

# Revisitando aspectos fundamentais da mecânica quântica: não-localidade e retrocausalidade

Isaac Ivanoff, Roberto M. Serra

*Universidade Federal do ABC, Centro de Ciências Naturais e Humanas*

(Dated: 20 de setembro de 2019)

A mecânica quântica admite que estados de um sistema composto por duas ou mais partículas sejam descritos por estados emaranhados (que não podem ser representados como um simples produto de estados individuais). Segundo a interpretação de Copenhagen, a realização de uma medida sobre apenas uma partícula em um estado de superposição multipartido, produz o colapso de toda a função de onda (dependendo do estado emaranhado e da escolha do observável a ser medido) em um dos estados que constituem a superposição, fazendo com que a(s) outra(s) partícula(s) passe(m) também a ser(em) descrita(s) instantaneamente pelo estado colapsado, não importando quão distante esteja(m) da primeira partícula submetida à medição. Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresenta um estudo sucinto sobre alguns debates que surgiram a respeito desse fenômeno (que refletem diretamente nas interpretações dessa teoria), contextualizando suas origens com o Paradoxo de Einstein, Podolsky e Rosen (EPR), demonstrando duas Desigualdades de Bell e comentando resultados experimentais recentes que levam à conclusão que a não-localidade está presente na mecânica quântica. Sobre este viés, surge também o questionamento se não existem fenômenos em eventos espacialmente separados cujo efeito pode preceder sua causa (chamados de fenômenos retrocausais), assim, é apresentada também uma análise de um experimento (com a utilização de emaranhamento quântico) que parece corroborar para a existência de tais fenômenos.

## I. INTRODUÇÃO

A mecânica quântica pode descrever matematicamente o comportamento de objetos físicos a nível atômico, prevendo resultados experimentais que a “física clássica” é incapaz. Essa teoria foi introduzida no início do século XX com contribuição de diversos físicos, entre eles, se destacam Werner Heisenberg e Erwin Schrödinger, que não só compilaram um conjunto de fenômenos observados em experimentos, como também construíram modelos matemáticos que justificavam e previam propriedades da radiação e da matéria que não eram previstas pela mecânica clássica [1–4].

Uma das propriedades fundamentais dessa teoria é o chamado Princípio da Incerteza de Heisenberg: havendo um operador  $A$  associado a um observável, e um operador  $B$  associado a outro observável, caso  $A$  e  $B$  não comutem, não é possível prever o resultado de medida de  $A$  e  $B$  com absoluta precisão em um mesmo arranjo experimental, uma vez que para um dado estado de um sistema representado por  $|\Psi\rangle$  temos a relação [1–4]:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{|\langle \Psi | [A, B] | \Psi \rangle|}{2}, \quad (1)$$

onde  $\Delta A$  e  $\Delta B$  representam o desvio padrão de medida associado a cada observável (sendo  $\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$  e  $\Delta B = \sqrt{\langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2}$ ).

Outra propriedade inerente dessa teoria é o fato de que em sua descrição surge a possibilidade de serem construídos estados emaranhados, ou seja, estados quânticos de partículas distintas que não podem ser representadas como um produto de estados individuais. O próprio Schrödinger que cunhou pela primeira vez o termo “emaranhado” (em alemão “Verschränkung”) [5], afirmou que

era essa a característica que realmente separa a mecânica quântica da clássica [6].

Para exemplificar sobre o que o conceito de emaranhamento se refere, vamos tomar um espaço de Hilbert composto  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ , onde os espaços  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$  representam sistemas de dois níveis (como por exemplo partículas de spin 1/2), possuindo respectivamente as bases  $\{|0\rangle_1, |1\rangle_1\}$  e  $\{|0\rangle_2, |1\rangle_2\}$ . Dessa forma, um estado emaranhado (não separável) é aquele que não pode ser escrito como um simples produto tensorial de um estado  $|\alpha\rangle_1$  e um  $|\beta\rangle_2$ , na forma  $|\Psi\rangle = |\alpha\rangle_1 \otimes |\beta\rangle_2$ , como por exemplo:

$$|\Psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 - |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle), \quad (2)$$

este estado é construído de maneira que não é possível separar os termos da soma (fatorando-os em um simples produto tensorial), e portanto é definido como emaranhado.

Com o conjunto de propriedades que abrangem a mecânica quântica, em especial às citadas acima, foi promovida na comunidade científica, após uma série de debates, a conclusão de que a não-localidade é aspecto fundamental existente nessa teoria: Havendo duas partículas que são descritas por um estado emaranhado em superposição, o estado de uma passa a ser instantaneamente descrito pelo estado colapsado da outra quando esta for submetida à medição de um observável específico, não importando quão distante estejam entre si. Atualmente existem muitas aplicações tecnológicas com a utilização de estados emaranhados, principalmente voltadas ao desenvolvimento da computação e comunicação quântica que carregam consigo essa concepção [4]. Neste TCC será apresentado um breve estudo sobre como essa conclusão foi formada.

Segundo a teoria da relatividade especial, eventos es-

parcialmente separados que são simultâneos em um referencial não são simultâneos em qualquer outro [7]. Neste contexto, surge o questionamento se a não-localidade presente no emaranhamento quântico pode promover eventos cuja consequência preceda sua causa. Para este tipo de fenômeno é atribuído o nome de retrocausalidade. Assim, este TCC fará também uma análise de um experimento nomeado de (“borracha quântica de escolha atrasada”) que parece corroborar para a existência de tal fenômeno.

## II. PARADOXO EPR

Sob uma vertente filosófica, a física clássica era regida com a ideia de que qualquer entidade material possui um conjunto de propriedades definidas e absolutas independentemente de haver alguém para observá-las [8]. Em outras palavras, cada entidade material possui uma correspondência a elementos de realidade que não implicam existir na presença de um observador. Esta noção era conhecida pela filosofia como Realismo, que foi amplamente debatida com a ascensão da física quântica.

Fazendo todas as considerações a respeito dessa nova teoria, a Interpretação de Copenhague (nomeada com o nome do lugar onde Niels Bohr e Heisenberg desenvolveram suas conclusões) passou a ser a interpretação física da mecânica quântica melhor aceita pela comunidade científica desde a terceira década do século XX [9]. Ela considera que antes de uma medida ser realizada sobre um sistema (objeto) quântico, ele se encontra em uma superposição de estados, ou seja, em uma “somatória” de todas suas propriedades possíveis: somente após a medição de um observável, um sistema inicialmente preparado em uma superposição passa a ser descrito por um único estado (associado ao autovalor do observável medido). Assim, o Realismo na física passou a ser questionado com o próprio Bohr argumentando que não fazia sentido assumir uma realidade para o universo na ausência da observação.

Apesar das previsões acertivas da mecânica quântica, em 1935, Albert Einstein, Boris Podolsky e Nathan Rosen publicaram um artigo sugerindo que a teoria estava incompleta [10]; este problema ficou conhecido como paradoxo EPR. Neste artigo os autores iniciam discutindo a impossibilidade de se determinar simultaneamente a posição e o momento de uma partícula, de forma que seus elementos de realidade são determinados em função da escolha do observável a ser medido. Em seguida, definem um conceito de realismo que difere do realismo filosófico, podendo ser resumido da maneira a seguir.

**Realismo:** Uma grandeza de um sistema possui realidade física independente da nossa observação apenas quando a probabilidade dela ser medida for igual a 1. Dessa maneira, aplicando o operador  $A$  em um autoestado  $|\Psi\rangle$  deste operador, se obtém um valor observável  $a$  ( $A|\Psi\rangle = a|\Psi\rangle$ ), e nessas condições, o valor observado  $a$  será sempre o mesmo,

e portanto, admite-se que  $a$  possui uma realidade física [10].

Generalizando, temos que ao se aplicar este conceito em um sistema quântico com dois observáveis que não comutam (portanto incompatíveis), duas situações são possíveis: ou as duas quantidades observadas não possuem uma realidade física simultânea ou a descrição de realidade dada por uma função de onda na mecânica quântica não está completa. Todavia, se for possível medir simultaneamente dois observáveis incompatíveis, segundo a descrição da própria teoria, ambos passam a ter uma realidade física, levando a conclusão de que ela é incompleta. Em essência este é o ponto central do argumento de EPR aplicado a estados bi-partidos.

Um segundo artigo foi escrito por Bohr também em 1935, argumentando que Einstein, Podolsky e Rosen descrevem uma ambigüidade que não justifica sua conclusão sobre a mecânica quântica, uma vez que não há um método para se realizar uma medição simultânea da posição e do momento de uma partícula sem que o sistema seja perturbado [11].

Levando em conta o debate entre os artigos de Bohr e Einstein, passou a surgir na época experimentos mentais promoviam a possibilidade de serem realizadas medidas simultâneas de observáveis que não comutassem sobre um sistema sem perturbá-lo, caso este sistema fosse descrito por um estado emaranhado, e fosse considerada a suposição de Localidade.

**Localidade:** Se dois eventos são desconectados do ponto de vista causal, qualquer resultado do primeiro evento não pode influenciar em qualquer resultado do segundo.

Aqui, desconexão causal se refere à separação de dois eventos em seus respectivos cones de luz [7], com:

$$\Delta x^2 > c^2 \Delta t^2,$$

onde  $\Delta x$  representa a distância espacial entre os dois eventos,  $\Delta t$  representa a diferença temporal de seus acontecimentos e  $c$  a velocidade da luz no vácuo.

Para exemplificarmos um destes experimentos mentais, vamos considerar um sistema de dois níveis, e lembrar que as matrizes de Pauli são dadas por:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

quando representadas na chamada base computacional  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ , onde  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  representam ou autovetores do operador  $\sigma_z$ .

Dessa forma, vamos tomar como exemplo duas partículas em um estado emaranhado  $|\Psi_S\rangle$  descrito na Eq. (2), onde  $|0\rangle_1$  e  $|1\rangle_1$  representam autovetores correspondentes aos dois valores de spins possíveis de serem observados da primeira partícula, e  $|0\rangle_2$  e  $|1\rangle_2$  da segunda.

Vamos agora assumir que existam dois observadores (Alice e Bob) que estejam distantes entre si, e que cada

um é capaz de medir o spin de uma das partículas do par emaranhado na direção do eixo  $z$  com o observável  $\sigma_z$ , e na direção do eixo  $x$  com o observável  $\sigma_x$ . A Figura 1 faz uma ilustração desta configuração.

Os valores de spin possíveis de serem observados são representados por  $\pm 1$  ( $+1$  se o spin estiver alinhado ao eixo,  $-1$  se estiver anti-alinhado).

Vamos usar a notação de um operador  $\sigma_k^\alpha$ , onde o sobrescrito  $\alpha = A, B$  indica qual observador (Alice ou Bob) realiza a medida, e o subscrito  $k = x, y$  e  $z$  indica qual eixo de medida foi escolhido. Assim, temos que se Alice medir  $\sigma_z^A$  com um valor observado  $+1$ , então a descrição dada pela mecânica quântica sobre o estado singleto ( $|\Psi_S\rangle$ ) prevê que ela colapsará, fazendo com que Bob observe neste mesmo eixo (ao observar  $\sigma_z^B$ ) sua partícula com o valor de spin  $-1$ , sem nenhuma incerteza intrínseca associada a essa medida.

Este estado  $|\Psi_S\rangle$  também pode ser escrito na base onde o operador  $\sigma_x$  é diagonalizado:

$$|\Psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle), \quad (3)$$

sendo  $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$  e  $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$  os autoestados de  $\sigma_x$ . Dessa maneira, se Bob resolver medir o observável  $\sigma_x^B$  ao invés de  $\sigma_z^B$ , ele passará então a ter uma probabilidade intrínseca de 50% de obter o valor  $+1$  e 50% de obter  $-1$ , não sendo possível se atribuir uma realidade física simultânea para os observáveis de  $\sigma_x^A$  e  $\sigma_z^A$ , como já esperado pela relação de incerteza da Eq. 1, pois  $[\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y \neq 0$ .

Nessas condições surge um questionamento, já que Bob pode escolher medir  $\sigma_x^B$  ou  $\sigma_z^B$  mesmo depois das partículas terem se separado, ou seja, se Bob escolher “de última hora” medir  $\sigma_x^B$ , e Alice sempre mantiver sua escolha de medir  $\sigma_z^A$ , Alice teria uma incerteza intrínseca quanto ao valor do spin a ser observado por ela, mas se Bob escolher medir também “de última hora”  $\sigma_z^B$ , Alice deixaria de ter essa incerteza antes que qualquer informação da decisão de Bob chegasse a ela, em uma violação da Localidade.

Vale pontuar que esta incerteza intrínseca discutida aqui refere-se ao questionamento se as partículas são ou não corretamente descritas pela mecânica quântica, e não se relaciona (à princípio) com a incerteza obtida de um espaço amostral feito por repetidas medições. Enquanto Alice não tiver conhecimento sobre qual eixo de medida Bob estará fazendo suas observações, nada ela poderá concluir pois permanecerá sempre com 50% de chance de obter  $\pm 1$ , a menos que uma informação clássica chegue para ela dizendo sobre qual eixo de medida Bob fez sua observação.

Considerando então uma análise similar àquela feita no paradoxo EPR, para se preservar a Localidade, torna-se inconsistente admitir que ambas as partículas passam a ter suas realidades físicas definidas apenas no momento da medição, resultando no fato da Mecânica Quântica não poder ser considerada uma teoria completa.

Artigos posteriores, como por exemplo de David Bohm [12], promoveram a conclusão de que uma forma de so-

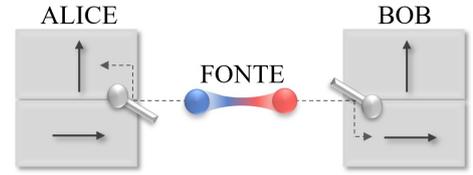


Figura 1: Fonte enviando um par emaranhado de partículas para os observadores Alice e Bob. Em um momento qualquer após a separação das partículas Alice escolhe medir a orientação do spin sobre o eixo  $z$  de uma das partículas, enquanto Bob escolhe fazer a medição da outra sobre o eixo  $x$ .

lucionar tal problema seria admitindo que o resultado da medida de ambas as partículas estava de alguma forma codificado no momento da criação do par emaranhado, sendo a mecânica quântica na verdade um reflexo de um processo determinístico com alguns graus de liberdade desconhecidos, nomeados de variáveis ocultas.

Este problema repercutiu também com indagações sobre a possibilidade de se construir algum aparelho que poderia transmitir informações mais rápido que a velocidade da luz, porém já no final do século XX havia um consenso entre a comunidade científica de que não era possível fazê-lo, pois nenhuma informação pode ser extraída na medida de um único par emaranhado: Antes que se compare os resultados obtidos por Alice e Bob não é possível afirmar se a partícula de Alice encontra-se em um estado colapsado de  $\sigma_x^B$  ou  $\sigma_z^B$ . Essa possibilidade poderia até ser aberta novamente caso o estado da partícula de Alice fosse clonado para uma amostra suficientemente grande de outras partículas, pois quando fossem realizadas repetidas medidas de  $\sigma_i^A$  (com  $i = x$  ou  $z$ ) seria possível verificar em qual estado colapsado estaria a partícula de Alice original, uma vez que medindo  $\sigma_i^A$  o autovalor obtido seria o mesmo 100% das vezes caso ela estivesse realizando sua medição sobre o mesmo eixo que Bob (caso contrário, 50%). Todavia, o teorema da não-clonagem demonstrou que é impossível se criar uma cópia idêntica de um estado quântico desconhecido [13].

### III. DESIGUALDADES DE BELL

O argumento utilizado no Paradoxo EPR foi amplamente debatido nos anos que se seguiram, contudo, nenhum teste de falseabilidade pôde ser realizado até a década de 60. Em 1964, John Bell escreveu um artigo [14] propondo uma maneira experimental de se resolver o debate que questionava se deveria ou não existir uma teoria realista local. Nesta proposta, foram demonstradas as implicações da existência de variáveis ocultas locais em um experimento de pares de partículas emaranhados com três arranjos de medida.

A seguir, faremos uma descrição contemporânea dos argumentos de Bell, baseando-se na Ref. [4] (pp. 92-93). Vamos supor que os observadores Alice e Bob queiram medir agora a polarização de dois fótons emaranhados

(de uma amostra maximamente emaranhada no estado do tipo singlete, como na Eq. (2)) com relação a três eixos de referência:  $a$ ,  $b$  e  $c$ , que seguem o mesmo princípio (e descrição matemática) do caso citado na seção anterior a respeito dos spins das partículas. Se Alice obtém a polarização representada por  $+1$  quando mede  $\sigma_a^A$ ,  $+1$  quando mede  $\sigma_b^A$  e  $-1$  quando mede  $\sigma_c^A$ , dizemos que essa partícula pertence ao grupo de resultados de medida  $(a_+, b_+, c_-)$  e como consequência do colapso da função de onda que descreve o estado emaranhado, a partícula de Bob pertencerá ao grupo  $(a_-, b_-, c_+)$ .

Realizando então este mesmo experimento  $N_t$  vezes, teremos um determinado número de pares de partículas  $N_i$  pertencentes a cada um dos oito grupos possíveis de resultados de medidas representados na Tabela I. Vale ressaltar que a soma de todos os  $N_i$  é igual a  $N_t$ .

O ponto principal aqui é que se existir alguma variável oculta no momento da criação do par emaranhado de partículas (assumindo então uma teoria realista local), as partículas possuirão de alguma forma os resultados de suas medidas definidos antes mesmo da observação de Alice e Bob e, portanto, já pertencerão a algum dos grupos  $N_i$ .

Se tomarmos a desigualdade

$$N_3 + N_4 \leq (N_2 + N_4) + (N_3 + N_7),$$

fazendo as considerações de que a probabilidade de uma partícula ser medida por Alice em  $a_+$  e por Bob em  $b_+$  é dada por  $p(a_+, b_+) = (N_3 + N_4)/N_t$ , e analogamente  $p(a_+, c_+) = (N_2 + N_4)/N_t$ , e  $p(c_+, b_+) = (N_3 + N_7)/N_t$ , chegamos à conclusão de que:

$$p(a_+, b_+) \leq p(a_+, c_+) + p(c_+, b_+). \quad (4)$$

No caso realista local, essa conclusão deve ser válida caso seja respeitado que as medidas realizadas sobre uma partícula não podem perturbar a outra (uma vez que estão distantes o suficiente entre si). Pela mecânica quântica, a probabilidade  $p(a_+, b_+)$  é descrita como:

$$p(a_+, b_+) = \frac{1}{2} \sin^2 \left( \frac{\theta_{ab}}{2} \right), \quad (5)$$

onde  $\theta_{ab}$  é o ângulo entre os eixos  $a$  e  $b$ . Temos também que  $p(a_+, c_+)$  e  $p(c_+, b_+)$  seguem equação análoga.

Dessa maneira, usando as Eqs. (5) e (4) obtemos:

$$\sin^2 \left( \frac{\theta_{ab}}{2} \right) \leq \sin^2 \left( \frac{\theta_{ac}}{2} \right) + \sin^2 \left( \frac{\theta_{cb}}{2} \right). \quad (6)$$

Se tomarmos por exemplo  $\theta_{ab} = 2\theta$  e  $\theta_{ac} = \theta_{cb} = \theta$ , é fácil de verificar que essa desigualdade é violada para  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Assim, a desigualdade de Bell acima demonstra uma diferença entre os resultados a serem obtidos com a descrição da Mecânica Quântica dos obtidos com a existência de uma teoria que assumisse variáveis ocultas locais. Se um experimento verificasse então a violação desta última desigualdade, então o realismo local seria também violado.

Tabela I: Resultados possíveis medidos por Alice e Bob

População	Alice	Bob
$N_1$	$(a_+, b_+, c_+)$	$(a_-, b_-, c_-)$
$N_2$	$(a_+, b_+, c_-)$	$(a_-, b_-, c_+)$
$N_3$	$(a_+, b_-, c_+)$	$(a_-, b_+, c_-)$
$N_4$	$(a_+, b_-, c_-)$	$(a_-, b_+, c_+)$
$N_5$	$(a_-, b_+, c_+)$	$(a_+, b_-, c_-)$
$N_6$	$(a_-, b_+, c_-)$	$(a_+, b_-, c_+)$
$N_7$	$(a_-, b_-, c_+)$	$(a_+, b_+, c_-)$
$N_8$	$(a_-, b_-, c_-)$	$(a_+, b_+, c_+)$

Um ponto importante a ser ressaltado é de que o próprio Bell afirmou em seu artigo original [14] que se a desigualdade (6) fosse violada experimentalmente, isso refutaria apenas a localidade, e que nenhuma conclusão poderia ser obtida a respeito sobre a realidade dos observáveis quânticos (se estão de fato intrinsecamente em superposição até o momento de uma medição).

### A. Desigualdade CHSH

A nomenclatura Desigualdade de Bell passou a ser usada para as desigualdades que acabavam contrastando a previsão da mecânica quântica com uma teoria realista local. Uma dessas desigualdades foi a deduzida em 1969 por Clauser, Horne, Shimony e Holt, chamada Desigualdade CHSH [15], que agora estabelece uma relação para quatro observáveis ( $A_1, A_2, B_1$  e  $B_2$ ):

$$|\mu(A_1 B_1) - \mu(A_1 B_2) + \mu(A_2 B_1) + \mu(A_2 B_2)| \leq 2, \quad (7)$$

onde  $\mu(X)$  representa o valor esperado (neste caso também chamado de correlação) de  $X$ .

Para demonstrar tal desigualdade, tomemos como base a Ref. [16], onde vamos considerar novamente uma Fonte enviando pares de partículas emaranhadas para Alice e Bob; Alice só pode medir as grandezas físicas  $A_1$  e  $A_2$  de uma das partículas, assim como Bob só pode medir  $B_1$  e  $B_2$  da outra. Cada uma dessas grandezas físicas só pode assumir os valores  $+1$  ou  $-1$ . Dessa forma, considerando a relação  $A_1 B_1 - A_1 B_2 + A_2 B_1 + A_2 B_2$  temos que:

$$A_1 B_1 - A_1 B_2 + A_2 B_1 + A_2 B_2 = \pm 2. \quad (8)$$

Agora, considerando que a função de onda da partícula já possui uma probabilidade normalizada de se obter os resultados de cada observável, é fácil mostrar que:

$$\mu(A_1 B_1 - A_1 B_2 + A_2 B_1 + A_2 B_2) = \mu(A_1 B_1) - \mu(A_1 B_2) + \mu(A_2 B_1) + \mu(A_2 B_2). \quad (9)$$

Logo, das Eqs. (8) e (9) obtemos a desigualdade CHSH:

$$|\mu(A_1 B_1) - \mu(A_1 B_2) + \mu(A_2 B_1) + \mu(A_2 B_2)| \leq 2.$$

Tomando novamente como exemplo o estado  $|\Psi_S\rangle$  da Eq. (2) e considerando que  $A_1 = \sigma_z^A$ ,  $A_2 = \sigma_x^A$ ,  $B_1 = (\sigma_z^B + \sigma_x^B)/\sqrt{2}$  e  $B_2 = (\sigma_z^B - \sigma_x^B)/\sqrt{2}$ , temos que para esse sistema:

$$\mu(A_1B_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \Psi_S | \sigma_z^A \otimes (\sigma_z^B + \sigma_x^B) | \Psi_S \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

e analogamente,

$$\mu(A_1B_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mu(A_2B_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \mu(A_2B_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Portanto,

$$\mu(A_1B_1) - \mu(A_1B_2) + \mu(A_2B_1) + \mu(A_2B_2) = 2\sqrt{2}, \quad (10)$$

o que viola a desigualdade CHSH.

## B. Loopholes

Mais de uma década após as duas desigualdades de Bell serem introduzidas, experimentos foram sendo realizados com objetivo de pôr fim às discussões associadas a existência da teoria de variáveis ocultas. O primeiro deles foi conduzido por Alain Aspect em 1981 [17], que verificava a correlação entre a polarização de dois fótons emaranhados. O experimento tomou como base quatro eixos de medida, colocando em teste a Desigualdade CHSH; a conclusão dos autores foi de que a mecânica quântica estava correta, uma vez que a desigualdade foi violada experimentalmente. Contudo, a discussão não se encerrou, pois o experimento apresentou certas “brechas” (*loopholes*) em sua configuração que poderiam justificar a violação da desigualdade.

Este TCC não tem como objetivo discutir amplamente os *loopholes* presentes. O leitor interessado pode consultar as referências [18] e [19] para uma melhor compreensão do assunto. Todavia, vale a pena citar três *loopholes* que demonstraram maior relevância nas discussões sobre os experimentos de Aspect e posteriores.

1. **Localidade:** consiste em saber se qualquer informação sobre a medida de uma partícula pode ser transferida para a outra com uma velocidade menor ou igual a velocidade da luz. Essa informação diz respeito tanto ao resultado de uma medida (polarização  $\pm 1$ ) quanto a configuração experimental (eixos escolhidos por Alice e Bob) que poderia ser alterada mesmo depois da separação das partículas. Esse *loophole* é encerrado quando os aparelhos dos dois observadores são devidamente separados no espaço-tempo, garantindo que as configurações experimentais de um observador possam ser alteradas sem que nenhuma informação chegue antes do outro observador realizar sua medida. Existe também a hipótese de que as variáveis ocultas se originam juntamente com o par emaranhado de partículas, e por isso, garantir a localidade entre o observador e a fonte também é necessária.

2. **Amostragem justa (*fair sampling*):** uma amostra que não é justa acontece por exemplo quando não há garantia de que todas as partículas estão de fato emaranhadas, ou na existência de algum atraso de medição de uma partícula para a outra que ocasione em partículas de pares emaranhados diferentes serem medidas como se fossem do mesmo. Experimentos que envolvem emaranhamento são difíceis de serem produzidos já que a interação com o ambiente acaba facilmente destruindo este estado. A resolução deste problema se dá conforme a eficiência na produção e detecção de pares emaranhados aumenta.
3. **Liberdade de escolha:** se refere a relações entre configurações de medida dos aparelhos, uma vez que o próprio John Bell assumiu explicitamente no desenvolvimento de sua desigualdade que não há correlação entre as escolhas das medições de Alice e Bob. Este *loophole* se encerraria ao escolher uma fonte de aleatoriedade confiável para estabelecer a configuração experimental de Alice e Bob, que não estivesse submetida a qualquer influência causal com os resultados de medidas do experimento.

## IV. TESTE DE BELL INTERESTELAR

Com o objetivo de se encerrar simultaneamente os *loopholes* citados na seção anterior, foi realizado em 2015 um experimento que utilizava a luz originada nas estrelas como fonte de aleatoriedade para a determinação da configuração do experimento (escolhas dos eixos de medida) [20].

O motivo para se ter tomado como fonte de aleatoriedade a luz das estrelas foi para garantir o encerramento do *loophole* de liberdade de escolha, assegurando o pressuposto de que não havia uma correlação estatística entre as escolhas das configurações da medição de Alice e Bob, nem com seus resultados de medida, uma vez que as fontes de configuração do sistema eram produzidas a uma distância astronômica. Experimentos anteriores utilizaram geradores de números aleatórios quânticos, e colocaram os detectores distantes entre si (exemplo: Ref. [21]), porém abriram a possibilidade de que uma causa desconhecida afetasse tanto o gerador de números aleatórios quanto os resultados das medidas.

Assim como o experimento de Aspect, este teste de Bell consistia na verificação da polarização de pares de fótons emaranhados enviados por uma Fonte para os observatórios de Alice e Bob. O observatório de Alice se encontrava a uma distância de 557 m da Fonte, e o observatório de Bob a 1.149 m, estando também distantes entre si de modo a garantir a localidade: nenhuma informação sobre uma medida realizada (durante a tomada de resultados de um par de partículas emaranhadas) poderia ser transmitida entre Alice, Bob e a Fonte a menos que essa viajasse mais rápido que a velocidade da luz.

As configurações do experimento (bases de medida) eram tomadas em tempo real, entre a separação e a medição dos pares emaranhados. Em cada um dos observatórios havia um coletor de fótons direcionado para as luzes geradas pelas estrelas; cada coletor estava conectado a um separador de fótons; cada separador media o comprimento de onda de cada fóton detectado: se o comprimento de onda de um fóton fosse maior que  $700\text{ nm}$  ele era classificado como “vermelho”, e menor que este valor, “azul”.

Portanto, os fótons provenientes das estrelas eram classificados em tempo real como vermelhos ou azuis, e dessa forma a configuração do experimento para medir a polarização dos fótons emaranhados se alterava. Cada observatório estava configurado com duas bases de medições possíveis. Quando os fótons eram classificados como vermelhos no observatório de Alice, os eixos de medida de sua base eram tomados em  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , quando classificados como azuis, em  $45^\circ$  e  $135^\circ$ . Para Bob, fótons vermelhos resultavam em medições de polarização sobre os eixos de  $-22.5^\circ$  e  $67.5^\circ$ , e fótons azuis de  $22.5^\circ$  e  $112.5^\circ$ . Utilizando um modulador eletro-óptico, a medição dos pares emaranhados sobre estas bases complementares puderam ser trocadas rapidamente. Uma ilustração deste experimento é feita na Figura 2.

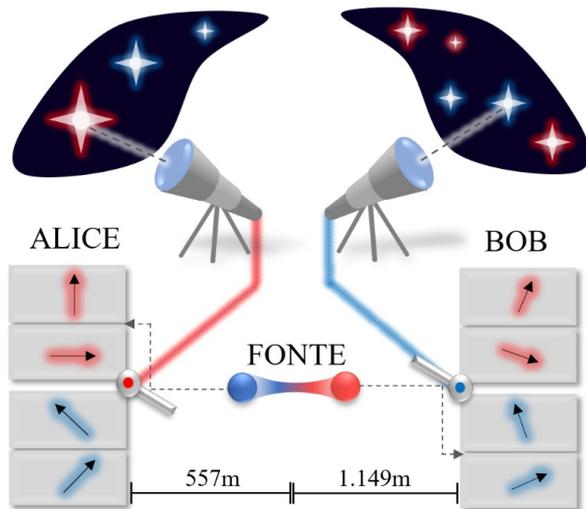


Figura 2: Ilustração feita à partir da descrição do experimento da Ref. [20]: Uma Fonte emite pares de fótons emaranhados para Alice e Bob. Alice recebe naquele momento um fóton vindo da galáxia que é classificado como vermelho: seu arranjo experimental fará com que a polarização do seu fóton do par emaranhado seja medida em um dos eixos de  $0^\circ$  ou  $90^\circ$ . Bob recebe um fóton classificado como azul: seu arranjo experimental fará com que ele meça a polarização do outro fóton do par emaranhado em um dos eixos de  $22.5^\circ$  ou  $112.5^\circ$ .

Na situação descrita, assumindo que as cores dos fótons tivessem sido geradas no momento em que o fóton deixa uma estrela, podemos dizer que a fonte de aleatoriedade teria surgido há pelo menos 600 anos dadas as distâncias entre as estrelas escolhidas e a Terra, encerrando assim o

*loophole* de liberdade de escolha.

O *loophole* de amostragem justa foi encerrado na criação e na detecção dos pares de luz emaranhados. Havia uma eficiência na Fonte de 98% na criação dos pares. Alice e Bob tinham dois relógios atômicos (cada um em um observatório) que estavam sincronizados, registrando assim com precisão o momento da medida de cada partícula para que em seguida, fossem descartados os dados que não garantiam que os fótons detectados pertenciam de fato a um mesmo par emaranhado, assegurando também as medições estivessem causalmente desconectadas.

Enquanto que o limite de correlação para uma teoria realista local com quatro bases de medida é igual a 2 (como foi demonstrado na desigualdade CHSH), o limite quântico é igual a  $2\sqrt{2} \simeq 2.828$ . Por fim, o experimento foi realizado duas vezes: a primeira execução resultou em uma correlação igual a 2.425 e a segunda, igual a 2.502.

Sobre a análise deste experimento foram consideradas diversas implicações que poderiam trazer erros para a violação dessa desigualdade, como por exemplo, fótons que se originaram na atmosfera terrestre (dentro do cone de luz de configuração experimental e criação dos pares emaranhados), problemas com o aparato experimental, até mesmo a possibilidade de que variáveis ocultas poderiam armazenar informações do resultado de cada medida, influenciando assim nas medições posteriores. Ainda assim, segundo a análise dos autores, a probabilidade que o resultado experimental obtido fosse explicado por um modelo de variáveis ocultas locais seria menor que  $1.78 \times 10^{-13}$  para a primeira realização do experimento, e menor que  $3.96 \times 10^{-33}$  para a segunda. Esta análise é feita considerando todos os dados e incertezas do experimento, onde o valor da correlação de 2.425 (obtido na primeira realização) distava 7.31 desvios padrões do valor clássico esperado de 2.00, e o valor 2.502 (obtido na primeira) distava 11.93 desvios padrões.

Assim, podemos concluir que a não-localidade pode ser entendida como um aspecto existente na mecânica quântica.

## V. RETROCAUSALIDADE

De acordo com a relatividade especial de Einstein, se dois eventos  $A$  e  $B$  ocorrem simultaneamente em posições distintas em um referencial inercial, em nenhum outro referencial estes eventos serão simultâneos, dependendo das direções relativas entre estes referenciais, em alguns o evento  $A$  ocorre antes que  $B$ , em outros  $B$  ocorre antes que  $A$  [7]. Todavia, como nenhuma informação pode viajar mais rápido que a velocidade da luz, a causalidade sobre as mecânicas clássica e relativística se mantém preservadas.

Porém, com a existência da não-localidade em fenômenos de emaranhamento quântico, onde a medição realizada sobre uma partícula altera simultaneamente a observação futura da outra, surge o questionamento se a retrocausalidade (onde a causa de um fenômeno precede

seu efeito) pode vir a ser observada nestas situações, uma vez que ocorrem colapsos instantâneos do estado de partículas emaranhadas espacialmente separadas.

Nesta seção será feita uma análise de um experimento onde partículas emaranhadas são submetidas a uma circunstância teoricamente causal. A discussão a seguir considera o ponto de vista de autores como Marlan Scully, que geram ainda muita controvérsia sobre o tema. Devida a limitação de espaço no formato do TCC não será possível entrar em detalhes sobre esta apresentação.

Vamos primeiramente lembrar que, desde o famoso experimento de Young, ao incidir raios de luz em uma fenda dupla de dimensões específicas, o comportamento ondulatório da luz passa a se manifestar, uma vez que sobre um anteparo observamos um padrão de interferência na intensidade da luz [23]. Segundo a interpretação de Copenhague, a função de onda de cada fóton (como de qualquer outra partícula) acaba colapsando ao ser realizada a medição de sua posição (ao atingir o anteparo), e como consequência, foi verificado que qualquer experimento que determine de maneira inequívoca em qual fenda a partícula passou acaba por destruir seu padrão de interferência. Este padrão surge quando as ondas emergentes à partir de cada fenda são coerentes, ou seja, quando os ângulos de fase entre elas são os mesmos. Assim, qualquer aparelho que busque medir em qual fenda um fóton (ou partícula) passou acaba promovendo a decoerência do sistema [24], mesmo que estes aparelhos interajam com a função de onda após ela já ter passado pela fenda, abrindo o questionamento se tal função não pode acabar colapsando retroativamente no tempo.

Em 1982, Marlan Scully e Kai Drühl propuseram um experimento visando investigar até que ponto a informação sobre o comportamento de onda ou de partícula está acessível a um observador, analisando como os resultados experimentais se alteram ao se inserir uma “borracha quântica” capaz de apagar tal informação [25]. O experimento proposto poderia ser realizado sobre uma operação de “escolha atrasada”. Para esclarecer a que este termo se refere, vamos primeiramente fazer a descrição de um experimento realizado em 1999, nomeado de “Borracha quântica de escolha atrasada” [26], onde foi possível se observar o comportamento tanto de onda quanto de partícula de um par de fótons emaranhados. Sua configuração é representada na Figura 3.

Este experimento utilizou um cristal não linear (do tipo *BBO*) capaz de interagir com um fóton de forma a gerar dois novos fótons em um par emaranhado, cada um com metade da energia do original. Foram utilizados também dois *beamsplitters* (“divisores de feixe”) *BSA* e *BS*; cada *beamsplitter* fazia com que 50% dos fótons que incidissem sobre eles fossem transmitidos e 50% refletidos.

O cristal foi colocado logo atrás de uma fenda dupla e então, um feixe de laser disparador de fótons passou a incidir sobre a fenda. Assim, os fótons que passavam por uma das fendas incidiam sobre o cristal em uma região *A*, e os que passavam pela outra, em uma região *B*; ao interagirem com o cristal, criava-se um par de fótons

emaranhados que seguiam duas direções.

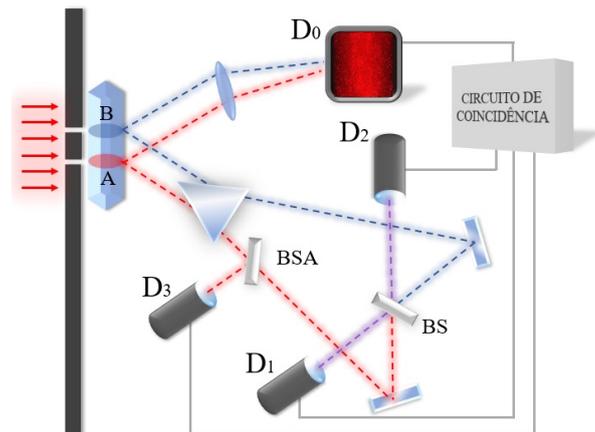


Figura 3: Ilustração da configuração experimental segundo descrição feita na Ref. [26]: Fótons incidiam sobre um cristal nas regiões *A* e *B* gerando pares emaranhados. Um dos fótons de cada par tinha sua posição detectada em  $D_0$  e o outro viria a ser detectado por algum dos sinalizadores  $D_1$ ,  $D_2$  ou  $D_3$ . A informação sobre qual região o par de fótons foi produzida era apagada quando os fótons passavam pelo *beamsplitter BS*. A detecção em  $D_0$  de um fóton era tomada em  $8ns$  antes de qualquer detecção nos sinalizadores do seu respectivo par.

Se um fóton incidisse sobre a região *A* do cristal, um dos fótons do par emaranhado era direcionado para que sua posição fosse medida por um detector  $D_0$  (que varria e registrava a posição do fóton), enquanto o outro era direcionado para passar pelo *beamsplitter BSA*; se este fóton acabasse sendo refletido por *BSA*, ele seria detectado por um sinalizador  $D_3$ ; se fosse transmitido, era direcionado ao *beamsplitter BS*, e novamente, se fosse refletido seria detectado pelo sinalizador  $D_1$  e se fosse transmitido seria detectado pelo sinalizador  $D_2$ .

Se um fóton incidisse sobre a região *B* do cristal, um dos fótons do par emaranhado produzido era direcionado para que sua posição também fosse medida pelo detector  $D_0$ , enquanto o outro era direcionado diretamente para o *beamsplitter BS*, e analogamente, se fosse refletido seria detectado pelo sinalizador  $D_2$  e se fosse transmitido seria detectado pelo sinalizador  $D_1$ .

Dessa maneira, os fótons que eram detectados por  $D_3$  teriam com certeza sido originados na região *A* do cristal e portanto, o observador teria a informação de qual fenda o fóton original passou, contudo, essa informação deixaria de existir para os fótons que eram detectados por  $D_1$  e  $D_2$ , uma vez que o *beamsplitter BS* “apagava” tal informação.

O caminho dos fótons detectados por  $D_0$  era cerca de  $2.5m$  menor do que seus pares emaranhados tomavam para serem detectados nos outros sinalizadores, fazendo com que fossem detectados  $8ns$  antes dos seus pares serem detectados em  $D_1$ ,  $D_2$  ou  $D_3$ .

O detector de posição  $D_0$  e os sinalizadores  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_3$  foram conectados a um “circuito de coincidência” de

modo que após as informações de detecção serem levadas ao circuito, eram marcadas as posições dos fótons em  $D_0$  juntamente com qual sinalizador o fóton do seu respectivo par emaranhado foi detectado. Quando os resultados foram comparados verificou-se que o comportamento de interferência surgiu em  $D_0$  para os pares que tiveram seu outro fóton sinalizado tanto em  $D_1$  quanto em  $D_2$ , como observado nos dados das Figuras 4 e 5, já o padrão clássico surgiu para os pares com fótons sinalizados em  $D_3$ , como mostra a Figura 6.

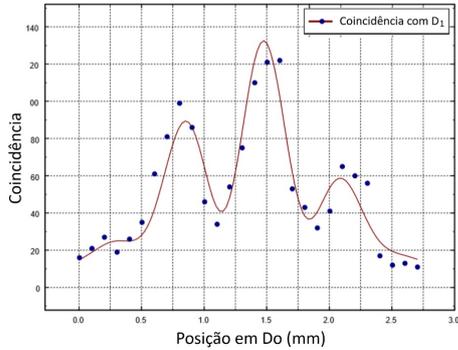


Figura 4: Detecção conjunta entre  $D_0$  e  $D_1$  (Fonte: [26]).

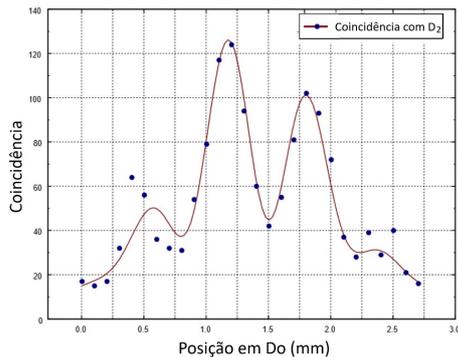


Figura 5: Detecção conjunta entre  $D_0$  e  $D_2$  (Fonte: [26]).

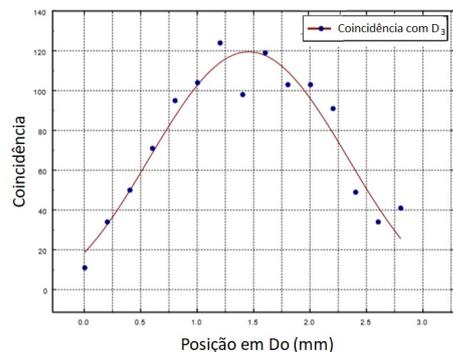


Figura 6: Detecção conjunta entre  $D_0$  e  $D_3$ , onde o padrão de interferência não é observado (Fonte: [26]).

Vale observar que nenhum padrão de interferência é observado sobre  $D_0$  quando não é distinguido a coincidência entre  $D_0$  e os outros sinalizadores, uma vez que os fótons com pares em  $D_1$  e  $D_2$  encontravam-se exatamente fora de fase.

Dessa forma, o padrão de interferência surge quando a informação sobre a trajetória do fóton que passou pela dupla fenda é apagada. Não bastasse isso, como o tempo de medida no detector  $D_0$  durava apenas  $1ns$  enquanto o tempo para o seu par emaranhado ser detectado nos outros sinalizadores era de  $8ns$ , é garantido afirmar que neste caso um fenômeno que deveria ser a causa (medição em  $D_1$  ou  $D_2$ ) ocorre somente após o efeito (padrão de interferência). Por esta razão é dito que o experimento opera em um padrão de “escolha atrasada”, onde a definição do padrão de interferência é tomada após a partícula já ter sido detectada.

Os resultados deste experimento sugerem que o padrão de interferência pode surgir em  $D_0$  antes mesmo que o outro fóton do par emaranhado fosse detectado em algum dos sinalizadores, podendo assim um efeito preceder sua causa.

Pela diferença de fase entre as funções de onda das partículas com seus pares detectados em  $D_1$  e  $D_2$ , não é possível que um padrão de interferência seja observado em  $D_0$  antes que as informações sejam comparadas no Circuito de Coincidência, dessa forma torna-se impossível enviar qualquer informação para o passado, uma vez que o experimentalista não conseguirá distinguir se o padrão é compatível com o de onda ou partícula.

Experimentos mais recentes foram feitos sobre esta temática [27, 28], mostrando que é possível se observar o comportamento tanto de onda como de partícula em uma única configuração experimental que também fazia uma operação do tipo “escolha atrasada”. Tais experimentos abriram uma revisão a respeito do princípio de complementariedade de Bohr [29], que alega que os comportamentos de onda e partícula não podem ser revelados mutuamente em uma única configuração experimental. Nesses experimentos, o comportamento de onda ou de partícula só eram vistos segundo a decisão de medida do experimentalista, após as partículas já terem sido detectadas.

## VI. CONCLUSÕES

Desigualdades de Bell foram comprovadamente violadas pela experimentação ao longo de algumas décadas. O “teste de Bell interestelar” que foi detalhado neste TCC mostrou com altíssimo grau de confiabilidade que a suposição de Localidade não se aplica a fenômenos de emaranhamento quântico.

Embora não haja uma maneira de se comprovar a existência de variáveis ocultas, sabe-se agora que se elas existem, devem ao menos apresentar propriedades não-locais, o que torna esta interpretação física passível de descarte, segundo o critério da navalha de Occam [30].

Ainda não foi descoberto um método experimental de colocar à prova a suposição de Realismo proposta no paradoxo EPR. De qualquer forma, permanece em vigor a interpretação de Copenhagen de que um estado quântico colapsa instantaneamente no momento da medição de algum observável físico, independentemente de quantas partículas (ou graus de liberdade) esteja descrevendo.

Podemos concluir também que a teoria da relatividade pode coexistir (sem paradoxos) com fenômenos quânticos não-locais: Nenhum desses experimentos admite qualquer informação real sendo enviada, havendo apenas a possibilidade de se fazer uma comparação dos resultados obtidos em detectores diferentes após a informação de suas detecções ser enviada por algum tipo de sinal que não ultrapasse a velocidade da luz. É um tanto curioso pensar que a medição de uma partícula em um par emaranhado pode interferir instantaneamente no estado da outra, sem que nenhuma informação seja enviada através do espaço.

A mecânica quântica não faz menção matemática sobre a relação de distância entre as partículas, nem que alguma informação no ato de medida é enviada, porém descreve o que é observado na experimentação, funcio-

nando muito bem como teoria.

Sobre a existência de fenômenos retrocausais, através da análise do experimento “borracha quântica de escolha atrasada” [26], vimos que tais fenômenos podem existir, uma vez que quando comparados os resultados com as detecções conjuntas entre  $D_0$  e os demais sinalizadores, verifica-se a existência do padrão de interferência, mesmo que as partículas em  $D_0$  tenham sido detectadas antes dos demais sinalizadores.

Contudo, essa conclusão deve ser tomada com cuidado por dois motivos; o primeiro é que partimos do pressuposto que “apagar a informação do caminho da luz” é de fato uma situação é causal, o segundo é que as coincidências entre o detector e os sinalizadores só são observadas posteriormente. Nossa noção do que é causa e o que é efeito é construída sobre as limitações da nossa própria experiência clássica de mundo, tornando o ato de “apagar informação” algo que possa não ser necessariamente um evento causal. Além disso, teoricamente, fazer correlações experimentais após uma detecção já ter sido realizada pode promover dados corrompidos. Sendo assim, novos experimentos precisariam ser realizados para o encerramento dessas lacunas.

- 
- [1] J. J. Sakurai, *Modern quantum mechanics - revised edition*, (Late, United States of America, 1994).
- [2] D. J. Griffiths, *Introduction to quantum mechanics*, (Reed College, United States of America, 1995).
- [3] M. Le Bellac, *Quantum Physics*, (Cambridge University Press, United States of America, 2006).
- [4] G. Benenti, G. Casati and G. Strini, *Principles of Quantum Computation and Information, Volume I: Basic Concepts*, (World Scientific, Singapore, 2005).
- [5] G. Rigolin, *Emaranhamento Quântico*, (Instituto de Física Gleb Wataghi, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, Brasil, 2008).
- [6] E. Schrödinger, Discussion of Probability Relations Between Separated Systems, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **31**, 555 (1935).
- [7] H. M. Nussenzeig, *Curso de Física Básica - Vol 4*, (Editora Blusher, Brasil, 2010).
- [8] Encyclopedia Britannica, Realism (2000). <https://www.britannica.com/topic/realism-philosophy#accordion-article-history>. Acesso em: 29 mar. 2019.
- [9] H. Wimmel, *Quantum Physics Observed Reality: A Critical Interpretation of Quantum Mechanics*, (World Scientific, Singapore, 2005).
- [10] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [11] N. Bohr, Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?, *Phys. Rev.* **48** (8), 700 (1935).
- [12] D. Bohm, A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of “Hidden Variables” I, *Phys. Rev.* **5** (2), 166–179 (1958).
- [13] M. M. Wild, *From Classical to Quantum Shannon Theory*, (Cambridge University Press, United States of America, 2019)
- [14] J. Bell, On the Einstein Podolsky Rosen Paradox, *Physics*. **1** (3), 195–200 (1964).
- [15] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony e R. A. Holt, Proposed experiment to test local hidden-variable theories, *Phys. Rev. Lett.*, **23**, 880 (1969).
- [16] J. Maziero, *Correlações clássicas e quânticas sob decoerência*, Dissertação - Mestrado em Física, (Centro de Ciências Naturais e Humanas, Universidade Federal do ABC, Santo André, São Paulo, Brasil, 2009).
- [17] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell’s Theorem, *Phys. Rev. Lett.*, **47** (7), 460–3 (1981).
- [18] A. Garg e N.D. Mermin, Detector inefficiencies in the Einstein-Podolsky-Rosen experiment, *Phys. Rev. D* **25** (12), 3831–5 (1987).
- [19] J. Larsson, Bell’s inequality and detector inefficiency, *Phys. Rev. A* **57** (3), 3304–8 (1998).
- [20] J. Handsteiner, A. S. Friedman, D. Rauch, J. Gallicchio, B. Liu, H. Hosp, J. Koer, D. Bricher, M. Fink, C. Leung, A. Mark, H. T. Nguyen, I. Sanders, F. Steinlechner, R. Ursin, S. Wengerowsky, A. H. Guth, D. I. Kaiser, T. Scheidl and A. Zeilinger, Cosmic Bell Test: Measurement Settings from Milky Way Stars, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 060401 (2017). arXiv:1611.06985v2 [quant-ph].
- [21] S. Pironio, A. Acín, S. Massar, A.B.de La Giroday, D.N. Matsukevich, P. Maunz, S. Olmschenk, D. Hayes, L. Luo, T. A. Manning, e C. Monroe, Random numbers certified by Bell’s theorem, *Nature* (London) **464**, 1021–1024 (2010). arXiv:0911.3427 [quant-ph].
- [22] C. Simon, V. Buzek, N. Gisin, The no-signaling condition and quantum dynamics, *Phys. Rev. Lett.* **87** (12), 170405 (2001).

- [23] H. D. Resnick, *Fundamentos de Física, v. 4. Óptica e Física Moderna*, (Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, Brasil, 1991).
- [24] M. Schlosshauer, Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics, *Reviews of Modern Physics* **76** (4), 1267–1305 (2005).
- [25] M.O. Scully e K. Drühl, Quantum eraser: A proposed photon correlation experiment concerning observation and “delayed choice” in quantum mechanics, *Phys. Rev. A* **25**, 2208 (1982).
- [26] Y. Kim, S.P. Kulik, Y.H. Shih e M. O. Scully, A Delayed Choice Quantum Eraser, *Phys.Rev.Lett.* **84**, 1-5 (2000). arXiv:quant-ph/9903047v1.
- [27] J. Tang, Y. Li, X. Xu, G. Xiang, C. Li G. Guo, Realization of quantum Wheeler’s delayed-choice experiment, *Nature Photonics* **6**, 600–604 (2012).
- [28] R. Auccaise, R. M. Serra, J. G. Filgueiras, R. S. Sarthour, I. S. Oliveira, e L. C. Céleri, Experimental analysis of the quantum complementarity principle, *Phys. Rev.* **85**, 032121 (2012).
- [29] N. Bohr, The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory, *Nature* **121**, 580–590 (1928).
- [30] B. Lazaretti, O que é a Navalha de Occam? (2014). <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/o-que-e-a-navalha-de-occam/>. Acesso em: 20 mar. 2019.