

Realização simplética de carga elétrica em campos de distribuições de monopolo

Gustavo Henrique Silva Alves

July 8, 2020

Centro de Ciências Naturais e Humanas, UFABC,
Santo André - SP, 09210-170, Brasil

1 Resumo

Este trabalho de conclusão de curso é uma revisão do artigo homônimo do Professor Vladislav Kupryanov. Discute-se aqui uma abordagem para o problema da existência do monopolo magnético, a partir da construção de relações algébricas dos momentos covariantes e por extensão das variáveis do espaço de fase, estuda-se a dinâmica de uma carga elétrica com campo gerado pela distribuição de monopolo magnético e depois a dinâmica quântica de uma partícula carregada em um campo magnético arbitrário.

Na introdução são apresentados assuntos que serão necessários no decorrer do trabalho. O primeiro assunto se refere as Equações de Maxwell, onde é demonstrado que no caso de existência de densidade de cargas magnéticas, as Equações de Maxwell são reduzidas para duas equações em função de um campo que depende do campo elétrico e do magnético. O segundo assunto da introdução é o Monopolo de Dirac onde é abordado a proposta de Paul Dirac para a existência do monopolo magnético, sua relação com a quantização da carga elétrica e as diferenças com abordagem da referência [1].

Na Metodologia é apresentado o formalismo matemático proposto no artigo original [1] e esse formalismo se utiliza em uma outra configuração do vetor potencial magnético.

A seção Exemplo é dividida em três partes. A primeira parte é extensão da álgebra de monopolo magnético para configuração de interesse do projeto. A segunda parte é estudar a Hamiltoniana do sistema, as constante de movimento e descrever a equações de movimento das coordenadas. A terceira parte é descrever a dinâmica quântica do sistema e o espectro de energia do sistema.

A seção final do trabalho é a Discussão do Resultados e Conclusão onde é abordado os resultados da nova configuração do vetor potencial magnético, tanto para o caso clássico e o quântico, e comparada com a configuração estudada na referência [1].

2 Introdução

2.1 Equações de Maxwell

O primeiro assunto abordado, as Equações de Maxwell, além de serem as equações fundamentais do eletromagnetismo clássico, é tratado aqui como a existência de distribuição de cargas magnéticas alterariam as equações de Maxwell e inclusive a simetria entre campo magnético e elétrico. Em unidades em que a velocidade da luz é igual a 1, as equações de Maxwell são:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \tag{1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}, \quad (3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (4)$$

Entre as previsões das equações de Maxwell estão a explicação da luz como onda do campo eletromagnético e a velocidade da luz não depende do referencial inercial. Esses resultados levaram a desenvolver a Teoria Especial da Relatividade.

No seu formalismo matemático, as equações de Maxwell descrevem o comportamento de dois campos vetoriais, o campo magnético \vec{B} e o campo elétrico \vec{E} . Esses campos vetoriais são função do tempo e definido no \mathbb{R}^3 . Os campos elétricos e magnéticos também depende de outros parâmetros que são: ρ , a densidade de carga elétrica e \vec{J} , a densidade de corrente elétrica.

No vácuo, as equações de Maxwell são:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (6)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (8)$$

Essas equações mostram a dualidade entre o campo elétrico e o campo magnético

$$\vec{E} \rightarrow -\vec{B}, \quad (9)$$

$$\vec{B} \rightarrow \vec{E}. \quad (10)$$

Portanto é possível definir uma função complexa em função do elétrico e do magnético, sua transformação é dada por:

$$\vec{Z} = \vec{E} + i\vec{B}, \quad (11)$$

$$\vec{Z} \rightarrow -i\vec{Z}. \quad (12)$$

As equações de Maxwell em função de \vec{Z} são:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{Z} = 0, \quad (13)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{Z} = i \frac{\partial \vec{Z}}{\partial t}. \quad (14)$$

Para definir essa relação no caso em que o campo eletromagnético não está no vácuo, precisa-se definir a carga e corrente de forma diferente do que anteriormente.

Portanto, a densidade de carga é definida como:

$$\rho = \rho_e + i\rho_m. \quad (15)$$

Onde ρ_e é densidade de carga elétrica e ρ_m é densidade de carga magnética. A corrente de carga é definida como:

$$\vec{J} = \vec{J}_e + i\vec{J}_m. \quad (16)$$

A corrente de carga elétrica é \vec{j}_e e a corrente de carga magnética \vec{j}_m .

Dessa forma, as equações de Maxwell demonstram maior simetria na relação entre dualidade dos campos elétricos e magnéticos.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_e, \quad (17)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{J}_m, \quad (18)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{J}_e, \quad (19)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \rho_m. \quad (20)$$

As equações de Maxwell são reduzidas para:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{Z} = \rho, \quad (21)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{Z} = i\left(\frac{\partial \vec{Z}}{\partial t} + \vec{J}\right). \quad (22)$$

A relação entre as cargas e correntes, ρ e \vec{J} , que mantém a dualidade das equações é :

$$\rho \rightarrow -i\rho, \quad (23)$$

$$\rho_e \rightarrow -\rho_m, \quad \rho_m \rightarrow \rho_e. \quad (24)$$

$$\vec{J} \rightarrow -i\vec{J}, \quad (25)$$

$$\vec{J}_e \rightarrow -\vec{J}_m, \quad \vec{J}_m \rightarrow \vec{J}_e. \quad (26)$$

Como abordado antes, a existência da distribuição de densidade e a corrente de carga magnética implica em uma maior simetria entre os campos elétrico e magnéticos. Contudo, não há evidência experimental desse cenário, mas se houvesse, tal existência teria grande interesse teórico devido suas implicações de simetria ao Eletromagnetismo [3].

2.2 Monopolo de Dirac

Outro resultado importante sobre os monopolos magnéticos foi apresentado por Paul Dirac. Ele estudou a existência desse fenômeno no contexto da quantização da carga elétrica. Seu argumento foi que se existisse um monopolo magnético, todas as partículas teriam cargas elétricas múltiplas de um valor fundamental.

Em mecânica quântica, quando uma partícula com carga q percorre um loop γ em torno de fluxo de um campo magnético. A sua função de onda ganha uma fase:

$$\psi' \rightarrow e^{-\frac{iq_e}{\hbar} \int_{\gamma} \vec{A}} \psi. \quad (27)$$

Onde A é o vetor potencial magnético, esse efeito é conhecido como Aharonov-Bohm. Usando o teorema de Stokes, a integral do vetor potencial em torno do caminho fechado γ se torna a integral do fluxo do campo magnético por um disco D .

$$\int_{\partial D} \vec{A} = \int_D \vec{\nabla} \times \vec{A} = \int_D \vec{B}. \quad (28)$$

De acordo com a referência [3], o espaço é $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Onde o fluxo magnético que descreve esse campo é:

$$\int_{S^2} \vec{B} = q_m, \quad (29)$$

Onde S^2 é uma esfera unitária centrada na origem.

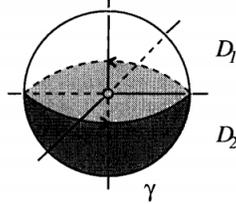


Figure 1: Órbita da partícula carregada em volta no monopolo magnético [3]

Para calcular a fase, tem duas maneiras. A primeira é usar o disco D_1 e calcular o fluxo magnético no hemisfério norte da esfera, ou usar o disco D_2 e calcular o fluxo pelo hemisfério sul da esfera. As duas maneiras tem o mesmo resultado. A diferença entre essas duas maneiras é na orientação da trajetória de γ e assim no sinal do resultado da integral. Para o disco D_1 , a integral é:

$$\int_{D_1} \vec{B} = \frac{q_m}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta \, d\phi = \frac{q_m}{2}. \quad (30)$$

Mas se integramos na orientação oposta da trajetória γ .

$$\int_{D_2} \vec{B} = -\frac{q_m}{4\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \phi \, d\theta \, d\phi = -\frac{q_m}{2}. \quad (31)$$

Substituindo esse valor obtido na integral (51) na fase da função de onda. O valor da fase tem que ser igual $2\pi N$, para o vetor de estado ser invariante.

$$e^{\frac{iq_e q_m}{\hbar}} = 1. \quad (32)$$

Isso implica que o produto entre a carga elétrica e a carga magnética é múltipla de uma unidade fundamental.

$$q_e q_m = Nh. \quad (33)$$

Esse resultado é interessante, pois demonstra que a existência de um monopolo magnético implica na quantização da carga elétrica, ou seja, uma vez que é um fato experimental que a carga elétrica é quantizada, o argumento de Dirac implicaria na existência de monopolo magnético [3].

Esse resultado é diferente do discutido na primeira seção, pois nas Equações de Maxwell a fonte do campo magnético é uma distribuição suave de densidade de carga magnética e na Quantização de Dirac é tratado como apenas uma carga pontual. No artigo [1] é retomado a abordagem do campo magnético gerado por uma distribuição de monopolo magnético.

3 Metodologia

A realização simplética introduz novas coordenadas no espaço de fase. A álgebra das coordenadas auxiliares são descritas pelo Parênteses de Poisson, cuja definição é:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} \right). \quad (34)$$

As primeiras integrais ou constantes de movimento são determinadas pela derivada total no tempo de uma função ser nula. Pelo Teorema de Liouville, a derivada total é dada por:

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (35)$$

Quando a função f não depende do tempo. As primeiras integrais são determinadas pela equação:

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} = 0 \quad (36)$$

Esse resultado será utilizado para determinar as primeiras integrais no exemplo da seção Integrabilidade. O espaço de fase é parametrizado pelas coordenadas de posição $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ e as variáveis de momento cinético, $\vec{\pi} = m\vec{x}$. A álgebra das coordenadas na presença do campo magnético são definidas:

$$\{x^i, x^j\} = 0, \quad (37)$$

$$\{x^i, \bar{\pi}_j\} = \delta_i^j, \quad (38)$$

$$\{\bar{\pi}_i, \bar{\pi}_j\} = e\epsilon_{ijk}B^k. \quad (39)$$

Esses parênteses não são definidos como de Poisson, pois não satisfazem a identidade de Jacobi.

$$\{\bar{\pi}_i, \bar{\pi}_j, \bar{\pi}_k\} := \frac{1}{3} \{\bar{\pi}_i, \{\bar{\pi}_j, \bar{\pi}_k\}\} + \text{permutação} = e\epsilon_{ijk}\vec{\nabla} \cdot B^k. \quad (40)$$

No artigo, o interesse principal é no caso onde o campo magnético é dado por uma distribuição suave de monopolos magnéticos. Portanto, $\nabla \times \vec{B} \neq 0$ e isso implica que não existe vetor potencial local associado ao campo magnético e a álgebra das equações (37), (38) e (39) é conhecida como álgebra do monopolo magnético.

O próximo passo no artigo é construir uma "symplectic embedding" da álgebra do monopolo magnético. Para isso, se introduz novas coordenadas no espaço de fase, estendendo para 12 dimensões. As coordenadas de posição são $x^I = (x^i, \tilde{x}^i)$ e coordenadas de momento $p_I = (p_i, \tilde{p}_i)$, onde $i = 1, 2, 3$ e $I = 1, \dots, 6$.

Os parênteses de Poisson para essas coordenadas são:

$$\{x^I, x^J\} = 0, \quad (41)$$

$$\{p_I, p_J\} = 0, \quad (42)$$

$$\{x^I, p_J\} = \delta_J^I. \quad (43)$$

Associado ao campo magnético estão os momentos covariantes:

$$\pi_I = (\pi_i, \tilde{\pi}_i) = p_I - eA_I(x). \quad (44)$$

Os parênteses de Poisson correspondentes são:

$$\{\pi_I, \pi_J\} = eF_{IJ}(x^I) \rightarrow F_{IJ} = \partial_I A_J - \partial_J A_I \quad (45)$$

Os parênteses que não se anulam dos momentos covariantes são:

$$\{x^i, \pi_j\} = \{\tilde{x}^i, \tilde{\pi}_j\} = \delta_j^i, \quad (46)$$

$$\{\pi_i, \pi_j\} = \frac{e}{2}(\epsilon_{ijk}\partial_l B^k(\vec{x}) - \epsilon_{ijl}\partial_k B^k(\vec{x})x^l), \quad (47)$$

$$\{\pi_i, \tilde{\pi}_j\} = \{\tilde{\pi}_i, \pi_j\} = \frac{e}{2}\epsilon_{ijk}B^k(\vec{x}). \quad (48)$$

Para relacionar com a álgebra de monopolo magnético é introduzido a relação:

$$\bar{\pi} = \pi + \tilde{\pi} \quad (49)$$

Agora as relações do parênteses de Poisson que não se anulam são:

$$\{x^i, \bar{\pi}_j\} = \{\tilde{x}^i, \bar{\pi}_j\} = \{\tilde{x}^i, \tilde{\pi}_j\} = \delta_j^i, \quad (50)$$

$$\{\bar{\pi}_i, \bar{\pi}_j\} = e\epsilon_{ijk}B^k(\vec{x}) + \frac{e}{2}(\epsilon_{ijk}\partial_l B^k(\vec{x}) - \epsilon_{ijl}\partial_k B^k(\vec{x})x^l), \quad (51)$$

$$\{\bar{\pi}_i, \tilde{\pi}_j\} = \{\tilde{\pi}_i, \bar{\pi}_j\} = \frac{e}{2}\epsilon_{ijk}B^k(\vec{x}). \quad (52)$$

A equação que define o movimento de uma partícula num campo eletromagnético é equação da força de Lorentz [3]:

$$m\ddot{\vec{x}} = e(\vec{E} + \dot{\vec{x}} \times \vec{B}). \quad (53)$$

Para obter as equações em segunda ordem das coordenadas (x, \tilde{x}) é determinado a Hamiltoniana apropriada em função das coordenadas (x^I, π_I) .

$$H(x^I, \pi_I) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\pi} & \tilde{\pi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\pi} \\ \tilde{\pi} \end{pmatrix} + V(x^I), \quad (54)$$

Escolhendo os parâmetros arbitrário da Hamiltoniana, como as constantes que são $a = c = 0$ e $b = \frac{2}{m}$. As relações (48), (51) e (47) dos parênteses de Poisson do momentos π e $\tilde{\pi}$, também é escolhido os potenciais V e o \vec{A} :

$$V(x^I) = -\frac{e}{2}(\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) + \nu(\vec{x})), \quad (55)$$

$$\vec{A}(x^I) = \alpha(x^I) - \frac{1}{2}\vec{x} \times \vec{B}(x^I), \quad (56)$$

Essas condições implicam que a Hamiltoniana tem o formato:

$$H(x^I, \pi_I) = \frac{2\pi \cdot \tilde{\pi}}{m} - \frac{e}{2}(\vec{x} \cdot \vec{E}(\vec{x}) + \nu(\vec{x})). \quad (57)$$

Essa Hamiltoniana implica que as equações de movimento são:

$$\ddot{x}_i = \frac{e}{m}\epsilon_{ijk}\dot{x}^j B^k(\vec{x}) + \frac{e}{m}E^i(\vec{x}), \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}}_i &= \frac{e}{m}[\partial_i \alpha_j(x^I) - \partial_j \alpha_i(x^I) + (\epsilon_{ijk}\partial_l B^k - \epsilon_{ijl}\partial_k B^k)\tilde{x}^l]\dot{x}^j \\ &+ \frac{e}{m}\epsilon_{ijk}\dot{\tilde{x}}^j B^k(\vec{x}) + \frac{e}{m}(\tilde{x}^j \partial_i E_j(\vec{x}) + \partial_i \nu(\vec{x})). \end{aligned} \quad (59)$$

Esse resultado demonstra que a inclusão de um campo magnético e de um elétrico genéricos exige a presença de graus de liberdade auxiliares \tilde{x}^i [1].

Na referência [1], é determinado que os graus de liberdade auxiliares só podem ser eliminados de forma consistente no caso onde não há fonte para o campo magnético e elétrico, pois permitem escolher os potenciais \vec{A} e V adequados que as equações de movimento coincidem com a força de Lorentz.

4 Exemplo

4.1 Relações algébricas

A parte final do projeto consiste em estender os resultados do artigo original para outra configuração: o campo potencial vetorial. Assim, aplicando aqui as relações algébricas que são determinadas no artigo original [1].

No artigo [1], os exemplos estudados são o de simetria esférica do campo magnético $\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\rho}{3}\vec{x}$ e o de simetria axial $\vec{B} = (0, 0, z\rho)$. No projeto, a configuração estudada é a $\vec{B} = (0, 0, z^2\rho)$. O potencial vetorial \vec{A} na configuração de espaço estendida é definido como:

$$\vec{A}(x^I) = \left(\frac{-\rho z^2 \tilde{y}}{2}, \frac{\rho z^2 \tilde{x}}{2}, 0 \right), \quad (60)$$

$$\vec{\tilde{A}}(x^I) = 0. \quad (61)$$

As relações triviais da álgebra simplética são:

$$\{x^i, \bar{\pi}_j\} = \{\tilde{x}^i, \bar{\pi}_j\} = \{\tilde{x}^i, \tilde{\pi}_j\} = \delta_j^i. \quad (62)$$

Os parênteses de Poisson que não se anulam para os momentos covariante são:

$$\{\bar{\pi}_x, \bar{\pi}_y\} = e\rho z^2, \quad (63)$$

$$\{\bar{\pi}_x, \bar{\pi}_z\} = \frac{e\rho y^2}{2}, \quad (64)$$

$$\{\bar{\pi}_y, \bar{\pi}_z\} = \frac{-e\rho x^2}{2}, \quad (65)$$

$$\{\bar{\pi}_x, \tilde{\pi}_y\} = \{\tilde{\pi}_y, \bar{\pi}_x\} = \frac{e\rho x^2}{2}. \quad (66)$$

4.2 Integrabilidade

Utilizando a Hamiltoniana da equação (57) como o potencial $V = 0$:

$$H = \frac{2\pi \cdot \tilde{\pi}}{m}. \quad (67)$$

Os momentos da hamiltoniana são

$$\pi_i = p_i - e\vec{A}_i, \quad (68)$$

$$\tilde{\pi}_i = \tilde{p}_i. \quad (69)$$

O vetor potencial magnético nas coordenadas estendidas são $A_I = (A_i, \tilde{A}_i)$

$$\vec{A} = \left(\frac{-\rho z^2 \tilde{y}}{2}, \frac{\rho z^2 \tilde{x}}{2}, 0 \right), \quad (70)$$

$$\vec{\tilde{A}} = 0. \quad (71)$$

No caso, a Hamiltoniana descrita pela equação (67) e os momentos $\tilde{\pi}_i$. Os parênteses de Poisson são:

$$\dot{\tilde{\pi}}_x = \{\tilde{\pi}_x, H\} = w z^2 \tilde{\pi}_y, \quad (72)$$

$$\dot{\tilde{\pi}}_y = \{\tilde{\pi}_y, H\} = -w z^2 \tilde{\pi}_x, \quad (73)$$

$$\dot{\tilde{\pi}}_z = \{\tilde{\pi}_z, H\} = 0. \quad (74)$$

Para as coordenadas (x, y, z) , os parênteses de Poisson são:

$$\dot{x} = \{x, H\} = \frac{2}{m} \tilde{\pi}_x, \quad (75)$$

$$\dot{y} = \{y, H\} = \frac{2}{m} \tilde{\pi}_y, \quad (76)$$

$$\dot{z} = \{z, H\} = \tilde{\pi}_z. \quad (77)$$

A equação (77) implica que a coordenada z é descrita pela equação (78)

$$z = v_z t + z_0 \quad (78)$$

Com a escolha apropriada da origem das coordenadas, $z_0 = 0$ e assumindo que v_z é constante e $v_z > 0$.

Esse resultado é substituído na equação do $\tilde{\pi}_x$ e, desse modo, é obtido as equações diferenciais para esses $\tilde{\pi}_x$.

$$\dot{\tilde{\pi}}_x = w(v_z t)^2 \tilde{\pi}_y, \quad (79)$$

$$\ddot{\tilde{\pi}}_x = 2w(v_z^2 t) \tilde{\pi}_y + w(v_z t)^2 \dot{\tilde{\pi}}_y, \quad (80)$$

$$\ddot{\tilde{\pi}}_x = 2w(v_z^2) \frac{\dot{\tilde{\pi}}_x}{w(v_z t)^2} + w(v_z t)^2 [-w(v_z t)^2] \tilde{\pi}_x, \quad (81)$$

$$\ddot{\tilde{\pi}}_x - 2 \frac{\dot{\tilde{\pi}}_x}{t} + w^2 (v_z t)^4 \tilde{\pi}_x = 0. \quad (82)$$

O resultado da EDO (82) é:

$$\tilde{\pi}_x(t) = C_1 \cos\left(\frac{wv_z^2 t^3}{3}\right) + C_2 \sin\left(\frac{wv_z^2 t^3}{3}\right). \quad (83)$$

No artigo original, as condições de contorno impostas são:

$$\tilde{\pi}_x(0) = 0; \quad \tilde{\pi}_y(0) = \frac{mv_y}{2}, \quad (84)$$

Portanto $\tilde{\pi}_x$ é igual a:

$$\tilde{\pi}_x(t) = \frac{mv_y}{2} \sin\left(\frac{wv_z^2 t^3}{3}\right). \quad (85)$$

Após determinar o valor de $\tilde{\pi}_x$ é possível determinar a dinâmica da coordenadas $\tilde{\pi}_y, x, y$, utilizando as relações (73), (75) e (76)

$$\tilde{\pi}_y(t) = \frac{mv_y}{2} \cos\left(\frac{wv_z^2 t^3}{3}\right), \quad (86)$$

$$x(t) = \frac{2}{m} \frac{-iAt}{6} \left(\frac{\Gamma(1/3, iat^3)}{\sqrt[3]{iat^3}} - \frac{\Gamma(1/3, -iat^3)}{\sqrt[3]{-iat^3}} \right) \quad (87)$$

$$y(t) = \frac{2}{m} \frac{-At(\sqrt[3]{iat^3}\Gamma(1/3, -iat^3) + \sqrt[3]{-iat^3}\Gamma(1/3, iat^3))}{6\sqrt[3]{a^2 t^6}} \quad (88)$$

As coordenadas tem sua dinâmica determinadas por funções de Gamma incompletas. As constantes são $A = \frac{mv_y}{2}$ e $a = \frac{wv_z^3}{3}$. Escolhendo $A = 1$, $a = 1$ e $v_z = 1$. A órbita da partícula carregada é dada pela função parametrizada, $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, é:

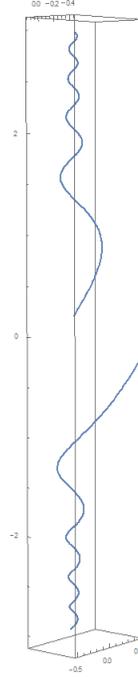


Figure 2: Órbita da partícula carregada

4.3 Quantização

Nessa seção é abordado a dinâmica quântica da realização simplética. Como no formalismo quântico usual, as coordenadas do espaço de fase são promovidas para operadores no espaço de Hilbert. No espaço de posição, as coordenadas $x^I = (x^i, \tilde{x}^i)$ se tornam os operadores de posição que são $\hat{x}^I \Psi(x) = x^I \Psi(x)$ e as coordenadas de momento $p_I = (p_i, \tilde{p}_i)$ são os operadores de momento são $\hat{p}_I \Psi(x) = -i\hbar \partial_I \Psi(x)$ com $\partial_I = (\partial_i, \tilde{\partial}_i)$.

A Hamiltoniana quântica é:

$$\hat{H} = \frac{2}{m} \hat{\pi} \cdot \hat{\pi}, \quad (89)$$

Onde os momentos são:

$$\hat{\pi}_I = (\hat{\pi}_i, \hat{\tilde{\pi}}_i) = -i\hbar \partial_I - eA_I, \quad (90)$$

$$\hat{H} = \frac{2}{m} (-i\hbar \partial_i - eA_i) \cdot (-i\hbar \tilde{\partial}_i - e\tilde{A}_i). \quad (91)$$

Os parênteses de Poisson são promovidos a comutadores. Os comutadores mais relevante são:

$$[\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_j] = [\hat{\pi}_i, \hat{\pi}_j] = \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} \hat{B}^k. \quad (92)$$

A Hamiltoniana descrita por (89) tem o problema de ser um operador não necessariamente limitado, ou seja, o operador não está definido para todo espaço de Hilbert. Para lidar com esse problema, de acordo com a referência [1], a Hamiltoniana é definida em dois operadores limitados:

$$\hat{H} = \hat{H}_+ - \hat{H}_- = \frac{1}{m} (\hat{\pi}_{+i} \cdot \hat{\pi}_+^i - \hat{\pi}_{-i} \cdot \hat{\pi}_-^i), \quad (93)$$

Onde:

$$\hat{\pi}_{i\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\pi}_i \pm \hat{\pi}_i). \quad (94)$$

E a Hamiltoniana em função de π_+ e π_- é:

$$\hat{H} = \frac{1}{m} (\hat{\pi}_{x+}^2 + \hat{\pi}_{y+}^2) - \frac{1}{m} (\hat{\pi}_{x-}^2 + \hat{\pi}_{y-}^2) + \frac{2}{m} \hat{p}_z \hat{p}_z. \quad (95)$$

Como a Hamiltoniana não depende \tilde{z} , isso implica que $[\hat{H}, \hat{p}_z] = 0$ e a função de onda é:

$$\Psi(\vec{x}, \vec{\tilde{x}}) = e^{i\tilde{p}_z \tilde{z}} \Psi(\tilde{x}, x, y, z), \quad (96)$$

Com

$$\hat{p}_z \Psi_{\tilde{p}_z} = \tilde{p}_z \Psi_{\tilde{p}_z}. \quad (97)$$

Portanto, a Hamiltoniana é descrita por:

$$\hat{H} = \frac{1}{m} (\hat{\pi}_{x+}^2 + \hat{\pi}_{y+}^2) - \frac{1}{m} (\hat{\pi}_{x-}^2 + \hat{\pi}_{y-}^2) + \frac{2}{m} \hat{p}_z \tilde{p}_z. \quad (98)$$

Onde $\tilde{p}_z \in \mathbb{R}$. Os comutadores dos momentos π_{\pm} que não se anulam são:

$$[\hat{\pi}_{x\pm}, \hat{\pi}_{y\pm}] = \pm \frac{i\hbar}{2} e\rho \hat{z}^2, \quad (99)$$

$$[\hat{\pi}_{x\pm}, \hat{p}_z] = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}} e\rho \hat{z} \hat{y}, \quad (100)$$

$$[\hat{\pi}_{y\pm}, \hat{p}_z] = -\frac{i\hbar}{\sqrt{2}} e\rho \hat{z} \hat{x}. \quad (101)$$

O próximo passo é definir os operadores de aniquilação e criação:

$$a = \sqrt{\frac{2}{m\hbar\omega}} (\pi_{\pm x} + i\pi_{\pm y}), \quad (102)$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{2}{m\hbar w}}(\pi_{\pm x} - i\pi_{\pm y}), \quad (103)$$

Onde w é definido por:

$$w = \frac{e\rho}{m}, \quad (104)$$

O comutador entre os operadores de aniquilação e criação é:

$$[\hat{a}_\pm, \hat{a}_\pm^\dagger] = 2z^2. \quad (105)$$

A Hamiltoniana em função dos operadores de criação e aniquilação é:

$$\hat{H} = \frac{\hbar w}{2}(\hat{a}_+ \hat{a}_+^\dagger - \hat{a}_- \hat{a}_-^\dagger - 2\hat{z}^2) + \frac{2}{m}\hat{p}_z \tilde{p}_z. \quad (106)$$

5 Discussão dos Resultados e Conclusão

Neste trabalho de conclusão de curso o nosso foco principal foi primeiro em descrever o formalismo geral proposto no artigo [1] e segundo em aplicar este formalismo para a construção de formalismo Hamiltoniano e a quantização da partícula carregada no campo magnético externo, $B = (0, 0, z^2\rho)$. Este campo corresponde a distribuição da carga magnética com a densidade igual a $2z$. No artigo [1] o principal exemplo considerado foi a carga elétrica no campo magnético criado pela distribuição da carga magnética constante e uniforme pelo todo espaço. Neste trabalho decidimos considerar a generalização do exemplo considerado em [1], tomando a distribuição da carga magnética como uma função linear em coordenadas.

O objetivo do nosso projeto é de estudar as distribuições de carga magnética que admitem a construção da álgebra completa das integrais de movimento, assim como no caso do monopolo de Dirac. Devido ao tempo neste TCC somente foi possível considerar a distribuição da carga magnética linear em coordenadas. Fisicamente a dinâmica da carga elétrica nesta configuração é bem parecida com o exemplo da distribuição da carga magnética constante e uniforme considerada em [1].

A configuração do campo magnético do exemplo estudado implicou na dependência em t^3 nos momentos covariantes $\tilde{\pi}_i$ e, assim, as coordenadas de posição são descritas por uma combinação de funções gammas incompletas, sua dinâmica clássica é descrita por duas órbitas que são descontínuas onde $t = 0$. Na parte quântica do projeto, os passos foram análogos com a referência [1], o resultado foi a Hamiltoniana sendo uma função contínua das coordenadas de posição. Isso já era, esperado pois classicamente o sistema não é confinado.

No exemplo estudado também é consistente com a referência [1], pois confirmar a necessidade de graus de liberdade auxiliares no caso em que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \neq 0$.

Outros projetos que usam o formalismo apresentado são, por exemplo, a referência [6], na qual se discute o problema da distribuição de monopolo magnéticos,

mas é utilizado o formalismo Lagrangiano invés da Hamiltoniana. Nesse artigo é constatado também a necessidade de variáveis auxiliares para descrever o sistema e o formalismo é estendido para o caso relativístico e simetria não-abeliana. Na referência [7] é estudada um sistema de plasma de partículas carregadas e nessas condições é determinado que a estrutura de Poisson não é "twisted".

References

- [1] KUPRIYANOV, Vladislav G.; SZABO, Richard J.. Symplectic realization of electric charge in fields of monopole distributions. *Physical Review D*, **98**, 045005, (2018).
- [2] PATHRIA, R. K.; BEALE, Paul D.. *Statistical Mechanics*. 3. ed. Oxford, Uk: Elsevier, 2011.
- [3] BAEZ, J.; MUNIAIN, P. P. *Gauge fields, knots, and gravity*. Singapore: World Scientific, 1995.
- [4] MARDER, Michael P.. *Condensed Matter Physics*. Toronto: John Wiley Sons, 2000.
- [5] DIRAC, Paul Adrien Maurice, Quantised singularities in the electromagnetic field,133, *Proc. R. Soc. Lond. A* <http://doi.org/10.1098/rspa.1931.0130>
- [6] MARMO, G.; SCARDAPNE, Emanuela; STERN, A; VENTRIGLIA; Franco. VITALE; Patrizia. Lagrangian formulation for electric charge in a magnetic monopole distribution. *Physical Review D*, **100**, 085007, (2019)
- [7] LAINZ, Manuel; SARDÓN, Cristina; WEINSTEIN, Alan. Plasma in a Monopole Background Does Not Have a Twisted Poisson Structure. *Physical Review D* 100.10 (2019): n. pag. Crossref. Web.