *spin-down* dentro da cavidade, regiões II e III, pode ser muito longo (faixas amarelas na Fig. 19(a) e picos em 19(b)), devido à formação de órbitas periódicas estáveis para certos valores de  $\xi$  e energia E. Para elétrons *spin-up*, por causa do caos, não existem órbitas periódicas estáveis, e  $\tau$  é inferior em duas ordens de magnitude.

È possível explicar esse fenômeno fazendo uma analogia relacionando o feixe de elétrons com os raios de luz na óptica clássica. Para isso, primeiramente é necessário calcular os índices de refração das três regiões. Para um dado elétron de energia  $E = \hbar v_f \rho$ , usando as equações (17) e (18) chega-se na seguinte equação:

$$n_s^j = \frac{\rho - \beta^j + \alpha^j s}{\rho}$$

onde  $\alpha^{j} = \frac{\eta^{j}}{\hbar v_{f}}, \ \beta^{j} = \frac{\nu^{j}}{\hbar v_{f}}$  e lembrando que  $\nu^{I} = \eta^{I} = 0, \ \nu^{II} = -\mu, \ \nu^{III} = -4\mu$  e  $\eta^{II} = \eta^{III} = \mu$ . Agora, fazendo a análise para o caso específico de  $\rho = \frac{\mu}{\hbar v_{f}}$  (i.e.  $E = \mu$ ), é possível obter os seguintes índices de refração para cada região:

$$n_s^I = 1, \qquad n_s^{II} = 2 + s \qquad e \qquad n_s^{III} = 5 + s.$$
 (19)

Veja que somente os índices de refração regiões II e III, as que estão sob influência do campo magnético, são os que dependem do número de s. Com esses valores é possível chegar



Figura 19: Os spin-up e spin-down dos elétrons manifestam diferentes comportamentos clássicos para o sistema na figura 7(a). (a) O tempo médio  $\tau$  (amarelo alto, azul baixo), em escala logarítmica, que os elétrons passam no sistema varia com a distância  $\xi$  e a energia E, ambas dadas em quantidades adimensionais. (b) O tempo médio em quantidades adimensionais, considerando  $\xi = 0,2$ , ao longo do linha branca tracejada que aparece em (a). Os elétrons spin-down podem formar órbitas periódicas, que levam a picos em  $\tau$ . Para elétrons spin-up, por causa do caos, não existem órbitas periódicas estáveis, por isso  $\tau$  é menor. Adaptada da Ref. [21].

nos índices de refração em cada região para cada spin. Finalmente, para o valor de energia proposto, os valores dos índices de refração para cada spin são:  $n^{I} = 1$  para ambos;  $n_{+}^{II} = 3$  e  $n_{+}^{III} = 6$  para os elétrons de *spin-up*;  $n_{-}^{II} = 1$  e  $n_{-}^{III} = 4$  para os de *spin-down*. A figura 20 mostra a dinâmica do feixe de elétrons tanto para *spin-up* (em vermelho), quanto para *spin-down* (em azul).

Como  $n_{+}^{III} > n_{+}^{II}$ , o elétron de *spin-up* poderá sofrer reflexão interna total quando tenta sair da região III para a II e o ângulo crítico é  $\varphi_{+} = \arcsin(n_{+}^{II}/n_{+}^{III}) = 30^{\circ}$ . Além disso, como  $n_{+}^{II} > n^{I}$ , o *spin-up* também pode sofrer reflexão interna total a depender do ângulo com que ele tenta sair da região II para a I. Essa dependência do ângulo e o contorno circular das regiões acarretam numa dinâmica caótica para os elétrons de *spin-up*. Já o elétron de *spin-down*, como  $n_{-}^{II} = n^{I}$ , passa pela fronteira das regiões I e II sem desviar e sem risco de sofrer reflexão interna total, porém, como  $n_{-}^{III} > n_{-}^{II}$ , ele pode sofrer reflexão interna total ao tentar sair da região II para a III e o seu ângulo crítico é  $\varphi_{-} = \arcsin(n_{-}^{II}/n_{-}^{III}) = 14,48^{\circ}$ . Por  $\varphi_{-}$  não ser muito grande e pelo contorno circular da fronteira entre regiões, o *spin-down* não consegue sair da região III com facilidade, sendo quase sempre refletido para dentro da região III quando tenta escapar, podendo formar uma órbita periódica ali dentro.



Figura 20: (a) Dinâmica do raio de elétrons de *spin-up* (em vermelho) e *spin-down* (em azul) para  $\xi = \overline{OO'}$  e  $E = \mu$ . Os de *spin-up* fazem um trajeto caótico, já os de *spin-down* fazem uma órbita estável periódica confinados na região III. (b) e (c) Densidades de probabilidade (amarelo alta, azul baixa) para  $\xi = 0,27$ , em escala logarítmica, dos elétrons de *spin-up* e *spin-down*, respectivamente. Como é possível ver, os elétrons de *spin-up* refletem e refratam livremente pelas regões do grafeno, já os de *sspin-down* só possuem grande probabilidade de ser encontrados dentro da região III. Adaptada da Ref. [14].

Aqui, foi apresentado um fenômeno interessantíssimo: os espalhamentos regulares e caóticos coexistentes e dependentes do spin. Esse fenômeno é contra-intuitivo na perspectiva

do caos quântico não relativístico, pois partículas quânticas não relativísticas não podem penetrar uma barreira potencial com probabilidade 1, como os elétrons do grafeno fazem. Esse fenômeno único na mecânica quântica relativística é possível por causa da relação de dispersão linear, aqui dada pela Eq. 17, que pode permitir a penetração desimpedida dessas partículas pela barreira de potencial. Esse fenômeno é chamado de tunelamento de Klein [21].

## 5. CONCLUSÃO

A teoria do caos é bem recente na história da física. Nas últimas décadas vem-se descobrindo mais e mais novos sistemas caóticos em muitas áreas da física que precisam ser estudados. Este trabalho mostra ao leitor as principais ferramentas usadas para estudar o comportamento de tais sistemas e como elas são usadas para extrair informações preciosas para ser possível a interpretação física desses sistemas complexos. Além disso, foi revisto e acrescentado uma contribuição aos modelos de bastante conhecimento e renome na teoria do caos.

Vê-se que o diagrama de bifurcação é muito usado quando é necessário encontrar os intervalos dos valores de parâmetros para os quais o sistema é caótico e os intervalos em que o sistema é periódico. Assim, o leitor saberá o que esperar do sistema para esses parâmetros. Através deste diagrama, foi possível comprovar a tese da Ref. [23] de que a equação (10) faz com que equações de recorrência apresentem caos mais rapidamente e por um intervalo maior de parâmetro de controle, podendo servir de modelo para sistemas que exigem estas características. Para esta análise também foi usado o expoente de Lyapunov, que comparou o efeito da sensitividade das condições iniciais antes e depois da senodificação, e concluiu-se que ao aplicar a equação (10) o sistema fica mais sensível às condições iniciais durante todo o intervalo do parâmetro de controle. E também foi comprovado que a senodificação aprimora também o caos do mapa logístico cúbico, acrescentando mais um teste à Ref. [23].

O poder do diagrama de bifurcação também foi percebido ao identificar para quais valores de  $\sigma$  o sistema de Lorenz resultaria em um atrator estranho ou de ponto fixo. Com o diagrama, este trabalho conseguiu identificar valores de  $\sigma$  que fazem com que o sistema de Lorenz dissipe em um atrator de ponto fixo e, em contraste com o trabalho feito na Ref. [29], foi encontrado um valor de  $\sigma$  para dois atratores de ponto fixo coexistentes, indicando que, para este valor, o futuro da convecção atmosférica é mais previsível do que os valores de Lorenz. Atratores estranhos também foram um grande instrumento para encontrar caos no PARF através da seções de Poincaré, podendo-se extrair mais informações do que somente pela análise do espaço de fases.

O PARF provou-se ser um sistema bem interessante e educativo na introdução a sistemas caóticos. Para pequenos valores de  $\kappa$  em relação aos demais parâmetros, o sistema se comporta de maneira inesperada (o que é esperado do caos), deixando periódico o que antes era caótico e fazendo caótico o que anteriormente era periódico.

Por fim, foi visto o estado atual do estudo do caos nos elétrons caóticos do grafeno e seu tunelamento de Klein. A teoria do caos, como visto na quantidade de exemplos diferentes dada neste trabalho, é muito abrangente e mais descobertas e ideias que podem ser mais aprofundadas, como o PARF, vêm surgindo de todas as áreas da ciência e da matemática. Porém, pode-se concluir que a comunidade científica está pronta para encaixar as peças desse quebra-cabeça complexo com o arsenal sempre refinado de técnicas e modelos que a nós estão dispostos.

#### Referências

- E. Ioana, "Chaos theory, a modern approach of nonlinear dynamic systems," Romanian Journal of Information Technology and Automatic Control, v. 28, n. 4, pp. 89–96, 2018.
- [2] J. R. Taylor, *Mecânica Clássica*. Bookman Editora, 2013.
- [3] H. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, v. 2. Gauthier-Villars, 1893.
- [4] J. Hadamard, "Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques," Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, v. 4, pp. 27–74, 1898.
- [5] P. Duhem, Ziel und Struktur der physikalischen Theorien. Leipzig, 1908.
- [6] R. M. May, "Simple Mathematical Models with very complicated dynamics," *Nature*, v. 261(10), n. 10, 1976.
- [7] E. N. Lorenz, *The Essence Of Chaos.* Taylor & Francis, 1995.
- [8] R. Brown e L. O. Chua, "Clarifying chaos: Examples and counterexamples," International Journal of Bifurcation and Chaos, v. 6, n. 02, pp. 219–249, 1996.

- [9] N. C. Leigh e S. Wegsman, "Illustrating chaos: a schematic discretization of the general threebody problem in Newtonian gravity," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 476, n. 1, pp. 336–343, 2018.
- [10] N. C. Leigh, N. C. Stone, A. M. Geller et al., "The chaotic four-body problem in Newtonian gravity-I. Identical point-particles," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 463, n. 3, pp. 3311-3325, 2016.
- [11] V. G. Gurzadyan, "Chaotic Phenomena in Astrophysics and Cosmology," em AIP Conference Proceedings, American Institute of Physics, vol. 668, 2003, pp. 108–124.
- [12] S. Jafari, J. C. Sprott e F. Nazarimehr, "Recent new examples of hidden attractors," The European Physical Journal Special Topics, v. 224, n. 8, pp. 1469–1476, 2015.
- K. Wittmann, E. Castro, A. Foerster e L. F. Santos, "Interacting bosons in a triple well: Preface of many-body quantum chaos," *Physical Review E*, v. 105, n. 3, p. 034 204, 2022.
- [14] H. Y. Xu, G. L. Wang, L. Huang e Y. C. Lai, "Chaos in Dirac electron optics: Emergence of a relativistic quantum chimera," *Physical Review Letters*, v. 120, n. 12, p. 124101, 2018.
- [15] H. Y. Xu e Y. C. Lai, "Pseudospin-1 wave scattering that defies chaos Q-spoiling and Klein tunneling," *Physical Review B*, v. 99, n. 23, p. 235 403, 2019.
- [16] W. Śmiechowicz, T. Loup e P. Olejnik, "Lyapunov exponents of early stage dynamics of parametric mutations of a rigid pendulum with harmonic excitation," *Mathematical and Computational Applications*, v. 24, n. 4, p. 90, 2019.
- [17] S. T. Thornton e J. B. Marion, Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas, 1<sup>a</sup> ed. Cengage Learning, 2011.
- [18] C. E. Villegas e M. R. S. Tavares, "Espectro de Partículas Independentes em Fios Quânticos Baseados em Grafeno," diss. de mestr., Universidade Federal do ABC, 2009, p. 68.
- [19] L. Huang, H.-Y. Xu, C. Grebogi e Y.-C. Lai, "Relativistic quantum chaos," *Physics Reports*, v. 753, pp. 1–128, 2018.
- [20] F. Bloch, "Quantum mechanics of electrons in crystal lattices," Z. Phys, v. 52, pp. 555–600, 1928.
- [21] H. Y. Xu, L. Huang e Y. C. Lai, "Relativistic quantum chaos in graphene," *Physics Today*, v. 74, pp. 44–49, 2021.
- [22] P. E. Allain e J. N. Fuchs, "Klein tunneling in graphene: optics with massless electrons," *The European Physical Journal B*, v. 83, n. 3, pp. 301–317, 2011.

- [23] Z. Hua, B. Zhou e Y. Zhou, "Sine chaotification model for enhancing chaos and its hardware implementation," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 66, n. 2, pp. 1273–1284, 2018.
- [24] Y. Li, X. He e D. Xia, "A Chaotification model based on sine and cosecant functions for enhancing chaos," *Modern Physics Letters B*, v. 35, n. 36, p. 2150258, 2021.
- [25] E. N. Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow," Journal of atmospheric sciences, v. 20, n. 2, pp. 130–141, 1963.
- [26] B. Saltzman, "Finite amplitude free convection as an initial value problem—I," Journal of atmospheric sciences, v. 19, n. 4, pp. 329–341, 1962.
- [27] L. S. Liebovitch e L. A. Shehadeh, "Introduction to fractals," *Tutrorials in contemporary nonlinear methods*, v. 24, p. 178, 2003.
- [28] J. Cserti, A. Pályi e C. Péterfalvi, "Caustics due to a negative refractive index in circular graphene p-n junctions," *Physical Review Letters*, v. 99, n. 24, p. 246 801, 2007.
- [29] C. Li e J. C. Sprott, "Multistability in the Lorenz system: a broken butterfly," International Journal of Bifurcation and Chaos, v. 24, n. 10, p. 1450131, 2014.
- [30] S. Cang, Y. Li, R. Zhang e Z. Wang, "Hidden and self-excited coexisting attractors in a Lorenz-like system with two equilibrium points," *Nonlinear Dynamics*, v. 95, n. 1, pp. 381– 390, 2019.