

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

CCNH - Centro de Ciências Naturais e Humanas

Trabalho de Conclusão de Curso em Física

UM ESTUDO ANALÍTICO DAS PERTURBAÇÕES DO POTENCIAL GRAVITACIONAL E DA PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOLAR EM ÓRBITAS AO REDOR DA TERRA

Carlos Alberto da Silva Junior^{1,2}

¹*Centro de Ciências Naturais e Humanas,*

Universidade Federal do ABC, Santo André-SP, Brasil

²*Orientadora: Dra. Claudia Celeste Celestino de Paula Santos*

GLOSSÁRIO

SÍMBOLOS

$I[\]$: Funcional

$S[t]$: Funcional Ação

\mathcal{L} : Função Lagrangiana

q_i : Coordenadas Generalizadas

\dot{q}_i : Velocidades Generalizadas

\mathbf{r} : Vetor Posição

$\dot{\mathbf{r}}$: Vetor Velocidade

$U(r)$: Energia Potencial

$V_{eff}(r)$: Potencial Efetivo

p_i : Momentos conjugados

\mathcal{H} : Hamiltoniana

T : Energia Cinética

J_i : Variáveis de Ação

\mathcal{R} : Função Perturbadora

Q_r : Coeficiente de pressão de radiação solar

S : Fluxo solar

G : Constante de gravitação universal

M_{\oplus} : Massa da Terra

c : Velocidade da luz no vácuo

ρ_p : densidade da partícula

s : raio da partícula

a : Semieixo maior

F_r : Módulo da força de radiação solar

\mathbf{F}_r : Força de radiação solar

F_g : Força gravitacional

$\hat{\mathbf{S}}$: Versor radial apontando do Sol ao centro da Terra

n : Movimento médio da partícula

\mathcal{R}_r : Função perturbadora de radiação solar

λ_s : Longitude do Sol

ε : Ângulo entre o plano orbital e o plano equatorial

r : Distância planetocêntrica

Ω : Longitude do nodo ascendente

i : Inclinação orbital em relação ao plano equatorial

ω : Argumento do pericentro

f : Anomalia verdadeira

M : Anomalia média

\mathcal{R}_r : Função perturbadora de radiação solar média

P_{nm} : Polinômios associados de Legendre

J_{nm}, λ_{nm} : Coeficientes característicos do polinômio de Legendre

\bar{h}, \bar{k} : Par de coordenadas não singulares

μ : Constante gravitacional geocêntrica

LISTA DE FIGURAS

1	Espaço de fases para partícula de $20\mu m$. Elaboração própria, 2022.	32
2	Espaço de fases para partícula na altitude de $16.000km$, aos arredores da bifurcação. Elaboração própria, 2022.	34
3	Espaço de fases para partícula na altitude de $16.000km$. Elaboração própria, 2022. .	35

Resumo: O volume crescente de satélites artificiais na órbita terrestre vem tornando a dinâmica orbital um assunto cada vez mais precioso no campo do conhecimento científico. Utilizando das ferramentas da mecânica de Hamilton-Jacobi e a teoria da perturbação foi feito um estudo analítico da influência das perturbações do achatamento terrestre e da pressão de radiação solar no espaço de fases de uma partícula orbitando a Terra. Para tanto, foi feito o desenvolvimento da teoria da mecânica analítica de Lagrange, apresentando-se a discussão teórica até a teoria de Hamilton-Jacobi, seguida do desenvolvimento da teoria de perturbação e a modelagem do sistema dinâmico analisado. A partir do hamiltoniano obtido foi apresentado e analisado os espaços de fase dos efeitos perturbativos nas condições de variação da região orbital do sistema, seguida da análise do espaço de fases do sistema variando-se o raio da partícula orbitando a Terra, que podem sugerir um efeito ressonante entre o movimento médio do objeto de estudo e o movimento médio do Sol.

Palavras-Chave: Satélites Artificiais. Dinâmica Orbital. Teoria de Perturbação. Espaço de Fases.

Abstract: The increasing volume of artificial satellites orbiting the Earth have been making the orbital dynamics a subject even more precious in modern engineering. Using Hamilton-Jacobi classical mechanics formulation and the perturbation theory it was made a analytical analysis of the solar radiation pressure and Earth oblateness perturbation in a Earth-orbiting particle. To achieve that this work has shown a theoretical discussion starting from Lagrange's analytical mechanics up until Hamilton-Jacobi theory, followed by the development of the perturbation theory and then modelling the dynamical system of interest. Using the hamiltonian function it has plotted the system phase state representing the perturbation problem in different orbital regions, followed by a second analyses considering several particle dimensions in a single altitude. The results has shown a potential resonant pattern in the phase space related with system parameters in both analyses.

Keywords: Artificial Satellites. Orbital Dynamics. Perturbation Theory. Phase Space.

SUMÁRIO

Glossário	2
Glossário	2
Símbolos	2
Símbolos	2
Lista de Figuras	4
1. Introdução	8
2. Fundamentação Teórica	9
2.1. Mecânica Analítica	9
2.2. Uma introdução ao Cálculo Variacional e a equação de Euler-Lagrange	10
2.3. Mecânica Lagrangiana	12
2.3.1. O Problema de Dois Corpos no viés da Mecânica Lagrangiana	13
2.4. Mecânica Hamiltoniana	14
2.4.1. A Função Hamiltoniana	16
2.4.2. Transformações Canônicas e Funções Geradoras	17
2.4.3. Transformação Canônica Aplicada ao Problema da Partícula Livre Unidimensional	19
2.5. Equação de Hamilton-Jacobi e as Variáveis de Ângulo e Ação	21
2.5.1. Variáveis de Ângulo e Ação	23
2.6. Hamiltoniana de Kepler: Variáveis de Ângulo e Ação	24
2.7. Teoria de Perturbação	25
2.7.1. Perturbações Gerais na formulação Hamiltoniana	26
3. Influência da Perturbação na Dinâmica do movimento orbital de uma partícula	26
3.1. Perturbação por Pressão de Radiação e do Potencial Gravitacional	27
3.1.1. Função Perturbadora: Pressão de Radiação Solar	27
3.1.2. Função Perturbadora: Achatamento Terrestre	28
3.2. Perturbação Total	29
4. Resultados	30

4.1. Partícula de $20\mu m$	31
4.2. Partícula na altitude de $16.000km$	32
5. Conclusões	34
Referências	37

1. INTRODUÇÃO

Desde o início da corrida espacial entre os Estados Unidos e a extinta União Soviética no final da década de 50, a sociedade vem encarando um exponencial crescimento do desenvolvimento tecnológico de satélites, possibilitando uma quebra de paradigmas em quase todas as esferas da sociedade.

As etapas que constituem todo o ciclo de vida de satélites são processos que requerem altos custos nos processos produtivos, requerendo um alto investimento em aparatos tecnológicos da estrutura do veículo lançador, sistemas energéticos, sistemas de navegação e sistema de controle. Além disso, os lançamentos de satélites são, também, uma etapa de elevados custos, garantir a permanência dos satélites em sua órbita alvo é um fator que requer alto grau de confiabilidade.

A manutenção da órbita de satélites se dá como necessária, pois, após a inserção desses equipamentos fora da atmosfera, diversos fatores adversos podem gerar perturbações que potencialmente os afastem de suas missões. Um entendimento das perturbações clássicas como, por exemplo, do potencial gravitacional terrestre e da pressão de radiação solar podem representar uma possível redução em futuros custos com combustíveis e atuadores nestes veículos espaciais.

A mecânica clássica como formulada por Newton apresenta simplicidade e um alto grau de generalidade para a abordagem de sistemas com múltiplas partículas, sendo estes alguns dos motivos para que seu uso seja difundido e aplicado em todas as áreas de engenharia [1]. A teoria newtoniana também apresenta bom grau de precisão para a maioria das aplicações na mecânica celeste, entretanto, essa formulação da mecânica apresenta uma notória perda de conveniência em uma série de aplicações. A teoria newtoniana aplicada em três dimensões consiste na resolução de três equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, que apresentam simplicidade na resolução em coordenadas cartesianas, dada a própria construção da teoria [1], entretanto, nem sempre é interessante uma abordagem por meio de coordenadas cartesianas e, nestes casos, a resolução das equações de Newton podem se tornar extremamente complicada [2]. Em coordenadas curvilíneas genéricas, cada uma das três equações diferenciais são acompanhadas por símbolos de Christoffel que introduzem uma grande complicação para a resolução dessas [3].

Além desse fato, a utilização da mecânica vetorial de Newton apresenta complicações relacionadas a inserção de efeitos relativísticos à mecânica celeste e mostra uma grande dificuldade na implementação de teorias de perturbação aos modelos, isso faz com que estudos numéricos desses efeitos sejam requisitos indispensáveis para a abordagem [4]. A mecânica analítica como instrumento de pesquisa para a mecânica celeste vem como uma ação para contorno deste problema

[3].

Desta forma, neste trabalho, foram utilizadas as ferramentas da mecânica analítica e a teoria de perturbação aplicada ao problema de dois corpos sob a influência das perturbações de pressão de radiação solar e o achatamento terrestre, com o fim de analisar a influência destas ao modelo de órbita. Para tanto, algumas referências puderam ser utilizadas como base, entre elas, pode-se citar [5] e [6] que apresentam estudos da influência de interações destas perturbações em partículas ejetadas dos satélites naturais Phobos e Deimos. A referência [7], em que apresenta um estudo considerando os efeitos devido às perturbações da pressão de radiação solar e do potencial gravitacional terrestres, onde o comportamento da excentricidade pode ser analisado a partir de fatores como tamanho da partícula e da região orbital. Posteriormente, foram analisadas as dependências com a massa do corpo central, tamanho da partícula, dentre outros e o espaço de fases de hipotéticos sistemas dinâmicos.

Para tanto, o trabalho seguirá da seguinte forma: Em §2 será apresentada a fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento do trabalho, em §3 a apresentação dos modelos criados para a análise, na sequência §4 sucede com a discussão dos resultados e, por fim, em §5 apresenta a conclusão deste trabalho.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção é apresentada uma breve introdução à mecânica analítica, abordando-se das as equação de Euler-Lagrange, até a equação de Hamilton-Jacobi, obtendo-se a hamiltoniana de Kepler nas variáveis de ângulo e ação. Por fim, é apresentada uma abordagem de teor introdutório à teoria de perturbação hamiltoniana, fornecendo os recursos matemáticos para o desenvolvimento do estudo.

2.1. Mecânica Analítica

A mecânica newtoniana apresenta sua formulação baseada em vetores e como a intensidade, direção e sentido destes vetores atuam nas partículas individualmente, enquanto a mecânica analítica apresenta uma formulação de modo escalar de propriedades da matéria, como energia cinética e potencial, de forma que a dinâmica seja estudada no contexto de sistema, simplificando significativamente os cálculos [8].

Uma das grandes vantagens das teorias analíticas da mecânica são que estes escalares analisados

representam propriedades dos sistemas [2], o que faz com que sejam invariantes sobre mudança de coordenadas, estas propriedades dos sistemas são as energias. Na mecânica analítica as equações do movimento são derivadas da aplicação do princípio variacional sobre estes escalares. O cálculo variacional é um campo da matemática que, em resumo, utiliza-se de variações em funções para se obter máximos e mínimos dos chamados funcionais, estes variacionais, em algumas de suas representações podem ser expressos como integrais definidas envolvendo funções e derivadas destas funções. [1]

O cálculo variacional é o campo matemático que baseia as vastas e bem conhecidas teorias de conservação da física, que estiveram presentes na história da ciência. Também serviu de ferramenta matemática para que fosse possível, através de um princípio macro, se verificar a noção já conhecida de que a natureza minimiza determinadas quantidades físicas durante a atuação dos processos físicos.

A primeira visualização de um fenômeno físico como este se deu na Grécia antiga, onde o matemático Heron, ao estudar a reflexão de espelhos, relatou que a forma com que as reflexões ocorriam eram devido ao princípio de caminho mínimo [9]. Este fenômeno como uma efeméride científica ocorreu apenas em 1662, onde o matemático francês Pierre de Fermat postulou que os raios de luz sempre viajam de um ponto A a um ponto B sobre um meio pelo caminho que requeresse o menor tempo possível. O ponto mais relevante a respeito disso é que, da mesma forma que o teorema da conservação de energia, o princípio de Fermat pode ser obtido utilizando a aplicação do princípio variacional. O mesmo acontece também com a mecânica analítica [8].

2.2. Uma introdução ao Cálculo Variacional e a equação de Euler-Lagrange

Conforme dito em §2.1, as equações da mecânica analítica podem ser obtidas através da aplicação do princípio variacional. Nesta seção apresenta-se sucinta uma abordagem ao princípio do cálculo variacional no contexto da mecânica analítica, obtendo-se a chamada equação de Euler-Lagrange, responsável pela evolução de um sistema físico no tempo na mecânica lagrangiana. [3]

Definindo o funcional $I[f]$, sendo f uma função [10],

$$I[f] = \int_{x_1}^{x_2} F \left(f, \frac{df}{dx} \right) dx \quad (1)$$

Assim, calcula-se uma variação da função da forma que $f \rightarrow f + \delta f$, com a consideração por

construção, de que δf é tal que $\delta f(x_1) = \delta f(x_2) = 0$ [3],

$$\delta I \equiv I[f + \delta f] - I[f] \quad (2)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ F \left(f + \delta f, \frac{d(f + \delta f)}{dx} \right) - F \left(f, \frac{df}{dx} \right) \right\} dx \quad (3)$$

Usando-se da linearidade da derivada, a função da eq. (3) é expandida, e considerando os resultados de primeira ordem, obtendo-se,

$$F \left(f + \delta f, \frac{d(f + \delta f)}{dx} \right) = F \left(f, \frac{df}{dx} \right) + \delta f \frac{\partial F}{\partial f} + \frac{d(\delta f)}{dx} \frac{\partial F}{\partial (df/dx)} + \mathcal{O} \quad (4)$$

De maneira tal que o resultado da eq. (4) é aplicado na variação do funcional na eq. (3)

$$I[f] = \int_{x_1}^{x_2} F \left\{ \delta f \frac{\partial F}{\partial f} + \frac{d(\delta f)}{dx} \frac{\partial F}{\partial (df/dx)} \right\} dx \quad (5)$$

A eq. (5) apresenta a variação arbitrária δf . Esse termo pode ser obtido utilizando a integração por partes,

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} dx \delta f(x) \left\{ \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial (df/dx)} \right) \right\} + \underbrace{\left[\delta f(x) \frac{\partial F}{\partial (df/dx)} \right]_{x_1}^{x_2}}_{=0, \text{ pois } \delta f(x_1) = \delta f(x_2) = 0} \quad (6)$$

Ou ainda,

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} dx \delta f(x) \left\{ \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial (df/dx)} \right) \right\} \quad (7)$$

Analogamente ao cálculo diferencial, para a condição de minimização, a derivada do funcional deve se anular ao ponto mínimo dado por f_m . Com isso, $\delta I = I[f_m + \delta f] - I[f_m] = 0, \forall \delta f$. Assim, a forma integral,

$$\int dx \delta f(x) \frac{\delta I}{\delta f(x)} \Big|_{f(x)=f_m(x)} = 0, \forall \delta f(x) \quad (8)$$

E como trata-se de um variacional que minimize um ativo físico,

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} dx \delta f(x) \left\{ \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial (df/dx)} \right) \right\} \Big|_{f(x)=f_m(x)} = 0 \quad (9)$$

Dado a arbitrariedade de δf , o princípio variacional leva então a seguinte condição,

$$\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial (df/dx)} \right) = 0 \quad (10)$$

A eq. (10) é a equação de Euler-Lagrange, equação fundamental da mecânica lagrangiana.

2.3. Mecânica Lagrangiana

Na seção §2.2 o princípio variacional foi utilizado a fim de minimizar um determinado funcional $I[f]$, obtendo-se então a equação de Euler-Lagrange, eq. (10), apresentada em função de coordenadas genéricas. Diversas modelagens de parâmetros físicos podem ser realizadas, entretanto, uma determinada consideração física possibilita o alcance da equação de Euler-Lagrange modelada como instrumento da mecânica para a obtenção das equações de movimento de um sistema físico [3].

Supondo o funcional $S[t]$, chamado ação, que represente todas as possibilidades de como um sistema físico pode variar no tempo. Agora, considerando que este funcional ação, definido na eq. (11) seja minimizado de forma estacionária, englobando todos os possíveis "caminhos" que conectam dois períodos de tempo, cujo funcional seja função da energia potencial e energia cinética do sistema físico [3],

$$S[t] = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) dt \quad (11)$$

Dessa forma, as coordenadas genéricas podem ser pensadas como as posições q_i e velocidades \dot{q}_i relativas ao movimento do sistema. Com isso, a eq. (10) toma forma com estes novos parâmetros. Na Mecânica Lagrangiana considera-se, portanto,

$$x \longrightarrow t \quad (12)$$

$$f(x) \longrightarrow q_i(t) \quad (13)$$

$$df/dx \longrightarrow \dot{q}_i(t) \quad (14)$$

$$F(f, df/dx) \longrightarrow \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i) \quad (15)$$

$$I[f] \longrightarrow S[q_i] \quad (16)$$

Na aplicação da mecânica clássica a função F , presente na equação de Euler-Lagrange é representada por uma função \mathcal{L} , chamada de Lagrangiana, definida por uma relação entre a energia cinética e energia potencial do sistema ($\mathcal{L} = T - U$) [2].

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (17)$$

A resolução da equação de Euler-Lagrange como descrita em eq. (17) determina as equações que regem a evolução dos sistemas físicos no tempo através da minimização de ação, como exemplificado na subseção a seguir.

2.3.1. O Problema de Dois Corpos no viés da Mecânica Lagrangiana

Considere um sistema de duas partículas interagindo entre si através de um potencial de força central, de forma que os termos com subscrito ¹ representem as variáveis físicas e coordenadas do corpo 1 no sistema inercial de referência, e os termos sub escritos com ² representando os mesmos parâmetros para o segundo corpo [1], [11]. A lagrangiana do problema torna-se definida como,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_1 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \quad (18)$$

Sendo o primeiro e segundo termo do lado direito da equação a energia cinética dos corpos um e dois, respectivamente, e U a energia potencial entre os dois corpos.

Trazendo o sistema de coordenadas genéricas para a origem do centro de massa do sistema, de forma que $m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0$, criando um novo vetor de coordenadas tal que $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ e por último, definindo a massa reduzida $\mu \equiv m_1m_2/(m_1 + m_2)$, a lagrangiana, eq. (18) toma a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} - U(r) \quad (19)$$

Da simetria do problema, as coordenadas esféricas com origem no centro de massa do sistema é bastante conveniente, dessa maneira, a lagrangiana do problema é modificada, em que θ representa a coordenada polar e ϕ a coordenadas azimutal [12].

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) - U(r) \quad (20)$$

Partindo do princípio que o potencial presente na função lagrangiana, eq. (20) é um potencial de força central de origem da interação gravitacional, aplicado na direção do vetor de posições \mathbf{r} , o vetor momento angular do sistema é constante. Assim, o movimento dos sistema se restringe ao plano $\theta = \pi/2$, e da condição geral de simetria, a lagrangiana dada na eq. (20) toma sua representação final em coordenadas polares planas [1]. Com $k \equiv Gm_1m_2$.

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - \frac{k}{r} \quad (21)$$

Então, a equação de Lagrange torna-se,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Onde $q_1 = r$ e $q_2 = \phi$.

As equações de lagrange obtidas são [3],

$$\frac{d}{dt}(\mu r^2 \dot{\phi}) = 0 \quad (23)$$

$$\mu \ddot{r} - \mu r \dot{\phi}^2 - kr^{-2} = 0 \quad (24)$$

O argumento da eq. (23) é a representação do momento angular do sistema, que é constante no tempo [1].

$$L = \mu r^2 \dot{\phi} = \text{constante} \quad (25)$$

Substituindo $\dot{\phi}$ na eq. (24),

$$\mu \ddot{r} - \frac{L^2}{\mu r} - \frac{k}{r^2} = 0 \quad (26)$$

A resolução da eq. (26) não é o melhor caminho para a obtenção de uma função de movimento. Com o resultado obtido para a parte angular da equação de Lagrange é interessante revisitar a lagrangiana em coordenadas polares planas, veja eq. (21), e considerando o teorema da conservação de energia em função da lagrangiana $E = 2T - \mathcal{L}$, obtém-se uma simples equação diferencial ordinária de primeira ordem, cuja resolução geram as equações de órbita [1]. Onde T é a energia cinética.

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}[E - V_{eff}(r)]} \quad (27)$$

Em que $V_{eff}(r) = V(r) + L^2/2\mu r^2$ é o potencial efetivo.

2.4. Mecânica Hamiltoniana

Na seção anterior §2.3 foi realizada uma demonstração ao que diz respeito a mecânica de Lagrange, entretanto, uma breve descrição de alguns pontos implícitos ao apresentado podem se fazer interessantes e necessários para um entendimento do tópico principal desta seção. A dinâmica lagrangiana segue uma apresentação de n equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, referentes aos n graus de liberdade que o sistema físico abordado apresenta, cada uma dessas equações diferenciais relacionadas as n coordenadas generalizadas, de maneira que com o conhecimento de $2n$ condições iniciais, torna o sistema determinado. Em uma visão macro, o movimento do sistema pode ser representado graficamente por meio das coordenadas generalizadas q_i através de um espaço de grau n chamado de espaço de configuração. Um ponto no espaço de configuração define

unicamente e univocamente a posição das partículas, o movimento do sistema reflete em curvas sobre o espaço de configuração[2].

A mecânica de Hamilton, em uma estratégia diferente da apresentada por Lagrange, substitui as n EDOs de segunda ordem por um conjunto de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem, provindas através das coordenadas generalizadas e dos chamados momentos conjugados. Mesmo estas duas formulações da mecânica sendo equivalentes, a dinâmica hamiltoniana apresenta uma vantagem por consolidar uma análise estrutural na mecânica.

A formulação de Hamilton é construída de maneira que o espaço formado pelo conjunto de coordenadas generalizadas e momentos conjugados, chamado de espaço de fases, possam, além de representar o movimento do sistema, trazer em cada ponto do espaço todo o estado do sistema, sua configuração e velocidades das partículas em um certo instante.

Este estado de fases, constituído por $2n$ variáveis independentes, ditas aqui como variáveis canônicas do movimento, são constituídas pelas n coordenadas generalizadas q_i da dinâmica de Lagrange, e por mais n momentos conjugados p_i , definidos em função da lagrangiana como $p_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}_i$. A chamada função hamiltoniana, relaciona a função lagrangiana e as coordenadas canônicas [3].

Sendo $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$ uma lagrangiana genérica da definição dos momentos conjugados, tem-se que p_i é função das coordenadas generalizadas e velocidades generalizadas [3].

$$p_i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} \quad (28)$$

Então, definindo uma função \mathcal{H} chamada de hamiltoniana,

$$\mathcal{H} = p_i\dot{q}_i - \mathcal{L} \quad (29)$$

Agora, o diferencial total dessa função hamiltoniana é representado por,

$$d\mathcal{H} = dp_i\dot{q}_i + p_id\dot{q}_i - d\mathcal{L} \quad (30)$$

E por sua vez, o diferencial total da lagrangiana,

$$d\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}d\dot{q}_i \quad (31)$$

De maneira que, com a relação obtida em eq. (31)

$$d\mathcal{H} = dp_i\dot{q}_i + p_id\dot{q}_i - \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}d\dot{q}_i \right) \quad (32)$$

A eq. (32) pode ser reescrita, a partir da definição dos momentos conjugados.

$$d\mathcal{H} = \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \underbrace{\left[p_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right]}_{=0, \text{ eq. (28)}} d\dot{q}_i \quad (33)$$

$$d\mathcal{H} = \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i \quad (34)$$

Então, da definição da hamiltoniana como uma função das coordenadas canônicas, obtém-se o diferencial total [2]

$$d\mathcal{H} = \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial p_i} dp_i \quad (35)$$

Comparando-se as eq. (34) e eq. (35),

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \dot{q}_i \quad (36)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad (37)$$

As eq. (36) e eq. (37) apresentam uma intrínseca relação entre a hamiltoniana e a lagrangiana. Dessa forma, com a equação de Euler-Lagrange e a relação entre a lagrangiana e os momentos conjugados,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \implies \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} p_i = \dot{p}_i \quad (38)$$

Obtendo-se então, [3].

$$\boxed{\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}} \quad (39)$$

$$\boxed{\dot{p}_i = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}} \quad (40)$$

As eq. (39) e eq. (40) descritas nas variáveis canônicas são as equações de Hamilton na forma geral, onde tem-se uma relação direta entre a energia e a função hamiltoniana, como descrito subsequentemente.

2.4.1. A Função Hamiltoniana

Na seção §2.3 foi apresentada a função lagrangiana, como uma relação entre a energia potencial e a energia cinética de um sistema físico, uma relação similar destas duas formas de energia também podem ser relacionadas ao conceito da função hamiltoniana. Seja a hamiltoniana uma transformada

de Legendre da lagrangiana, e levando em conta a relação entre os momentos conjugados e a função de Lagrange tem-se,

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad (41)$$

Sendo $\mathcal{L} = T - U$, em que a energia cinética é função das velocidades generalizadas e que a energia potencial seja função das coordenadas generalizadas, as derivadas parciais presentes no lado direito da equação eq. (41) se tornam derivadas parciais apenas da energia cinética, considerando $T = m\dot{q}_i\dot{q}_i/2$ obtem-se $\partial \mathcal{L}/\partial \dot{q}_i = 2T$, assim,[2]

$$\boxed{\mathcal{H} = T + U = E} \quad (42)$$

Portanto, a função hamiltoniana, eq. (42), representa a energia total do sistema, expressa por meio das coordenadas canônicas [3].

2.4.2. Transformações Canônicas e Funções Geradoras

Um dos mais importantes resultado da formulação lagrangiana é que as equações de movimento são invariantes sobre uma transformação em suas coordenadas generalizadas, uma transformação no espaço de configurações $q_i \rightarrow Q_i(q_1, \dots, q_n, t)$ preserva a forma das equações do movimento [2]. Esta indagação não é direta na dinâmica de Hamilton, entretanto, restringi-se por construção a mudanças de variáveis que preservem as equações do movimento na abordagem hamiltoniana. As equações de Hamilton originais, em relação a Hamiltoniana $\mathcal{H}(q_i, p_i)$, são dadas por:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad p_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad (43)$$

E com a definição de função hamiltoniana, eq. (29), e o variacional ação apresentado em eq. (11), o princípio variacional em função da hamiltoniana $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$ e coordenadas canônicas q_i e p_i é dado por,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(q_i, p_i, t)) dt = 0 \quad (44)$$

Para um novo conjunto de transformadas inversas $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_j, P_j)$, dadas por $Q_j(q_i, p_i, t)$ e $P_j(q_i, p_i, t)$ no espaço de fases, por argumento de construção, considera-se que a função hamiltoniana transformada $\mathcal{K}(Q_j, P_j)$ conserva o formato das equações de hamilton [3],

$$\dot{Q}_j = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_j}, \quad P_i = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_j} \quad (45)$$

E analogamente, à relação apresentada em eq. (44) entre \mathcal{H} , q_i e p_i para o princípio variacional,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (P_j \dot{Q}_j - \mathcal{K}(Q_j, P_j, t)) dt = 0 \quad (46)$$

Disso, os dois princípios variacionais devem ser válidos concomitantemente,

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(q_i, p_i, t)) dt &= 0 \\ \Downarrow \\ \delta \int_{t_1}^{t_2} (P_j \dot{Q}_j - \mathcal{K}(Q_j, P_j, t)) dt &= 0 \end{aligned}$$

Esta indagação é válida, por exemplo, quando os dois argumentos de integração diferem-se por uma derivada total das coordenadas canônicas,

$$p_i \dot{q}_i - \mathcal{H}(q_i, p_i, t) = P_j \dot{Q}_j - \mathcal{K}(Q_j, P_j, t) + \frac{d\Phi(q_i, p_i, t)}{dt} \quad (47)$$

Ou então

$$\boxed{(p_i d\dot{q}_i - P_j d\dot{Q}_j) + (\mathcal{K}(Q_j, P_j, t) - \mathcal{H}(q_i, p_i, t)) dt = d\Phi(q_i, p_i, t)} \quad (48)$$

Onde considera-se que o $\delta \int_{t_1}^{t_2} (d\Phi/dt) dt = \delta(\Phi(q_j(t_1), q_j(t_2), t) - (\Phi(p_j(t_1), p_j(t_2), t))) = 0$, pois $\delta\Phi(q_i(t_1)) = \delta\Phi(q_i(t_2)) = \delta\Phi(p_i(t_1)) = \delta\Phi(p_i(t_2)) = 0$ é a imposta condição estacionária do variacional.

A condição eq. (48) relaciona as coordenadas canônicas novas e originais, definindo as transformações canônicas [2].

Definição: As transformações inversíveis $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_j, P_j)$ são ditas transformações canônicas se e somente se existem funções $\mathcal{K}(Q_j, P_j, t)$ e $\Phi(q_i, p_i, t)$ tais que satisfazem eq. (48). [2]

A configuração da equação eq. (48) indica uma consideração de $d\Phi$ como função dos dois conjuntos de coordenadas canônicas, através de q_i e Q_i . Suponha que as n equações $Q_j = Q_j(q_i, p_i, t)$ podem ser utilizados para se resolver os n momentos nas coordenadas originais, ($p_i = f_i(q_i, Q_i, t)$), então as n equações $P_j = P_j(q_i, p_i)$ podem ser expressos apenas em função de q_i , Q_j e a variável t , obtendo-se a relação ($P_i = P_i(q_i, p_i(q_i, Q_i, t), t) = P_i(q_i, Q_i, t)$). Em resumo, (q_i, Q_i) podem ser

expressos como um conjunto de variáveis independentes de ordem $2n$ [2]. Com o conhecimento desse espaço de ordem $2n$, retorna-se a função Φ , e definindo a função F_1 em função dos qs e ps .

$$F_1(q_i, Q_i, t) = \Phi(q_i, p_i(q_i, Q_i, t), t) \quad (49)$$

Retornando para a equação que define as transformações canônicas, eq. (48), e utilizando-se do diferencial total da função F_1 ,

$$(p_i d\dot{q}_i - P_j d\dot{Q}_j) + (\mathcal{K}(Q_j, P_j, t) - \mathcal{H}(q_i, p_i, t))dt = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt \quad (50)$$

Assim,

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad (51)$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \quad (52)$$

$$\mathcal{K}(Q_i, P_i, t) = \mathcal{H}(q_i, p_i, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t} \quad (53)$$

Em resumo, dada uma função qualquer $F_1 = F_1(q_i, Q_i, t)$, o conjunto de equações eq. (51), eq. (52) e eq. (53) fornece uma transformação canônica. F_1 é chamada de função geradora desta classe de transformações [2].

A abordagem explicitada é o método para se determinar as funções geradoras do tipo 1 ($F_1(q_i, Q_i, t)$). Entretanto, outros tipos de funções geradoras também podem ser obtidas a partir dos demais conjuntos de variáveis relativas às coordenadas originais e às novas, resultando em relações similares às relações eq. (51), eq. (52) e eq. (53), sendo essas $F_2(q_i, P_i, t)$, $F_3(p_i, Q_i, t)$ e $F_4(p_i, P_i, t)$, chamadas de funções tipo 2, 3 e 4, respectivamente.

A inserção de funções geradoras por si só não necessariamente trazem alguma vantagem nas resoluções das equações de Hamilton. O grande objetivo da inserção destas funções é a procura de uma transformação canônica apropriada, que resulte na simplificação do problema analisado, facilitando a obtenção das equações do movimento, o exemplo subsequente é proposto como forma de exemplificação da potencial simplificação na resolução das equações de movimento de sistemas dinâmicos através da utilização das transformações canônicas a teoria de Hamilton.

2.4.3. Transformação Canônica Aplicada ao Problema da Partícula Livre Unidimensional

Apenas para fins de entendimento dos ganhos relacionados a aplicação de funções geradoras para a obtenção de transformações canônicas e potencial simplificação na resolução de problemas

reais, nesta seção é considerado um simples problema de mecânica utilizando-se dos mecanismos da seção §2.4.2, o problema da partícula livre unidimensional [2].

A hamiltoniana da partícula livre de massa m é dada por;

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} \quad (54)$$

A Função geradora F_1 a ser considerada é

$$F_1(q, Q, t) = m \frac{(q - Q)^2}{2t} \quad (55)$$

O primeiro passo é a aplicação da equação eq. (51).

$$p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = \frac{m}{t}(q - Q) \quad (56)$$

Em seguida, o cálculo presente em eq. (52).

$$P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m}{t}(q - Q) \quad (57)$$

Então, com o poder da relação dos momentos generalizados nas coordenadas canônicas originais em função das coordenadas generalizadas na base original e nova, q e Q , respectivamente, constrói-se uma relação direta de Q em função de q ,

$$\begin{cases} Q = p - \frac{q}{m}t \\ P = p \end{cases} \quad (58)$$

Cuja inversa das coordenadas novas para as coordenadas originais é dada por

$$\begin{cases} q = Q + \frac{p}{m}t \\ p = P \end{cases} \quad (59)$$

E a nova hamiltoniana transformada em função das novas coordenadas generalizadas,

$$\mathcal{K}(Q, P, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{\partial F_1}{\partial t} = \frac{P^2}{2m} - m \frac{(q - Q)^2}{2t^2} \quad (60)$$

A expressão relativa a nova hamiltoniana deve se restringir a uma função apenas das coordenadas canônicas transformadas. Do conjunto de equações, eq. (59), tem-se,

$$\mathcal{K}(Q, P, t) = \frac{P^2}{2m} - \frac{P^2}{2m} = 0 \quad (61)$$

A função geradora, F_1 , apresenta a propriedade de zerar a hamiltoniana transformada. Com isso, o próximo passo é obter a resolução da equação de movimento transformada no novo sistema de coordenadas.

$$\dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P} = 0 \rightarrow Q = \alpha \quad (62)$$

$$P = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_j} = 0 \rightarrow P = \beta \quad (63)$$

E substituindo-se novamente nas coordenadas originais,

$$q = \alpha - \frac{\beta}{m}t, \quad p = \beta \quad (64)$$

Sendo α e β constantes.

Este problema pôde mostrar uma informação de bastante interesse para problemas gerais, que se escolhendo uma função de geração adequada, existe a possibilidade de que esta crie uma transformação canônica a qual resulte em uma hamiltoniana transformada \mathcal{K} nula. Esse fato faz as equações de movimento nas coordenadas transformadas triviais e imediatamente resolvidas, bastando aplicar a transformada inversa, para então a obtenção das equações de movimento para as coordenadas originais [8]. Esta abordagem pode se tornar bastante interessante para a aplicação em diversos sistemas dinâmicos, e toma um papel central na formulação de outra formulação da mecânica, alcançando-se a chamada equação de Hamilton-Jacobi [2].

2.5. Equação de Hamilton-Jacobi e as Variáveis de Ângulo e Ação

A teoria de Hamilton-Jacobi é uma outra possibilidade de formulação da mecânica clássica que parte do princípio de que um certo conjunto de variáveis canônicas (q_i, p_i) levem, por transformação canônica, a um novo conjunto de variáveis (Q_i, P_i) tais que resultem em uma hamiltoniana identicamente nula, $\mathcal{K}(Q_i, P_i, t) = 0$. O método de Hamilton-Jacobi, se apresenta como um poderoso método para a resolução das equações de movimento.

Considere a imposição de um conjunto de variáveis canônicas (q_i, p_i) que gerem uma determinada hamiltoniana $\mathcal{H}(q_i, p_i, t)$, e que haja uma determinada transformação canônica (TC) que tenha a propriedade de tornar a hamiltoniana transformada identicamente nula[2], ou seja,

$$(q_i, p_i) \xrightarrow{\text{TC}} (Q_i, P_i) \quad (65)$$

$$\mathcal{K}(Q_i, P_i, t) = 0 \quad (66)$$

Dessa maneira, as equações de Hamilton são resolvidas trivialmente, com α_i s e β_i s constantes,

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial P_i} = 0 \quad \longrightarrow \quad Q_i = \alpha_i \quad (67)$$

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial Q_i} = 0 \quad \longrightarrow \quad P_i = \beta_i \quad (68)$$

Com isso, considerando as transformações inversas, as coordenadas originais tornam-se simples funções das constantes α_i e β_i .

$$q_j = q_j(Q_i, P_j, t) \quad \longrightarrow \quad q_i(t) = q_i(\alpha_i, \beta_i, t) \quad (69)$$

$$p_j = p_j(Q_i, P_j, t) \quad \longrightarrow \quad p_i(t) = p_i(\alpha_i, \beta_i, t) \quad (70)$$

Assim, as eq. (69) e eq. (70) tornam-se as soluções das equações de Hamilton. Disso, a resolução se concentra na busca da função geradora $F_2(q, P, t) = S(q, P, t)$, relacionada à transformação canônica que, atenda os critérios expostos. Para esta função geradora tem-se, [10]

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial S}{\partial P_i}, \quad \mathcal{K}(Q_i, P_i, t) = \mathcal{H}(q_i, p_i, t) + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (71)$$

Onde a função $S(q_i, p_i, t)$ gera, uma hamiltoniana transformada identicamente nula,

$$\mathcal{H}(q_i, p_i, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad (72)$$

Usando o primeiro termo da eq. (71) e reorganizando,

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} = -\mathcal{H}\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right)} \quad (73)$$

A eq. (73) é a chamada equação de Hamilton-Jacobi [2].

A equação de Hamilton-Jacobi representa, assim como as equações de Hamilton, as equações de movimento. Entretanto, esta formulação reduz as $2n$ equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, eq. (39) e eq. (40), em uma única equação diferencial parcial de primeira ordem nas $n + 1$ variáveis. A resolução de eq. (73) determina automaticamente a transformação canônica que anula a hamiltoniana transformada, que por sua vez, resolve as equações de movimento nas variáveis canônicas originais [4]. Outra vantagem da equação de Hamilton-Jacobi é que não existe uma necessidade da obtenção de uma solução geral, o que seria bastante custoso matematicamente devido a não linearidade das equações. A obtenção de uma solução particular já torna suficiente a análise das equações, sendo possível o uso do método da separação de variáveis.

Seja S a função analisada, sua derivada total em relação ao tempo é,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} \quad (74)$$

Agora, utilizando-se da primeira relação, presente em eq. (71) e na equação de Hamilton-Jacobi eq. (73),

$$\frac{dS}{dt} = p_i \dot{q}_i - \mathcal{H} = \mathcal{L} \quad (75)$$

E integrando,

$$S = \int \mathcal{L} dt$$

Logo, tem-se que a função geradora que se relaciona com a teoria de Hamilton-Jacobi é a ação, como definida em eq. (11).

2.5.1. Variáveis de Ângulo e Ação

Existe um conjunto de variáveis canônicas, chamadas de variáveis de ângulo e ação, o qual foi introduzido ao formalismo de Hamilton-Jacobi para a resolução de problemas que apresentem multiperiodicidade. Em resumo, um sistema pode ser dito como multiperíodico se atender uma de duas condições definidas. A primeira é que q_i apresente oscilação entre dois limites definidos, já a segunda condição é de que p_i seja a coordenada canônica periódica no tempo [2].

Assim, seja um sistema multiperíodico, onde $2\pi J_i$ representa a área coberta pela curva característica no espaço de fases nos eixos p_i e q_i , restrita aos limites de periodicidade da oscilação [13], as variáveis de ação são definidas por,

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i \quad (76)$$

Aplicando a separação de variáveis e considerando o variacional ação para os casos estudados, limitando-se à condição $S(q_i, t) = W(q_i) + \alpha_1 t$, é possível mostrar que sua hamiltoniana transformada \mathcal{K} é a representação da hamiltoniana original \mathcal{H} , expressa como função das variáveis ângulo ação J_i , ($\mathcal{K} = \mathcal{H}(J_i)$) [3].

$$\Phi_i = \frac{\partial W}{\partial J_i} \quad (77)$$

E então, as variáveis conjugadas às variáveis J_i , dadas por Φ_i , são representadas por eq. (77). Na seção subsequente é apresentada uma aplicação das coordenadas de ângulo e ação em um problema de mecânica celeste, a fim de exemplo.

2.6. Hamiltoniana de Kepler: Variáveis de Ângulo e Ação

Nesta seção é revisitado o problema de dois corpos, a partir da aplicação da equação de Hamilton-Jacobi, com a utilização das coordenadas de ângulo e ação. A definição para o hamiltoniano do problema, a partir da definição imposta na eq. (42), tem-se $\mathcal{H} = \frac{m}{2}p_i^2 - \frac{\mu}{r}$. Da simetria do problema, é interessante a consideração das coordenadas esféricas, momentos reduzidos e por consequência, a função hamiltoniana reduzida.[2][14]

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \left(\tilde{p}_r^2 + \frac{\tilde{p}_\theta^2}{r^2} + \frac{\tilde{p}_\Phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \quad (78)$$

Onde, \tilde{p}_r , \tilde{p}_θ e \tilde{p}_Φ , são as componentes radiais, polar e azimutal do momento reduzido, respectivamente. E então, com a aplicação da equação de Hamilton-Jacobi para $S = S(r, \theta, \phi, t)$,

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial S}{\partial \phi} \right)^2 \right] - \frac{\mu}{r} = \tilde{E} \quad (79)$$

E com a separação de variáveis, $S = S(r, \theta, \phi, t) = S_r(r) + S_\theta(\theta) + S_\phi(\phi)$, é possível trabalhar eq. (79) de forma a obter,

$$\left(\frac{dS_r}{dr} \right)^2 = 2\tilde{E} + 2\frac{\mu}{r} - \frac{\tilde{L}^2}{r^2} \quad (80)$$

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta} \right)^2 = \tilde{L}^2 - \frac{\tilde{L}_z^2}{\sin^2 \theta} \quad (81)$$

$$\frac{dS_\phi}{d\phi} = \tilde{L}_z \quad (82)$$

Que de imediato trazem os seguintes resultados,

$$\tilde{p}_r^2 = 2\tilde{E} + 2\frac{\mu}{r} - \frac{\tilde{L}^2}{r^2} \quad (83)$$

$$\tilde{p}_\theta^2 = \tilde{L}^2 - \frac{\tilde{L}_z^2}{\sin^2 \theta} \quad (84)$$

$$\tilde{p}_\phi = \tilde{L}_z \quad (85)$$

E calculando as variáveis de ação,

$$J_\phi = \frac{1}{2\pi} \oint \tilde{p}_\phi d\phi = \frac{1}{2\pi} \oint \tilde{L}_z d\phi \quad (86)$$

$$J_\theta = \frac{1}{2\pi} \oint \tilde{p}_\theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{\tilde{L}^2 - \frac{\tilde{L}_z^2}{\sin^2 \theta}} d\theta \quad (87)$$

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint \tilde{p}_r dr = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2\tilde{E} + \frac{2\mu}{r} + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}} dr \quad (88)$$

$$(89)$$

O desenvolvimento das integrais apresentadas podem então ser realizados, obtendo-se as relações,

$$J_\Phi = \tilde{L}_z \quad (90)$$

$$J_\theta = \tilde{L} - |\tilde{L}_z| \quad (91)$$

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2\tilde{E} + \frac{2\mu}{r} + \frac{(J_\theta + |J_\phi|)^2}{r^2}} dr = \frac{\mu}{\sqrt{-2\tilde{E}}} - (J_\theta + |J_\phi|) \quad (92)$$

E a energia reduzida do sistema,

$$\tilde{E} = -\frac{\mu^2}{2(J_r + J_\theta + |J_\phi|)^2} \quad (93)$$

Como a Hamiltoniana é independente do tempo, $\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{E}$. [13]

$$\boxed{\tilde{\mathcal{H}} = -\frac{\mu^2}{2(J_r + J_\theta + |J_\phi|)^2}} \quad (94)$$

De forma final da apresentação dos recursos matemáticos, necessários para a abordagem do problema proposto, é apresentada a teoria de perturbação no contexto da mecânica de Hamilton.

2.7. Teoria de Perturbação

A grande maioria dos problemas físicos não apresentam uma resolução analítica as quais as ferramentas da mecânica hamiltoniana, sozinhas, possam representar. A mecânica celeste foi a primeira área a qual o estudo de formas de alcançar modelos aproximados de determinados problemas físicos sem resolução analítica primeiro obteve sucesso, através da aplicação dos chamados métodos perturbativos. Estes métodos possibilitaram, por exemplo, a primeira aferição da presença de Netuno no sistema solar.

O problema de dois corpos é um problema da mecânica que apresenta resolução analítica, porém, no problema de três corpos, ou no caso do problema de dois corpos sem simetria perfeitamente esférica, este fato já não ocorre e uma resolução analítica exata não pode ser alcançada. Desta maneira, seja o movimento em estudo governado por meio da função potencial U do sistema, composta por uma componente U_0 representando uma condição com resolução analítica conhecida, e \mathcal{R} dita função perturbadora, com $U = U_0 + \mathcal{R}$, a teoria de perturbação toma por objetivo encontrar uma maneira de se contabilizar os efeitos da função perturbadora, \mathcal{R} , sobre o modelo físico em análise.

De forma geral, a teoria de perturbação não precisa se restringir para casos onde os efeitos perturbativos sejam pequenos, entretanto, nos limitamos às perturbações gerais, que apresentam este tipo de restrição frente ao caso analítico.

2.7.1. Perturbações Gerais na formulação Hamiltoniana

As perturbações gerais partem do fato que a energia potencial de uma órbita varia lentamente sobre efeitos da função perturbadora, de maneira que a variação dos elementos ao passo de tempo possa ser analiticamente analisada pelo método. Nestes tipos de perturbações, as fontes perturbativas apresentam-se de maneira explícita nas equações, de forma que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$. Onde \mathcal{H}_0 representa a hamiltoniana não perturbada e \mathcal{H}_1 representa o fator perturbativo da hamiltoniana.

Como em vários problemas físicos conhecidos, a resolução de um determinado conjunto de variáveis canônicas, resultam em uma hamiltoniana transformada identicamente nula. As considerações expostas para a determinação de um método de teoria da perturbação geral se dão, dentre outros aspectos, pela vantagem desta condição.

Seja $\mathcal{H}'_0(Q_i, P_i)$ a hamiltoniana de um problema físico onde exista uma determinada transformação canônica que $\mathcal{H}'_0(Q_i, P_i) \xrightarrow{\text{TC}} \mathcal{H}_0(q_i, p_i) = 0$, fazendo que $q_i = \alpha_i$ e $p_i = \beta_i$, com α_i e β_i constantes, considerando que seja adicionada uma perturbação \mathcal{H}_1 à este sistema físico a hamiltoniana total do sistema torna-se $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$. Disso, dada a definição das equações de Hamilton, eq. (39), e eq. (40), com a função perturbadora dada por $\mathcal{H}_1 = -\mathcal{R}$,

$$\dot{q}_i = \frac{\partial(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1)}{\partial p_i} = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial p_i} = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \beta_i} = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \beta_i} = \dot{\alpha}_i \quad (95)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1)}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \alpha_i} = \dot{\beta}_i \quad (96)$$

Então, conhecida a função perturbadora, e as coordenadas generalizadas analisadas sejam tais que zeram a hamiltoniana do sistema não perturbado, o conjunto de equações, eq. (95) e eq. (96), definem a variação no tempo das coordenadas generalizadas devido a presença de perturbação \mathcal{R} . Com o conhecimento dos assuntos abordados ao longo da §2, tem-se poder dos artifícios matemáticos para a modelagem do problema.

3. INFLUÊNCIA DA PERTURBAÇÃO NA DINÂMICA DO MOVIMENTO ORBITAL DE UMA PARTÍCULA

Com as ferramentas da teoria de perturbação desenvolvidas em §2.7 é modelada a função perturbadora para o modelo de análise, que considera a influência da pressão de radiação solar e o achatamento terrestre como fontes perturbativas do movimento de uma partícula ao redor da Terra.

3.1. Perturbação por Pressão de Radiação e do Potencial Gravitacional

Considerando o sistema dinâmico do problema de dois corpos e as perturbações da pressão de radiação solar e do potencial gravitacional de achatamento J_2 foi feito um estudo analítico no movimento orbital de uma partícula orbitando a Terra.

3.1.1. Função Perturbadora: Pressão de Radiação Solar

Um sistema planetocêntrico é um modelo físico onde o corpo analisado encontra-se constantemente atingido por ondas eletromagnéticas providas do Sol. Partículas ou detritos sofrem expressivas modificações à sua dinâmica, devido a constante transferência de energia e quantidade de movimento da radiação. [5][7]

A partícula em estudo considerada esférica. Assim, a relação entre a força provida pela pressão de radiação e da força gravitacional da Terra sobre esta partícula, definindo um parâmetro, [7]

$$\sigma = \frac{F_r}{F_G} = \frac{3Q_r S a^2}{4GM_\oplus c \rho_p s} \quad (97)$$

Onde Q_r representa o coeficiente da pressão de radiação solar, S o fluxo solar, a o semieixo maior da órbita da partícula no sistema planetocêntrico, G a constante de gravitação universal, c a velocidade de luz no vácuo, M_\oplus a massa da Terra, ρ_p a densidade da partícula e s representando o raio da partícula.

A eq. (97) demonstra uma relação entre as duas naturezas de interação, de maneira que o vetor de força de radiação possa ser dado por $\mathbf{F}_r = \sigma n^2 a \hat{\mathbf{S}}$, onde o versor $\hat{\mathbf{S}}$ representa o vetor unitário radial apontando do Sol ao centro da Terra e n o movimento médio da partícula. O versor $\hat{\mathbf{S}}$ no sistema planetocêntrico equatorial equinocial tem componentes dadas por $\hat{\mathbf{S}} = -(\cos \lambda_s; \cos \varepsilon \sin \lambda_s; \sin \varepsilon \sin \lambda_s)$. No sistema de coordenadas planetocêntrico equatorial equinocial os eixos X , Y e Z representam a direção do equinócio vernal, a direção no plano equatorial do planeta ortogonal ao equinócio vernal e a direção do polo norte do planeta, respectivamente [6]. A componente ε representa o ângulo entre o plano orbital e o plano equatorial e λ_s representa a longitude do Sol, medida no plano orbital terrestre a partir do equinócio vernal.

Disso, pode-se representar a função perturbadora da radiação solar \mathcal{R}_r [6],

$$\mathcal{R}_r = -\sigma n^2 a (x \cos \lambda_s + y \cos \varepsilon \sin \lambda_s + z \sin \varepsilon \sin \lambda_s) \quad (98)$$

Onde as coordenadas x , y e z são relacionadas com os elementos orbitais da seguinte forma [6],

$$\begin{cases} x = r\{(\cos \omega \cos f - \sin \omega \sin f) \cos \Omega - (\sin \omega \cos f + \sin f \cos \omega) \sin \Omega \cos i\} \\ y = r\{(\cos \omega \cos f - \sin \omega \sin f) \sin \Omega + (\sin \omega \cos f + \sin f \cos \omega) \cos \Omega \cos i\} \\ z = r\{\sin \omega \cos f + \sin f \cos \omega\} \sin i \end{cases} \quad (99)$$

Onde, r é a distância planetocêntrica, Ω longitude do nodo ascendente, i inclinação orbital em relação ao plano equatorial, ω argumento do pericentro, f anomalia verdadeira e n o movimento médio da partícula.

Obtendo-se, então, a função perturbadora da pressão de radiação solar [5],

$$\langle \mathcal{R}_r \rangle = \mathcal{R}_r = \frac{3}{2} \sigma n^2 a^2 e \{ \cos \omega (\cos \Omega \cos \lambda_s + \sin \Omega \sin \lambda_s \cos \varepsilon) + \sin \omega (-\sin \Omega \cos i \cos \lambda_s + \cos \Omega \cos i \sin \lambda_s \cos \varepsilon + \sin i \sin \lambda_s \sin \varepsilon) \} \quad (100)$$

Sendo e a excentricidade da órbita.

3.1.2. Função Perturbadora: Achatamento Terrestre

A distribuição de massa dos corpos celestes afeta substantivamente a dinâmica dos corpos que os orbitam. A quantificação destes efeitos podem ser expressos através do potencial gravitacional por meio da superposição dos harmônicos resultantes da resolução da equação da Laplace [15],

$$U = \frac{GM_{\oplus}}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n P_{n0}(\sin \phi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n J_{nm} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^n \cos m(\lambda - \lambda_{22}) P_{nm}(\sin \phi) \right\} \quad (101)$$

Onde R_{\oplus} é o raio equatorial da Terra, M_{\oplus} a massa terrestre, ϕ a latitude, λ a longitude, J_n , J_{nm} , λ_{22} os coeficientes característicos e P_{nm} os polinômios associados de legendre, com $P_{nm}(x) = -(1-x^2)^{m/2} (d^{n+m}) / (dx^{n+m})(x^2-1)^n$.

Assim, a função perturbadora do potencial gravitacional, considerando o termo J_2 é dada por [15]:

$$\mathcal{R}_{J_2} = \frac{GM_{\oplus}}{r} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^2 \left\{ -J_2 \left(\frac{3 \sin^2 \phi - 1}{2} \right) \right\} \quad (102)$$

E, utilizando os elementos orbitais [7],

$$\mathcal{R}_{J_2} = \mu \left\{ \frac{3}{2} \frac{J_2 R_{\oplus}^2}{a^3} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 \phi \right] \right\} (1-e^2)^{-3/2} \quad (103)$$

3.2. Perturbação Total

A perturbação total se dá pela soma da influencia destas duas perturbações

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_r + \mathcal{R}_{J_2} \quad (104)$$

Considerando o caso planar, tem-se a inclinação, longitude do nodo ascendente e obliquidade da elíptica como nulas ($i = \Omega = \varepsilon = 0$), assim [7],

$$\mathcal{R} = \frac{3}{2}\sigma n^2 a^2 e [\cos \lambda_s \cos \omega + \sin \lambda_s \sin \omega] + \frac{1}{2}n^2 a^2 J_2 \left(\frac{R_\oplus}{a}\right)^2 (1 - e^2)^{-3/2} \quad (105)$$

Embora orbitas singulares sejam passíveis no problema estudado, a função dada na eq. (105) apresenta singularidade topológica ao ser aplicado no sistema de coordenadas considerado. Um contorno desta situação é obtido pela aplicação de elementos orbitais não singulares [7],

$$\begin{cases} \bar{h} = e \cos \omega \\ \bar{k} = e \sin \omega \\ e^2 = \bar{h}^2 + \bar{k}^2 \end{cases} \quad (106)$$

Considerando-se este novo sistema de coordenadas não singulares, a função perturbadora dada na eq. (105) é representada por,

$$\mathcal{R} = \frac{3\sigma}{2} \frac{\mu e}{a} [\bar{h} \cos \lambda_s + \bar{k} \sin \lambda_s] + \frac{1}{2}n^2 a^2 J_2 \left(\frac{R_\oplus}{a}\right)^2 (1 - \bar{h}^2 - \bar{k}^2)^{-3/2} \quad (107)$$

Por conseguinte, dado que \bar{h} e \bar{k} são funções exclusivamente de ω e e , a derivada dos elementos em função do tempo é representada por intermédio da regra de cadeia. $d\bar{h}/dt = (\partial\bar{h}/\partial e)(de/dt) + (\partial\bar{h}/\partial\omega)(d\omega/dt)$ e $d\bar{k}/dt = (\partial\bar{k}/\partial e)(de/dt) + (\partial\bar{k}/\partial\omega)(d\omega/dt)$. E como a longitude do Sol, λ_s , depende linearmente do tempo, considera-se as derivadas em função desta coordenada, a fim de manter o conjunto de equações adimensionais [16]. Obtendo-se portanto [7],

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{h}}{d\lambda_s} &= -3n/2n_s \left[\frac{\bar{k}}{(1 - \bar{h}^2 - \bar{k}^2)} J_2 \left(\frac{R_\oplus}{a}\right)^2 + \sigma \sqrt{1 - \bar{h}^2 - \bar{k}^2} \sin \lambda_s \right] \\ \frac{d\bar{k}}{d\lambda_s} &= -3n/2n_s \left[\frac{\bar{h}}{(1 - \bar{h}^2 - \bar{k}^2)} J_2 \left(\frac{R_\oplus}{a}\right)^2 + \sigma \sqrt{1 - \bar{h}^2 - \bar{k}^2} \cos \lambda_s \right] \end{aligned} \quad (108)$$

Sendo n_s o movimento médio do Sol.

Retornando então às coordenadas originais $(\bar{h}, \bar{k}) \rightarrow (e, \alpha)$, com $\alpha = \omega - \lambda_s$, encontra-se o seguinte conjunto de variáveis [6],

$$\begin{aligned} \frac{de}{d\lambda_s} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \alpha} \\ \frac{d\alpha}{d\lambda_s} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial e} \end{aligned} \quad (109)$$

Em que: $\mathcal{H} = \mathcal{H}(e, \alpha)$,

$$\mathcal{H} = \frac{W}{3}(1-e^2)^{-3/2} + \sqrt{1-e^2} + Ce \cos \alpha \quad (110)$$

Sendo: $W = 3n/2n_s J_2 (R_\oplus/a)^2$ e $C = 3n\sigma/2n_s$.

Retornando às coordenadas cartesianas, a representação do Hamiltoniano do problema é dada por [5],

$$\mathcal{H} = \frac{W}{3}(1-x^2-y^2)^{-3/2} + \sqrt{1-x^2-y^2} + Cx \quad (111)$$

A representação eq. (111) é o formato final da hamiltoniana de estudo, como inserida na rotina desenvolvida para a análise do comportamento do espaço de fases para os casos analisados.

4. RESULTADOS

Com as ferramentas da mecânica analítica apresentadas durante §2 e a hamiltoniana modelada para o problema presente em §3 foram desenvolvidas rotinas computacionais no software Matlab para a análise de condições de sistemas dinâmicos de interesse.

O Estudo [7] analisou a evolução orbital de uma nuvem de partículas que orbitam ao redor da Terra sujeitas as perturbações do achatamento terrestre J_2 e da Pressão de Radiação Solar utilizando integrações numéricas das equações diferenciais do sistema dinâmico. Os resultados alcançados mostraram um acentuado desvio da excentricidade máxima em certas regiões e um estudo analítico foi realizado para se estudar o aparecimento deste comportamento na excentricidade da partícula.

Desta forma, neste trabalho o primeiro resultado alcançado foi uma revisita ao caso analítico estudado por [7] do sistema planetocêntrico sobre a influência da pressão de radiação e achatamento terrestre, analisando-se a mudança de comportamentos do espaço de fases sobre diferentes altitudes para uma partícula de $20\mu m$ de raio. De maneira complementar, aplicado ao mesmo sistema anterior, foi investigada a influência da variação das dimensões da partícula no padrão de comportamento do espaço de fases do sistema.

4.1. Partícula de $20\mu m$

Considerando-se uma partícula de $20\mu m$ de raio orbitando a Terra sobre diferentes altitudes, foi possível a obtenção do espaço de fase para cada uma das altitudes analisadas, sendo estas $12.500km$, $14.300km$, $14.800km$, $14.900km$, $17.000km$ e $20.000km$. Constata-se que o resultado combinado da perturbação de pressão de radiação solar com a perturbação de achatamento terrestre J_2 ocasiona uma alteração do comportamento da excentricidade, nota-se que em altitudes próximas a $14.900km$ ocorre uma bifurcação no espaço de fases que altera o comportamento de suas curvas se comparado a altitudes superiores a inferiores destes valores, veja fig. 1.

Nas altitudes de $12.500km$ e $14.300km$ nota-se uma evolução na projeção do efeito de libração do espaço de fases, indo de encontro a bifurcação que ocorre a primeira vez em algum valor de altitude ligeiramente inferior a $14.800km$, pois nesta altitude já pode-se notar, para as curvas de nível obtidas, o aparecimento de pequenas regiões de circulações no espaço de fases. Para as altitudes de $14.900km$ e $17.000km$ as curvas de nível que demonstram o aparecimento da bifurcação, que marca a mudança do comportamento do espaço de fases, gerando o aparecimento dominante do efeito de circulação com o aumento da altitude, como visto em $20.000km$. Em [7] estudou-se o espaço de fases destas mesmas altitudes e, durante o estudo numérico, encontra-se um comportamento de amplitude da excentricidades crescente para altitudes superiores a que resulta no aparecimento de bifurcação, e decrescente para valores inferiores a esta.

A mudança de comportamento do espaço de fases, pode sugerir a correlação de termos da hamiltoniana perturbada referentes ao movimento médio da partícula e longitude do Sol, que apresentam valores comensuráveis [17][18].

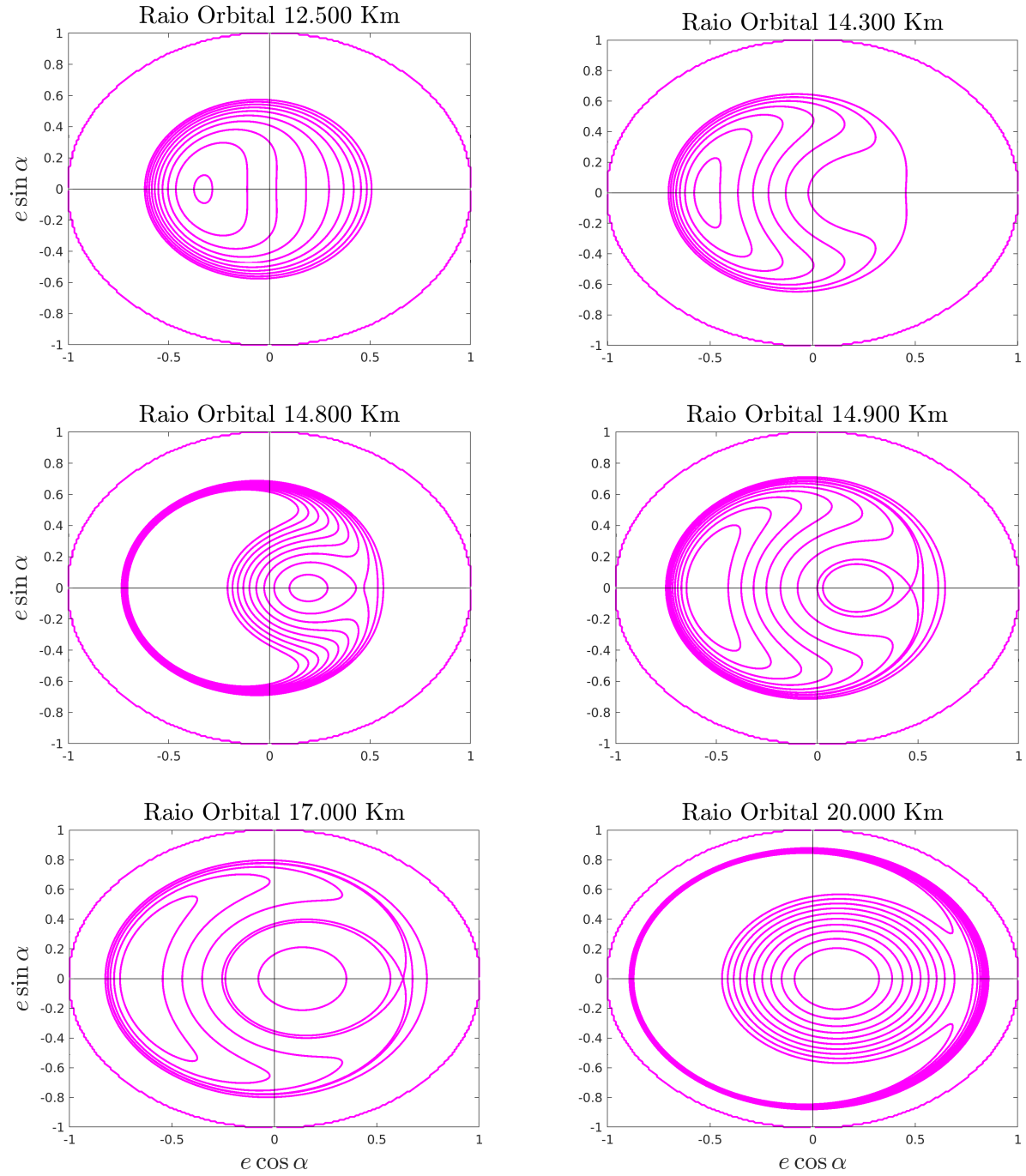


Figura 1. Espaço de fases para partícula de $20\mu m$. Elaboração própria, 2022.

4.2. Partícula na altitude de $16.000km$

Na consideração de partícula sobre altitude constante de $16.000km$ tomou-se o espaço de fases do sistema composto pela partícula em diversas dimensões de raio, logo no entorno do raio onde

foi obtida a bifurcação, sendo estas $5\mu m$, $9\mu m$, $10\mu m$, $11\mu m$, $12\mu m$ e $25\mu m$ e , para fins de análise da tendência do espaço de fases, em uma faixa mais extensa de dimensões da partícula, sendo estas $2\mu m$, $5\mu m$, $10\mu m$, $15\mu m$, $25\mu m$ e $50\mu m$, no intuito de se verificar o comportamento de aparecimento da bifurcação do espaço de fases, sobre efeito de modificação da variável de massa, e a diferença do comportamento destes em uma faixa de diferentes valores de dimensões de partícula, conforme apresentado em [6] no caso de Deimos, lua de Marte.

Esta verificação também levou em consideração expressão empírica da tendência do comportamento da excentricidade apresentada em [7], guiando a escolha da região em situações onde encontra-se o acentuado desvio de excentricidade máxima. Como o resultado anterior, constata-se que os efeitos combinados da perturbação de pressão de radiação solar com a perturbação de achatamento terrestre ocasionam uma alteração do comportamento de excentricidade. O mesmo perfil de evolução do espaço de fases do caso anterior, também ocorre em determinadas combinações onde são variadas as dimensões, e por consequência a massa da partícula fig. 2 e fig. 3. Nota-se que para partículas de até $9\mu m$ de raio não ocorre o aparecimento de bifurcação, comportamento encontrado para o caso da partícula de $10\mu m$, como visualizado em fig. 2 e demais partículas de dimensões superiores a esta, conforme visto em fig. 3.

Seguindo a mesma tendência de formação do espaço de fases, dessa vez com variação da dimensão da partícula, pode ser analisada a tendência de crescimento e decrescimento da excentricidade máxima da partícula, como realizado em [7] para a condição anterior. Existe a indicação pelo espaço de fases que partículas como na condição analisada apresentem tendência de decrescimento da excentricidade até $9\mu m$, seguida da tendência de crescimento para valores superiores a $10\mu m$ até pelo menos $50\mu m$.

Ainda pelo fato do aparecimento da mesma tendência do espaço de fases, possivelmente o aparecimento da mudança de comportamento deste deve ser dar devido a correlação de termos da hamiltoniana perturbada referentes ao movimento médio da partícula e a longitude do Sol, que apresentam valores comensuráveis [17][18].

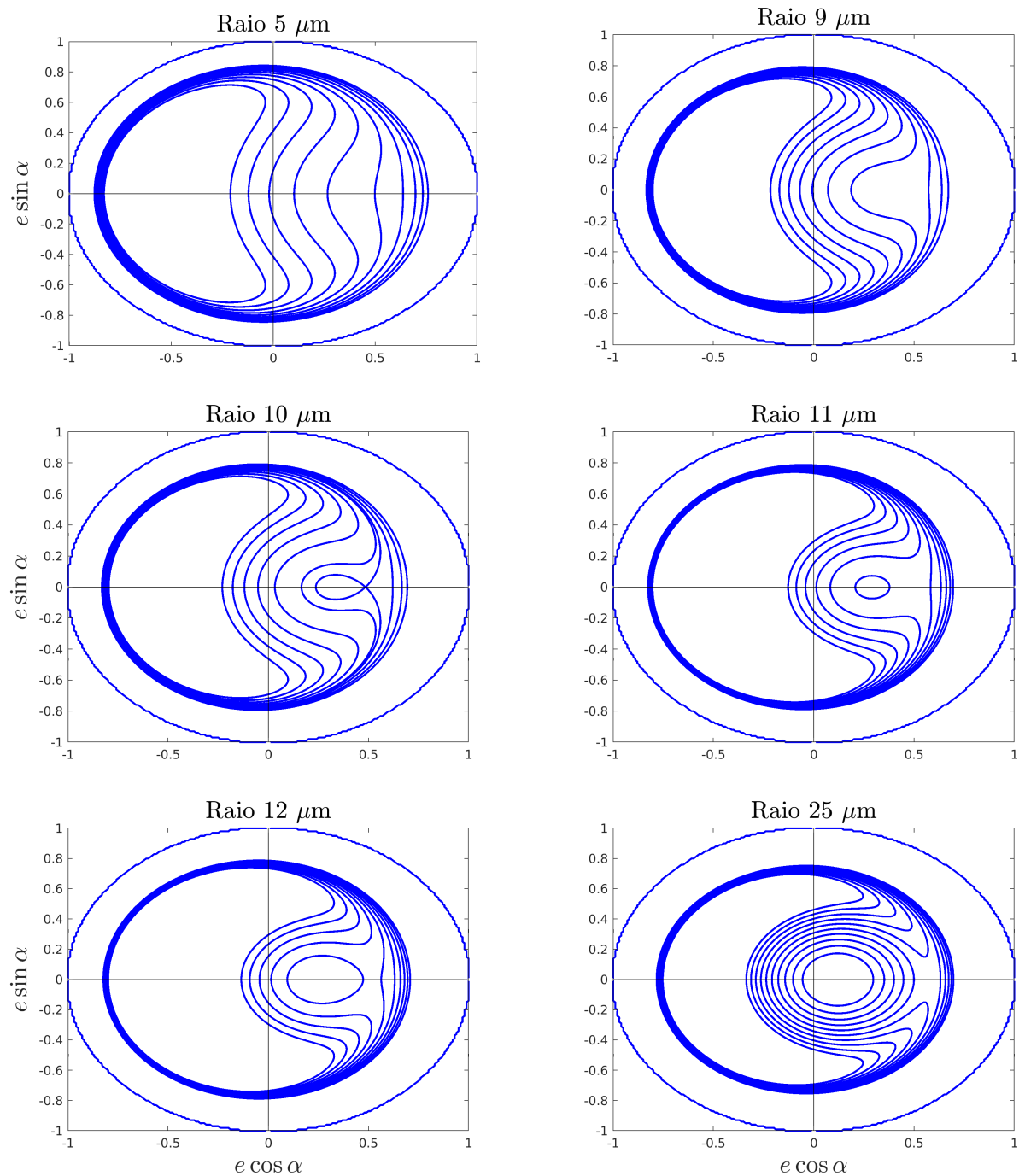


Figura 2. Espaço de fases para partícula na altitude de 16.000km , aos arredores da bifurcação. Elaboração própria, 2022.

5. CONCLUSÕES

As ferramentas da mecânica analítica possibilitam que uma análise intrínseca aos problemas físicos sejam revelados, em especial, no caso da mecânica de Hamilton-Jacobi, o problema de

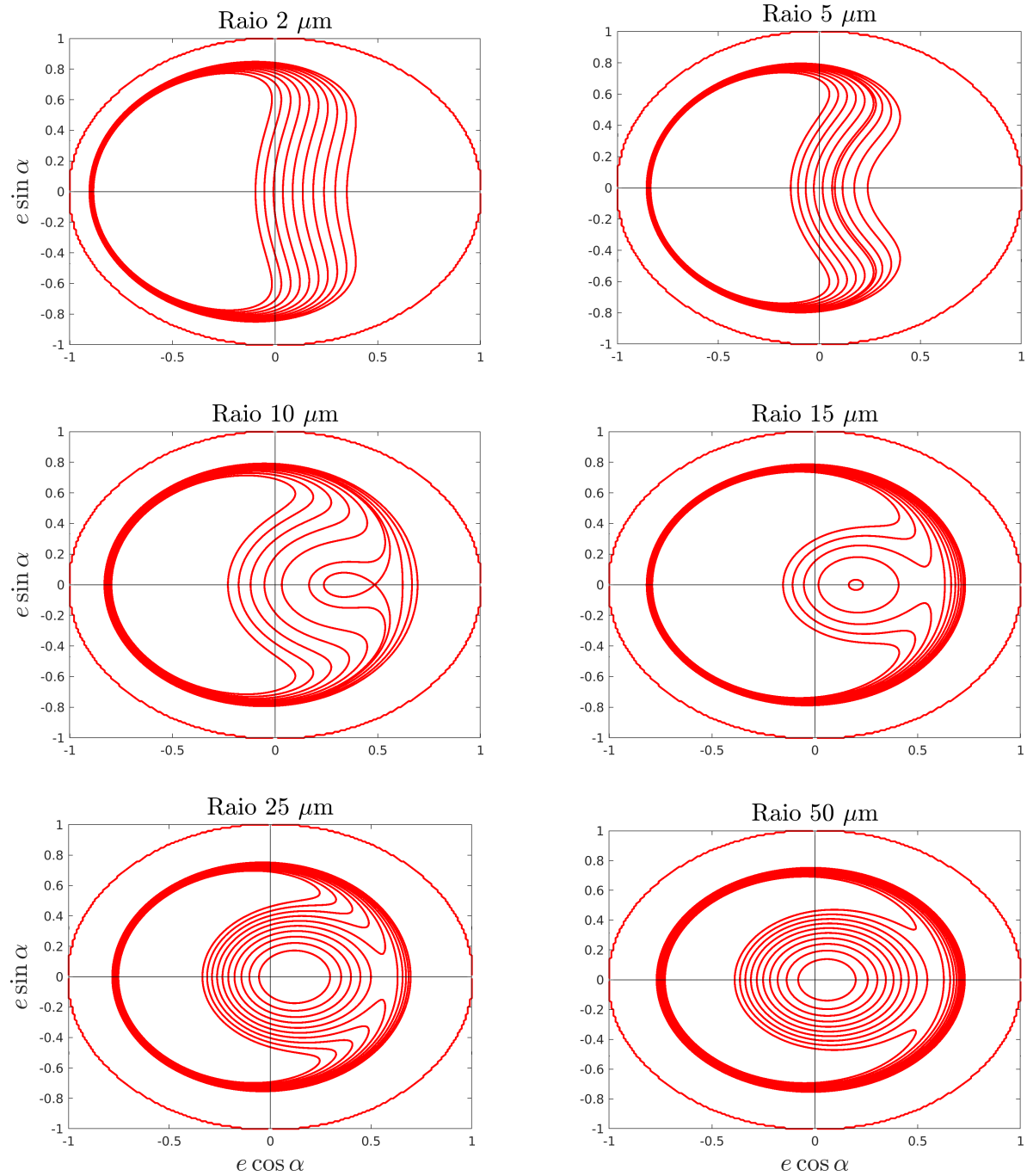


Figura 3. Espaço de fases para partícula na altitude de 16.000km . Elaboração própria, 2022.

perturbação em um sistema dinâmico torna-se bastante direto de ser analisado. Uma troca entre uma teoria mais completa e rica, em decorrência da simplificação de certos casos específicos.

A pressão de radiação solar combinada com o achatamento terrestre influenciam no sistema dinâmico de dois corpos de maneira que, para determinados conjuntos de parâmetros, os efeitos de bifurcação no espaço de fases sejam constatados, resultados já notados na aplicação numérica na

teoria newtoniana em [7].

Os dados da fig. 1 demonstram crescimento da excentricidade da órbita até uma altitude no entorno de $14.000km$, a partir de $14.800km$ nota-se a bifurcação no espaço de fases e, então, decrescimento dos valores de excentricidade da órbita da partícula. Também, como estudado por [6] e [5], pôde-se constatar a dependência da dimensão da partícula na evolução da excentricidade da órbita, a fig. 2 mostrou que na condição de uma partícula a $16.000km$ de altitude, no intervalo de dimensões da partícula de raio entre $9\mu m$ e $10\mu m$ ocorre a bifurcação. Este estudo analítico mostrou a existência de dependência no comportamento do espaço de fases ao sistema dinâmico das dimensões da partícula e região orbital da mesma, de maneira ao comportamento do espaço de fases e a comensurabilidade entre a longitude do Sol e o movimento médio da partícula, que podem sugerir um efeito ressonante entre o movimento médio do objeto de estudo e o movimento médio do Sol, como descrito por [17] e [18].

Ideias de continuação deste trabalho podem ocorrer na investigação de demais modificações do problema que causem também este efeito de mudança de comportamento do espaço de fases e também um aprofundamento do estudo, como por exemplo, a ressonância do tipo 2:1, que podem causar a mudança do comportamento do espaço de fases.

REFERÊNCIAS

- [1] T. Marion, *Classical Dynamics of Particles and Systems*, 5th ed. (Cengage Learning, 2003).
- [2] N. A. Lemos, *Analytical mechanics* (Cambridge University Press, 2018).
- [3] H. Goldstein, *Classical mechanics*, 2nd ed., Addison-Wesley series in physics (Addison-Wesley Pub. Co, 1980).
- [4] J. Magorrian, “Lectures in galactic and planetary dynamics,”.
- [5] L. S. Alexander V. Krivov and V. Dikarev, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **63**, 313 (1996).
- [6] D. P. Hamilton and A. V. Krivov, *Icarus* **123**, 503 (1996).
- [7] C. C. C. de Paula Santos, *Estudo da dinâmica de pequenos detritos espaciais e meteoróides*, Ph.D. thesis, Instituto Nacional de Pesquisa Espaciais, Caixa Postal 515 (2007).
- [8] N. A. Lemos, *Mecânica Analítica*, 2nd ed. (Livraria da Física, 2007).
- [9] R. d. A. Martins and A. P. B. d. Silva, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **35**, 1 (2013).
- [10] B. Wyslouch, “Lectures notes in 8.09 classical mechanics ii,” (2004).
- [11] A. V. Gerhard Beutler, Leos Mervart, *Methods of celestial mechanics*, 1st ed., Astronomy and astrophysics library, Vol. Volume 1 (Springer, 2005).
- [12] D. Brouwer and G. M. C. (Auth.), *Methods of Celestial Mechanics* (Academic Press, 1961).
- [13] V. R. Bond, *Kluwer Academic Publishers* , 159 (1980).
- [14] C. Nipoti, “Lectures notes in celestial mechanics,” (2016).
- [15] A. Roy, *Orbital Motion*, 4th ed. (Taylor Francis, 2004).
- [16] L. S. Alexander V. Krivov and V. Dikarev, *Celestial mechanics and Dynamical Astronomy* **63**, 313 (1996).
- [17] R. Vilhena de Moraes, K. Fitzgibbon, and M. Konemba, *Advances in Space Research* **16**, 37 (1995).
- [18] J. C. Sampaio, *Movimento Orbital de Satélites Artificiais: Efeitos Ressonantes*, Ph.D. thesis, Faculdade de Engenharia do Campus Guaratinguetá, UNESP (2013).