

Estudo sobre aplicações de Integrais de Caminho e Diagramas de Feynman em Teoria Quântica de Campos

Filipe C. Baradelli, Alysson F. Ferrari
Centro de Ciências Naturais e Humanas,
Universidade Federal do ABC - UFABC
Trabalho de Conclusão de Curso em Física
(Dated: Agosto 2020)

O formalismo da integral de caminho é introduzido, bem como sua motivação, na mecânica quântica. É discutida a forma como as fontes alteram a amplitude no vácuo para que se estude o campo escalar no caso livre e no caso com interação (teoria ϕ^3). São apresentados os *diagramas de Feynman* nos espaços de posição e momento, bem como as equações que representam, contendo seus propagadores, fontes e interações.

I. INTRODUÇÃO

A Mecânica Quântica é uma teoria que se comporta de maneira incompatível com a Mecânica Clássica em escalas microscópicas. O Princípio da Incerteza de Heisenberg,

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (1)$$

nos diz que a energia pode oscilar de maneira aleatória temporariamente (flutuação quântica), já a Relatividade Restrita de Einstein afirma que “a massa de um corpo é uma medida de seu conteúdo de energia” [1],

$$E = m_{rel}c^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}c^2, \quad (2)$$

onde a massa relativística m_{rel} relaciona a massa de repouso m_0 com a velocidade da partícula v e a velocidade da luz c através fator de Lorentz. Com ambas as teorias, podemos chegar a conclusão de que as flutuações quânticas de energia podem se converter em massa, originando novas partículas que não estavam presentes.

A Teoria Quântica de Campos (TQC) é utilizada para combinar a Mecânica Quântica e a Relatividade Restrita através de uma estrutura que utilize campos para tanto, uma vez que esse formalismo colabora para a preservação da causalidade, onde os mesmos atuam como intermediários entre as interações. A mecânica Lagrangiana, que é utilizada na Teoria Clássica de Campos, também aponta uma percepção mais profunda do sistema, explorando suas simetrias e conservações. Dentre suas ferramentas, a TQC utiliza das integrais de caminho de Feynman para construir seus diagramas, que representam as séries perturbativas. O formalismo das integrais de caminho foi desenvolvido pelo físico teórico Richard Phillips Feynman em 1948[2], que também publicou seu primeiro diagrama em 1949 na *Physical Review*[3].

A integral de caminho surge da contabilização de todos os caminhos possíveis que uma partícula pode percorrer. Pode-se tomar como inspiração o experimento

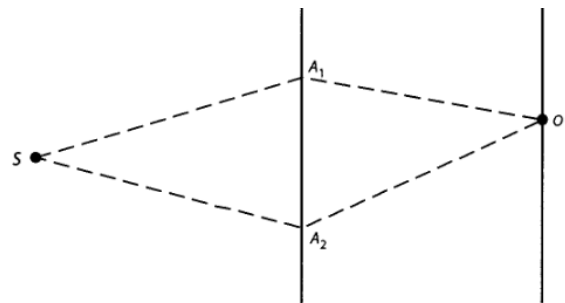


FIG. 1. Uma partícula emitida da fonte S num tempo $t = 0$ passa por uma das duas fendas, A_1 ou A_2 , de uma tela e é detectada num tempo $t = T$ por um detector localizado no ponto O (imagem extraída de [4]).

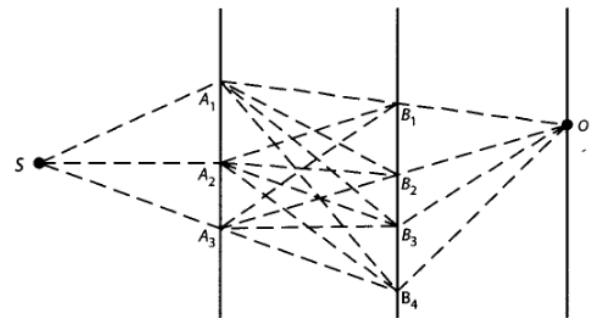


FIG. 2. O mesmo caso apresentado na figura 1, porém com mais telas e mais fendas (imagem extraída de [4]).

da fenda dupla, onde uma partícula é emitida de uma fonte e deve chegar ao detector passando pelas fendas de uma tela. A amplitude de detecção é dada pelo princípio da superposição, que se segue somando a amplitude de propagação da partícula por cada fenda e chegando no ponto destinado. O mesmo acontece para um número maior de fendas. Aumentando este número, ao se tomar o limite onde se tende para infinito, a amplitude será a soma de todos os infinitos caminhos possíveis.

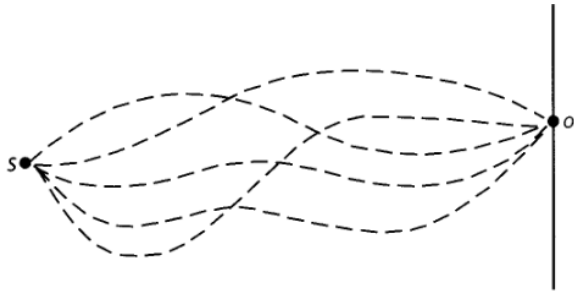


FIG. 3. Assim como nas figuras 1 e 2, uma partícula sai da fonte S e deve ser detectada no ponto O , porém desta vez a quantidade de telas e fendas é aumentada de forma que se possa calcular todos os caminhos possíveis entre a fonte e o detector (imagem extraída de [4]).

A integral de caminho é uma forma bem prática de se chegar nos diagramas de Feynman. Estes, por sua vez, são utilizados para representar graficamente as expressões matemáticas, que descrevem o comportamento e as interações dessas partículas. Ao compactar essa álgebra, os diagramas facilitam a leitura e identificação dos processos que ocorrem ao se analisar as partículas em questão.

II. INTEGRAL FUNCIONAL

A Mecânica Quântica tem como objeto de estudo os operadores que agem nos autoestados de um sistema. Para se calcular a amplitude de probabilidade de uma partícula que está inicialmente na posição x num tempo t e depois na posição x' no tempo $t' = t + \delta t$ tem-se a seguinte expressão (na notação de Dirac):

$$\langle x', t + \delta t | x, t \rangle = \langle x', t | e^{-i\hat{H}\delta t} | x, t \rangle, \quad (3)$$

sendo \hat{H} o operador hamiltoniano¹. Como \hat{H} comuta consigo mesmo, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \hat{H}(\hat{Q}, \hat{P}) &= e^{i\hat{H}t} \hat{H}(Q, P) e^{-i\hat{H}t} \\ &= \hat{H}(e^{i\hat{H}t} \hat{Q} e^{-i\hat{H}t}, e^{i\hat{H}t} \hat{P} e^{-i\hat{H}t}) \\ &= \hat{H}(\hat{Q}(t), \hat{P}(t)), \end{aligned} \quad (4)$$

onde $\hat{Q}(t)$ e $\hat{P}(t)$ são os operadores de posição e momento, respectivamente. Segue que

$$\begin{aligned} \langle x', t | e^{-i\hat{H}(\hat{Q}(t), \hat{P}(t))\delta t} | x, t \rangle \\ = \int dp \langle x', t | e^{-i\hat{H}(\hat{Q}(t), \hat{P}(t))\delta t} | p, t \rangle \langle p, t | x, t \rangle \end{aligned} \quad (5)$$

Nota-se da última equação que $|x, t\rangle$ e $|p, t\rangle$ são autoestados dos operadores $\hat{Q}(t)$ e $\hat{P}(t)$, respectivamente. Portanto,

$$\langle x', t | e^{-i\hat{H}(\hat{Q}(t), \hat{P}(t))\delta t} | p, t \rangle = e^{-i\hat{H}(x', p)\delta t} \langle x', t | p, t \rangle \quad (6)$$

Isso implica que a equação (3) se torna

$$\begin{aligned} \langle x', t + \delta t | x, t \rangle &= \int dp e^{-i\hat{H}(x', p)\delta t} \langle x', t | p, t \rangle \langle p, t | x, t \rangle \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} e^{i\delta t [p \frac{x' - x}{\delta t} - \mathcal{H}(x', p)]} \\ &\approx \int \frac{dp}{2\pi} e^{i \int_t^{t+\delta t} (p\dot{x} - \mathcal{H}) dt} \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} e^{i \int_t^{t+\delta t} \mathcal{L} dt}, \end{aligned} \quad (7)$$

onde \mathcal{L} é a Lagrangiana do sistema. Com o resultado obtido, pode-se calcular a mesma amplitude para um tempo finito, definido por $\Delta t \equiv t' - t$. O intervalo Δt será dividido por N partes iguais, sendo N um número relativamente grande. Dessa forma,

$$\delta t = \frac{\Delta t}{N}. \quad (8)$$

Também será inserido N vezes a identidade

$$\mathbb{1} = \int dx_j |x_j, t_j\rangle \langle x_j, t_j|, \quad (9)$$

para $t_j = t + j\delta t$. Desta forma, tem-se

$$\begin{aligned} \langle x', t' | x, t \rangle &= \int \prod_{j=1}^N dx_j \langle x', t' | x_N, t_N \rangle \langle x_N, t_N | x_{N-1}, t_{N-1} \rangle \dots \\ &\quad \dots \langle x_2, t_2 | x_1, t_1 \rangle \langle x_1, t_1 | x, t \rangle \\ &= \int \prod_{j=1}^N dx_j \prod_{l=0}^N \langle x_{l+1}, t_{l+1} | x_l, t_l \rangle, \end{aligned} \quad (10)$$

onde

$$\begin{aligned} x_0 &= x, & t_0 &= t, \\ x_{N+1} &= x', & t_{N+1} &= t', \\ t_{l+1} &= t_l + \delta t. \end{aligned} \quad (11)$$

Utilizando a equação (7) teremos a expressão

$$\langle x', t' | x, t \rangle = \int \prod_{j=1}^N dx_j \prod_{l=0}^N \frac{dp_l}{2\pi} e^{i \sum_{l=0}^N \delta t [\frac{x_{l+1} - x_l}{\delta t} p_l - \mathcal{H}(x_{l+1}, p_l)]}. \quad (12)$$

Tomando o limite do contínuo, onde $N \rightarrow \infty$ e definindo $\mathcal{D}_x \mathcal{D}_p \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^N dx_j \prod_{l=0}^N \frac{dp_l}{2\pi}$, o somatório se tornará uma integral. Assim, a integral tomará a forma

$$\langle x', t' | x, t \rangle = \int \mathcal{D}_x \mathcal{D}_p e^{i \int_t^{t'} dt (\dot{x}p - \mathcal{H})}. \quad (13)$$

Cont.

¹ A notação que se segue no decorrer do texto está sendo feita em unidades naturais. Portanto, o esperado \hbar dividindo o expoente não aparece na equação (3), uma vez que $\hbar = 1$ nesse sistema de unidades.

A equação (13) é a chamada *integral de caminho*, pois inclui todos os caminhos que a partícula pode tomar levando em conta seus pontos extremos $\{x(t), p(t)\}$. Pode-se escrever essa mesma equação em termos do funcional *ação*:

$$\mathcal{S}[x(t), p(t)] \equiv \int_t^{t'} dt [\dot{x}(t)p(t) - \mathcal{H}(x(t), p(t))]. \quad (14)$$

Logo,

$$\langle x', t' | x, t \rangle = \int \mathcal{D}_x \mathcal{D}_p e^{i\mathcal{S}[x(t), p(t)]}. \quad (15)$$

Ao se introduzir o fator \hbar dividindo o expoente, encontra-se o limite clássico. Conforme \mathcal{S} varia, a exponencial oscila rapidamente, o que implica no cancelamento entre caminhos próximos. Porém isso não acontece em torno de um caminho estacionário $\tilde{x}(t), \tilde{p}(t)$, onde $\delta\mathcal{S}[\tilde{x}(t), \tilde{p}(t)] = 0$. Esses caminhos são justamente a solução das equações de Hamilton clássicas.

III. INTEGRAL DE CAMINHO NA PRESENÇA DE OPERADORES

Pode-se generalizar este formalismo para calcular a amplitude de probabilidade inserindo um operador $\hat{\mathcal{O}}(\hat{Q}(t_a), \hat{P}(t_a))$, onde $t_a = t + a\delta t$ e $t_a \in [t, t']$:

$$\begin{aligned} & \langle x', t' | \hat{\mathcal{O}}(\hat{Q}(t_a), \hat{P}(t_a)) | x, t \rangle = \\ & = \int \prod_{j=1}^N dx_j \langle x', t' | x_N, t_N \rangle \langle x_N, t_N | x_{N-1}, t_{N-1} \rangle \dots \\ & \dots | x_{a+1}, t_{a+1} \rangle \langle x_{a+1}, t_{a+1} | \hat{\mathcal{O}}(\hat{Q}(t_a), \hat{P}(t_a)) | x_a, t_a \rangle \langle x_a, t_a | \dots \\ & \dots \langle x_1, t_1 | x, t \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

Inserindo a identidade (9) e aplicando o exponencial novamente, a equação (16) se torna

$$\begin{aligned} & \langle x', t' | \hat{\mathcal{O}}(\hat{Q}(t_a), \hat{P}(t_a)) | x, t \rangle \\ & = \int \prod_{j=1}^N dx_j \prod_{l=0}^N \frac{dp_l}{2\pi} e^{i \sum_{l=0}^N \delta t [\frac{x_{l+1} - x_l}{\delta t} p_l - \mathcal{H}(x_{l+1}, p_l)]} \mathcal{O}(x_a, p_a), \end{aligned} \quad (17)$$

o que no limite do contínuo ($N \rightarrow \infty$) toma a forma

$$\begin{aligned} & \langle x', t' | \hat{\mathcal{O}}(\hat{Q}(t_a), \hat{P}(t_a)) | x, t \rangle \\ & = \int \mathcal{D}_x \mathcal{D}_p \mathcal{O}(x(t_a), p(t_a)) e^{i \int dx (p\dot{x} - \mathcal{H})}. \end{aligned} \quad (18)$$

O mesmo acontece quando se calcula essa amplitude com mais de um operador:

$$\begin{aligned} & \langle x', t' | \hat{\mathcal{T}} \hat{\mathcal{O}}_1(t_a), \hat{\mathcal{O}}_2(t_b) | x, t \rangle \\ & = \int \mathcal{D}_x \mathcal{D}_p \mathcal{O}_1(t_a) \mathcal{O}_2(t_b) e^{i \int dx (p\dot{x} - \mathcal{H})}, \end{aligned} \quad (19)$$

onde $t_a > t_b$. Esse resultado se estende para N operadores quando estão ordenados no tempo. Para tanto, faz-se uso do chamado *operador de ordenação temporal* $\hat{\mathcal{T}}$, definido como

$$\hat{\mathcal{T}} \{A(x)B(y)\} := \begin{cases} A(x)B(y) & \text{se } \tau_x > \tau_y, \\ B(y)A(x) & \text{se } \tau_x < \tau_y, \end{cases} \quad (20)$$

onde τ_x e τ_y são as coordenadas de tempo escalares invariantes das posições x e y .

Generalizando mais ainda, pode-se modificar a Lagrangiana do sistema incluindo forças externas, ou seja, contribuições inhomogêneas às equações de movimento, agindo sobre a partícula, de forma que o Hamiltoniano será

$$\mathcal{H}(q, p) \rightarrow \mathcal{H}(q, p) - f(t)q(t) - h(t)p(t). \quad (21)$$

Dessa forma, a amplitude na presença dessas fontes externas é definida como

$$\begin{aligned} \langle x', t' | x, t \rangle_{f,h} & \equiv \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p e^{i \int dt [p\dot{q} - \mathcal{H} + fq + hp]} \\ & = \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p e^{i[\mathcal{S} + \int dt (fq + hp)]} \end{aligned} \quad (22)$$

Outra relação interessante é sobre as derivadas funcionais aplicadas na amplitude:

$$\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(t_1)} \langle x', t' | x, t \rangle_{f,h} = \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p q(t_1) e^{i[\mathcal{S} + \int dt (fq + hp)]}. \quad (23)$$

Isso segue da mesma forma para n derivadas funcionais. Agora, ao se tomar $f, h \rightarrow 0$ após a derivação, uma expressão familiar será obtida:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(t_1)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(t_2)} \langle x', t' | x, t \rangle_{f,h} \Big|_{f,h \rightarrow 0} = \\ & = \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p q(t_1) q(t_2) e^{i\mathcal{S}} \\ & = \langle x', t' | \hat{\mathcal{T}} \hat{Q}_1(t_1), \hat{Q}_2(t_2) | x, t \rangle. \end{aligned} \quad (24)$$

Ao analisarmos a equação (24) vemos que a variação da amplitude de propagação com fontes externas desligadas é proporcional a mesma amplitude sem essas fontes, mas com atuação de observáveis, representados pelos operadores. Esses mesmos observáveis estão também relacionados com as funções que são derivadas no cálculo da variação (e que representam as fontes externas).

O mesmo é válido para um operador arbitrário $\hat{\mathcal{O}}(\hat{Q}(t), \hat{P}(t))$ ao se introduzir uma fonte apropriada $J(t)$:

$$\langle x', t' | x, t \rangle_J \equiv \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p e^{i \int dt [p\dot{q} - \mathcal{H} + J(t)\mathcal{O}(t)]}. \quad (25)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(t_1)} \langle x', t' | x, t \rangle_J \Big|_{J=0} = \\ & = \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p \mathcal{O}(t_1) e^{i\mathcal{S}} \\ & = \langle x', t' | \hat{\mathcal{O}}(\hat{Q}_1(t_1), \hat{P}_1(t_1)) | x, t \rangle. \end{aligned} \quad (26)$$

Cont.

IV. AMPLITUDE NO VÁCUO

As amplitudes entre estados de vácuo são expressões que se espera encontrar em TQC. O próximo passo a se tomar seria introduzir esses estados aos resultados já encontrados. Calculando a amplitude de probabilidade para o estado do vácuo ($|E\rangle = |0\rangle$), temos

$$\begin{aligned} \langle 0|0\rangle &= \int dx dx' \langle 0|x', t'\rangle \langle x', t'|x, t\rangle \langle x, t|0\rangle \\ &= \int dx dx' \psi_0(x) \psi_0^*(x') \langle x', t'|x, t\rangle \\ &= 1, \end{aligned} \quad (27)$$

onde $\psi_0(x)$ é a função de onda da posição x no estado fundamental e $\psi_0^*(x)$ seu complexo conjugado. Dessa equação nota-se que, se o estado se encontra inicialmente no vácuo, ele permanecerá no vácuo. O mesmo não pode ser dito de um sistema com fontes, ou seja,

$$\begin{aligned} \langle 0|0\rangle_{f,h} &= \int dx dx' \psi_0(x) \psi_0^*(x') \langle x', t'|x, t\rangle_{f,h} \\ &\neq 1. \end{aligned} \quad (28)$$

Analisemos a seguinte situação: vamos supor que duas fontes, $f(t)$ e $h(t)$, estão ativas num intervalo de tempo que vai desde t_a até t_b . Fora desse intervalo, as fontes são nulas, $f(t) = h(t) = 0$. Então para calcular a amplitude na presença dessas fontes teremos a seguinte expressão:

$$\langle x', t'|x, t\rangle_{f,h} = \int dq dq' \langle x', t'|q', t_b\rangle \langle q', t_b|q, t_a\rangle_{f,h} \langle q, t_a|x, t\rangle. \quad (29)$$

Pode-se reescrever os primeiro e terceiro termos da equação (29) (cujas fontes estão desligadas) de modo a obter a seguinte expressão para a amplitude:

$$\langle x', t'|x, t\rangle_{f,h} = \sum_{E, E'} e^{-iE't'} e^{iEt} \varphi_E^*(x) \varphi_{E'}(x') \langle E'|E\rangle_{f,h}, \quad (30)$$

onde $\varphi_{E'}(x') = \langle x'|E'\rangle$ e $\varphi_E^*(x) = \langle E|x\rangle$. A fim de selecionar apenas os estados do vácuo, faz-se a substituição $\hat{\mathcal{H}} \rightarrow (1 - i\epsilon)\hat{\mathcal{H}}$, com ϵ infinitesimal e positivo. Assim, cada estado senão o estado fundamental será multiplicado por um fator exponencial que o anula. Teremos então, tomando o limite $t' \rightarrow \infty$ e $t \rightarrow -\infty$

$$\lim_{\substack{t' \rightarrow \infty \\ t \rightarrow -\infty}} \langle x', t'|x, t\rangle_{f,h} = \varphi_0^*(x) \varphi_0(x') \langle 0|0\rangle_{f,h}. \quad (31)$$

Dessa forma, pode-se encontrar a expressão para a amplitude do vácuo na presença de fontes:

$$\langle 0|0\rangle_{f,h} = \lim_{\substack{t' \rightarrow \infty \\ t \rightarrow -\infty}} \frac{\langle x', t'|x, t\rangle_{f,h}}{\langle x', t'|x, t\rangle}, \quad (32)$$

onde o denominador dessa equação se encontra ao calcular a amplitude sem fontes para o mesmo limite

$$\left(\lim_{\substack{t' \rightarrow \infty \\ t \rightarrow -\infty}} \langle x', t'|x, t\rangle = \varphi_0^*(x) \varphi_0(x') \langle 0|0\rangle = \varphi_0^*(x) \varphi_0(x')\right).$$

Pode-se reescrever a equação (32) adicionando uma constante de normalização \mathcal{N} (essa constante deve ser definida postulando-se $\langle 0|0\rangle_{f,h}|_{f,h=0} = 1$, uma vez que o estado fundamental deve ser estável na ausência de perturbações) [5]

$$\langle 0|0\rangle_{f,h} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}_x \mathcal{D}_p e^{i \int dt (\dot{x}p - \mathcal{H} + fq + hp)}. \quad (33)$$

Portanto, ao compararmos este resultado com a equação (13), notamos termos a mais, termos esses relacionados à normalização (como a constante \mathcal{N}) e a fontes. Dessa maneira, a Integral de Caminho ganha uma forma mais geral, uma vez que pode-se reduzir a equação (33) de volta a equação (13) aplicando as condições necessárias, ou seja, ausência de fontes externas.

V. TEORIA DE PERTURBAÇÃO

Utilizamos da Teoria de Perturbação em Mecânica Quântica para estudar sistemas mais complexos em termos de sistemas mais simples, adicionando, por exemplo, termos perturbativos, que representam pequenas alterações às expressões. Podemos adicionar uma perturbação no sistema alterando o Hamiltoniano para $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I$, onde \mathcal{H}_0 é o termo padrão do Hamiltoniano e \mathcal{H}_I o termo perturbativo. Reescrevendo a equação (33) para este novo Hamiltoniano, teremos:

$$\langle 0|0\rangle_{f,h} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}_x \mathcal{D}_p e^{-i \int dt \mathcal{H}_I(x,p)} e^{i \int dt (\dot{x}p - \mathcal{H}_0 + fq + hp)}. \quad (34)$$

Ao realizarmos a substituição

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(t)}, \\ p(t) &\rightarrow \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta h(t)}, \end{aligned} \quad (35)$$

a primeira exponencial da equação (34) se torna dependente das derivadas funcionais em relação a $f(t)$ e $h(t)$. Portanto, \mathcal{H}_I não depende mais de x ou p . Isso nos possibilita retirarmos este termo da integral funcional:

$$\begin{aligned} \langle 0|0\rangle_{f,h} &= \mathcal{N} e^{-i \int dt \mathcal{H}_I\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(t)}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta h(t)}\right)} \int \mathcal{D}_x \mathcal{D}_p e^{i \int dt (\dot{x}p - \mathcal{H}_0 + fq + hp)} \\ &= \mathcal{N} e^{-i \int dt \mathcal{H}_I\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(t)}, \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta h(t)}\right)} \langle 0|0\rangle_{f,h}^{(0)}, \end{aligned} \quad (36)$$

onde o termo $\langle 0|0\rangle_{f,h}^{(0)}$ representa a amplitude na ausência de perturbação. Podemos analisar ainda outro aspecto desta equação, calculando suas derivadas funcionais da

seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(t_1)} \cdots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(t_n)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta h(t_{n+1})} \cdots \\ & \cdots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta h(t_m)} \langle 0|0 \rangle_{f,h} \Big|_{f,h \rightarrow 0} = \\ & = \mathcal{N} \int \mathcal{D}_x \mathcal{D}_p x(t_1) \cdots x(t_n) p(t_{n+1}) \cdots \\ & \cdots p(t_m) e^{i \int_{-\infty}^{\infty} dt (\dot{x}p - \mathcal{H})}. \end{aligned} \quad (37)$$

Dessa forma, aplicando os limites e relações que foram utilizados para a equação (33), teremos a seguinte expressão para a amplitude com m operadores em m tempos diferentes e ordenados:

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \hat{\mathcal{T}} \hat{Q}(t_1) \cdots \hat{Q}(t_n) \hat{P}(t_{n+1}) \cdots \hat{P}(t_m) | 0 \rangle \\ & = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(t_1)} \cdots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(t_n)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta h(t_{n+1})} \cdots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta h(t_m)} \langle 0|0 \rangle_{f,h} \Big|_{f,h \rightarrow 0}. \end{aligned} \quad (38)$$

Este resultado já se assemelha com as expressões encontradas na TQC, que são valores esperados do vácuo do produto temporalmente ordenado de operadores de campos.

VI. INTEGRAL DE CAMINHO NO OSCILADOR HARMÔNICO

Agora aplicaremos os resultados encontrados anteriormente para o caso do oscilador harmônico, cuja hamiltoniana é

$$\mathcal{H}(\hat{Q}, \hat{P}) = \frac{1}{2m} \hat{P}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{Q}^2. \quad (39)$$

Faremos a mesma substituição já utilizada para o Hamiltoniano, $\hat{\mathcal{H}} \rightarrow (1 - i\epsilon)\hat{\mathcal{H}}$, para calcular a amplitude do vácuo na presença de uma fonte f :

$$\langle 0|0 \rangle_f = \mathcal{N} \int \mathcal{D}_q \mathcal{D}_p e^{i \int dt [\dot{q}p - (1-i\epsilon)\mathcal{H} + fq]}. \quad (40)$$

Notando que ao se multiplicar \mathcal{H} por $(1 - i\epsilon)$ é equivalente a $m \rightarrow (1 + i\epsilon)m$ e $\omega \rightarrow (1 - i\epsilon)\omega$, reescreve-se essa amplitude como

$$\begin{aligned} \langle 0|0 \rangle_f & = \mathcal{N} \int \mathcal{D}_q e^{i \int dt [\frac{1}{2}(1+i\epsilon)m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}(1-i\epsilon)m\omega^2 q^2 + fq]} \\ & = \mathcal{N} \int \mathcal{D}_q e^{i \int dt [\frac{1}{2}(1+i\epsilon)\dot{q}^2 - \frac{1}{2}(1-i\epsilon)\omega^2 q^2 + fq]}, \end{aligned} \quad (41)$$

onde na segunda linha foi utilizada, por simplicidade, uma unidade tal que a massa tenha valor $m = 1$. A integral funcional em \mathcal{D}_p foi absorvida na constante \mathcal{N} . Utilizando a Transformada de Fourier,

$$\begin{aligned} \tilde{q}(E) & = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{iEt} q(t), \\ q(t) & = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} e^{-iEt} \tilde{q}(E), \end{aligned} \quad (42)$$

encontra-se a seguinte expressão para o expoente:

$$\begin{aligned} & \int dt \left[\frac{1}{2} (1 + i\epsilon) \dot{q}^2 - \frac{1}{2} (1 - i\epsilon) \omega^2 q^2 + fq \right] \\ & = \int dt \left\{ \left(\frac{dE}{2\pi} \right) \left(\frac{dE'}{2\pi} \right) e^{-i(E-E')t} \times \right. \\ & \times \frac{1}{2} \left[\left(- (1 + i\epsilon) E E' - (1 - i\epsilon) \omega^2 \right) \tilde{q}(E) \tilde{q}(E') + \right. \\ & \left. \left. + \left(\tilde{f}(E) \tilde{q}(E') + \tilde{f}(E') \tilde{q}(E) \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (43)$$

A integral em t fornece o fator $2\pi\delta(E + E')$. Portanto, $E' = -E$. O polinômio entre parênteses na terceira linha da equação (43) será reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (1 + i\epsilon)E^2 - (1 - i\epsilon)\omega^2 & = E^2 - \omega^2 + i(E^2 + \omega^2)\epsilon \\ & = E^2 - \omega^2 + i\epsilon, \end{aligned} \quad (44)$$

onde o termo $(E^2 + \omega^2)\epsilon$ foi absorvido numa nova constante infinitesimal e renomeado de ϵ . Outro passo tomado foi a mudança de coordenadas:

$$\tilde{q}(E) = \tilde{x}(E) + A \frac{\tilde{f}(E)}{E^2 - \omega^2 + i\epsilon}, \quad (45)$$

com A sendo uma constante. Desta forma, a integral funcional também mudará, $\mathcal{D}_q \rightarrow \mathcal{D}_x$.

Ao se substituir a equação (45) em (43) e atribuímos $A = -1$, teremos como expoente:

$$\tilde{x}(E)(E^2 - \omega^2 + i\epsilon)\tilde{x}(-E) - \frac{\tilde{f}(E)\tilde{f}(-E)}{E^2 - \omega^2 + i\epsilon}, \quad (46)$$

onde os termos de fonte $\tilde{f}(E)$ foram desacoplados dos termos de posição $\tilde{x}(E)$. Inserindo este resultado no cálculo da amplitude do vácuo, encontra-se a expressão:

$$\begin{aligned} \langle 0|0 \rangle_f & = e^{-\frac{i}{2} \int \frac{dE}{2\pi} \frac{\tilde{f}(E)\tilde{f}(-E)}{E^2 - \omega^2 + i\epsilon}} \\ & = e^{\frac{i}{2} \int dt dt' f(t)G(t-t')f(t')}, \end{aligned} \quad (47)$$

onde $G(t - t')$ é uma função de Green, que satisfaz

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2 \right) G(t - t') & = \delta(t - t'), \\ G(t - t') & = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(t-t')}}{-E^2 + \omega^2 - i\epsilon}, \end{aligned} \quad (48)$$

com ϵ infinitesimal. Podemos agora reescrever a amplitude para os estados do vácuo inicial e final para dois operadores em termos das funções de Green da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{\mathcal{T}} \hat{Q}(t_1) \hat{Q}(t_2) | 0 \rangle & = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(t_1)} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta f(t_2)} \langle 0|0 \rangle_f \Big|_{f=0} \\ & = \left[\frac{1}{i} G(t_2 - t_1) + O(f) \right] \langle 0|0 \rangle_f \Big|_{f=0} \\ & = \frac{1}{i} G(t_2 - t_1). \end{aligned} \quad (49)$$

Cont.

Todos os termos englobados em $\mathcal{O}(f)$ se anulam pois, devido as derivadas funcionais, aparecerá o termo f os multiplicando. Uma vez que $f = 0$, todos esses termos somem. Para um número ímpar de operadores $\mathcal{Q}(t)$, sempre haverá um prefator $f(t)$, o que resulta em zero. Caso o número de operadores seja par, então haverá produtos de funções de Green relativas a cada tempo t , que é dependência desses operadores. Mais genericamente,

$$\langle 0 | \hat{\mathcal{T}} \hat{\mathcal{Q}}(t_1) \dots \hat{\mathcal{Q}}(t_{2n}) | 0 \rangle = \frac{1}{i^n} \sum_{\text{pares}} G(t_{i_1} - t_{i_2}) \dots G(t_{i_{2n-1}} - t_{i_{2n}}) \quad (50)$$

[6]. Este resultado relaciona os operadores da amplitude com as funções de Green. Seu significado será mais abordado nas próximas seções.

VII. INTEGRAL DE CAMINHO PARA TEORIA DE CAMPOS: CASO DO CAMPO LIVRE

Consideremos uma teoria que envolve o campo escalar ϕ , cuja Lagrangiana \mathcal{L} é definida como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi), \quad (51)$$

onde m é a massa da partícula e $V(\phi)$ o potencial dependente do campo. Definimos agora a funcional geradora do vácuo como

$$W[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{i \langle \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi) + J\phi \rangle}, \quad (52)$$

onde $\langle \dots \rangle \equiv \int d^4x \dots$, e que na notação usada anteriormente se traduz como $W[J] = \langle 0 | 0 \rangle_J$, sendo que J representa a fonte externa. Para a teoria livre ($V(\phi) = 0$) temos a integral de caminho escrita como

$$\begin{aligned} W_0[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{i \langle \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J\phi \rangle} \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{2} \langle \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - (m^2 - i\epsilon) \phi^2 + 2J\phi \rangle}, \end{aligned} \quad (53)$$

onde foi adicionado um termo $e^{-\frac{1}{2}\epsilon\langle\phi^2\rangle}$ para garantir a convergência de W_0 , que é uma funcional do tipo oscilatório. Inserindo a Transformada de Fourier quadridimensional

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx} \tilde{\phi}(k), \\ J(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx} \tilde{J}(k), \end{aligned} \quad (54)$$

reescrevemos a expressão integrada na exponencial da equação (53) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\int d^4x [\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - (m^2 - i\epsilon) \phi^2 + 2J\phi] \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[(k^2 - m^2 + i\epsilon) \tilde{\phi}(k) \tilde{\phi}(-k) + \tilde{J}(k) \tilde{\phi}(-k) + \tilde{J}(-k) \tilde{\phi}(k) \right] \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[(k^2 - m^2 + i\epsilon) \tilde{\phi}(k) \tilde{\phi}(-k) - \frac{\tilde{J}(k) \tilde{J}(-k)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right]. \end{aligned} \quad (55)$$

onde na última expressão da equação (55) mudamos as variáveis da integração de caminho, de forma que $\tilde{\phi}(k) \rightarrow \tilde{\phi}(k) - \frac{\tilde{J}(k)}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$ [7]. Utilizando a Transformada Inversa de Fourier para o último termo obteremos:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{J}(k) \tilde{J}(-k)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} d^4x d^4y J(x) J(y) \times \\ &\quad \times \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= \int d^4x d^4y \Delta_F(x-y) J(x) J(y), \end{aligned} \quad (56)$$

onde definimos o *propagador de Feynman*

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (57)$$

Esse propagador é a função de Green para a equação de Klein-Gordon²:

$$(\square_x + m^2) \Delta_F(x-y) = -\delta(x-y), \quad (58)$$

com $\square = \partial_t^2 - \nabla^2$ sendo o *operador d'alembertiano*, também representado em unidades naturais, e \square_x significa que suas derivadas agem sobre a componente X . Utilizando agora este propagador, podemos reescrever a integral de caminho para o campo livre de potencial com termos mais interessantes para a construção dos diagramas de Feynman:

$$\begin{aligned} W_0[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{2} \langle \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - (m^2 - i\epsilon) \phi^2 \rangle} \times \\ &\quad \times e^{-\frac{i}{2} \langle \Delta_{x_1, x_2} J_{x_1} J_{x_2} \rangle_{x_1, x_2}}, \end{aligned} \quad (59)$$

onde, para compactar as expressões, foi utilizada a definição

$$\langle \Delta_{x_1, x_2} J_{x_1} J_{x_2} \rangle_{x_1, x_2} \equiv \int d^4x_1 d^4x_2 \Delta_F(x_1 - x_2) J(x_1) J(x_2). \quad (60)$$

² A equação de Klein-Gordon é a versão relativística da equação de onda, sendo a quantização da relação energia-momento ($E^2 = p^2 + m_0^2$). Esta é a equação de movimento para um campo escalar ou pseudo-escalar quântico que descreve partículas sem spin.

Ao impormos $W_0[0] = 1$, teremos o valor de \mathcal{N} definido como

$$\mathcal{N} = \left(\int \mathcal{D}\phi e^{\frac{i}{2} \langle \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - (m^2 - i\epsilon) \phi^2 \rangle} \right)^{-1}. \quad (61)$$

Portanto, teremos

$$W_0[J] = e^{-\frac{i}{2} \langle \Delta_{x_1, x_2} J_{x_1} J_{x_2} \rangle_{x_1, x_2}}. \quad (62)$$

Encontramos então a expressão para a integral de caminho para o campo livre em termos do propagador de Feynman. A partir da funcional do vácuo $W[J]$ é possível calcular as funções de Green da teoria, ou seja, os valores esperados para o vácuo do produto dos operadores de campo temporalmente ordenados. A função de Green de n -pontos é definida por

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | \hat{\mathcal{T}}(\hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n)) | 0 \rangle. \quad (63)$$

Ao observarmos a equação (38) podemos reescrever a função de Green para os n -pontos em termos das derivadas funcionais, além de utilizarmos a funcional $W[J]$:

$$G_0^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{i} \right)^n \frac{\delta W_0[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J \rightarrow 0}, \quad (64)$$

onde o subscrito 0 foi utilizado por se tratar de uma teoria livre de perturbações. Escrevendo agora a função de Green para dois pontos encontramos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} G_0^{(2)}(x_1, x_2) &= \left(\frac{1}{i} \right)^2 \frac{\delta W_0[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \Bigg|_{J \rightarrow 0} \\ &= i \Delta_F(x_1 - x_2). \end{aligned} \quad (65)$$

Analogamente para 4 pontos (lembrando que para um número ímpar de pontos o resultado obtido é zero),

$$\begin{aligned} G_0^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \left(\frac{1}{i} \right)^4 \frac{\delta W_0[J]}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \delta J(x_3) \delta J(x_4)} \Bigg|_{J \rightarrow 0} \\ &= -[\Delta_F(x_1 - x_2) \Delta_F(x_3 - x_4) + \\ &\quad + \Delta_F(x_1 - x_3) \Delta_F(x_2 - x_4) + \\ &\quad + \Delta_F(x_1 - x_4) \Delta_F(x_2 - x_3)]. \end{aligned} \quad (66)$$

Podemos reescrever as equações (65) e (66) de maneira gráfica, onde cada propagador de Feynman é representado por uma linha, cujos pontos iniciais e finais são os pontos aos quais o propagador se aplica. Assim são construídos os *diagramas de Feynman*, apresentados nas figuras (4) e (5). A equação (66) é similar a equação (50), que poderia, portanto, ser expressa graficamente pelo mesmo diagrama (5) (os diferentes pontos corresponderiam a diferentes tempos t 's, enquanto que na teoria

$$G_0^{(2)}(x_1, x_2) = \text{---} \overset{x_1}{\underset{x_2}{\text{---}}}$$

FIG. 4. Equação (65) na representação dos *diagramas de Feynman* no espaço de posição. (imagem extraída de [5]).

$$G_0^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ x_3 \text{---} x_4 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \\ | \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} x_2 \\ | \\ x_4 \end{array} + \begin{array}{c} x_1 \text{---} x_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ x_3 \quad x_4 \end{array}$$

FIG. 5. Equação (66) na representação dos *diagramas de Feynman* no espaço de posição. (imagem extraída de [5]).

relativística, o que estaria presente são as coordenadas espaço-temporais.).

Outro aspecto a se observar das funções de Green se trata de sua forma no espaço de momento. Utilizaremos o caso de 2 pontos:

$$\begin{aligned} G_0^{(2)}(x - y) &= i \Delta_F(x - y) \\ &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (67)$$

Ao aplicarmos a Transformada de Fourier na função obteremos uma nova expressão, $\tilde{G}_0^{(2)}$, definida como:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0^{(2)}(k_1, k_2) &= \int d^4 x d^4 y e^{-ik_1 x} e^{-ik_2 y} G_0^{(2)}(x - y) \\ &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d^4 x d^4 y \frac{e^{i(k-k_1)x} e^{-i(k-k_2)y}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2) \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2) G_0^{(2)}(k_1), \end{aligned} \quad (68)$$

onde

$$G_0^{(2)}(k_1) = \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (69)$$

Da mesma forma, pode-se escrever a nova função de Green no espaço de momento para o caso de 4 pontos:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_0^{(4)}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= -[(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2) (2\pi)^4 \delta^4(k_3 + k_4) \times \\ &\quad \times \frac{1}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{k_3^2 - m^2 + i\epsilon} + \\ &\quad + \text{permut.}], \end{aligned} \quad (70)$$

onde mais 3 termos das permutações estariam presentes na equação (70) e seguindo a mesma forma do primeiro já apresentado.

A função $G^{(4)}$, assim como todas as $G^{(n)}$ com $n > 2$, na teoria livre é desconectada. Esse tipo de função representa, fisicamente, um espalhamento em que não há interação entre as partículas. Essa falta de interação implica que para campos livres as funções de Green de

ordens superiores serão redundantes, já que são dadas apenas por combinações de $G_0^{(2)}$.

A fim de se eliminar essas contribuições triviais deste tipo, introduz-se o *funcional gerador das funções de Green conectadas*:

$$Z_0[J] \equiv -i \ln W_0[J], \quad (71)$$

onde o subscrito 0 faz referência a teoria livre. Este funcional é usado para se definir um novo tipo de funções de Green, as *funções de Green conectadas*:

$$G_c^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{i} \right)^{n-1} \frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J \rightarrow 0}. \quad (72)$$

Essa função corresponde a mesma função de Green para dois pontos na teoria livre, mas diverge para mais pontos, cujos termos excedentes (redundantes) são eliminados.

Todo gráfico de ordem superior pode ser obtido utilizando funções de Green conectadas de dois pontos $G_c^{(2)}$ e a *função de vértice* $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$, que será definida, a partir do que chamamos de *ação efetiva*, em breve.

Mais uma definição será feita, tratando-se da derivada do funcional gerador $Z[J]$ em relação a fonte $J(x)$:

$$\phi_c(x) = \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)}. \quad (73)$$

A função $\phi_c(x)$ corresponde ao *campo clássico* e permite, através de uma *transformação de Legendre*, que a fonte J seja escrita como função de ϕ_c , $J = J(x, \phi_c)$. Para o caso livre teremos:

$$\begin{aligned} \phi_c(x) &= \frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)} \\ &= \frac{(-i)}{W_0[J]} \frac{\delta}{\delta J(x)} e^{-\frac{i}{2} \langle \Delta_{1,2} J_1 J_2 \rangle_{1,2}} \\ &= -\frac{1}{W_0[J]} \langle \Delta_{x_1} J_1 \rangle W_0[J] \\ &= -\int d^4 y \Delta_F(x-y) J(y) \end{aligned} \quad (74)$$

A função $\phi_c(x)$ satisfaz a equação clássica de movimento:

$$\begin{aligned} (\square_x + m^2) \phi_c(x) &= -\int d^4 y (\square_x + m^2) \Delta_F(x-y) J(y) \\ &= -\int d^4 y [-\delta^4(x-y)] J(y) \\ &= J(x) \end{aligned} \quad (75)$$

O funcional $\Gamma[\phi_c]$ será definido como

$$\Gamma[\phi_c] \equiv Z[J(\phi_c)] - \int d^4 x J(\phi_c(x)) \phi_c(x). \quad (76)$$

Esse funcional representa a *ação efetiva* e está relacionado com a *função de vértice* citada anteriormente. Para o caso do campo livre, temos que esse funcional será expresso da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Gamma_0[\phi_c] &= Z_0[J(\phi_c)] - \int d^4 x J(\phi_c(x)) \phi_c(x) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4 x_1 d^4 x_2 J(x_1) \Delta_{x_1, x_2} J(x_2) - \\ &\quad - \int d^4 x \phi_c(\square_x + m^2) \phi_c \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4 x \phi_c(x) (\square_x + m^2) \phi_c(x) \\ &= \int \mathcal{L}_0[\phi_c(x)] \\ &= \mathcal{S}[\phi_c(x)]. \end{aligned} \quad (77)$$

Portanto, a *ação efetiva* reduz-se à *ação clássica* \mathcal{S} para o caso livre de interações.

A relação entre a *ação efetiva* e a *função de vértice* pode ser encontrada através da *transformação de Legendre*, feita em $\phi_0(x, J)$ ³:

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x_1) \dots \delta \phi_c(x_n)} \Bigg|_{\phi_c \rightarrow 0}. \quad (78)$$

Analisando o caso de $n = 2$ no espaço de posição, teremos:

$$\Gamma_0^{(2)}(x_1, x_2) = -(\square_{x_1} + m^2) \delta^4(x_1 - x_2). \quad (79)$$

Já no espaço de momento:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_0^{(2)}(p_1, p_2) &= \int d^4 x_1 d^4 x_2 e^{-ip_1 x_1} e^{-ip_2 x_2} \Gamma_0^{(2)}(x_1, x_2) \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} d^4 x_1 d^4 x_2 (k^2 - m^2) e^{i(k-p_1)x_1} e^{i(k+p_2)x_2} \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) (p^2 - m^2 + i\epsilon) \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) [i(G_0^{(2)}(p_1))^{-1}] \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2) \Gamma_0^{(2)}(p_1), \end{aligned} \quad (80)$$

para

$$\Gamma_0^{(2)}(p) = \frac{i}{G_0^{(2)}(p)} = p^2 - m^2, \quad (81)$$

que se anulará na teoria livre para valores de n maiores do que 2.

³ Esta notação foi utilizada pois ao mesmo tempo que ϕ_c é uma função ordinária de x , é também um funcional de J . No limite sem perturbações, ou seja $J \rightarrow 0$, sob circunstâncias normais, o campo clássico também será nulo, $\phi_c \rightarrow 0$. [5]

VIII. INTEGRAL DE CAMINHO PARA TEORIA DE CAMPOS: CASO DO CAMPO COM INTERAÇÃO

Para analisar o que acontece na teoria com interação, será abordado o caso particular, por simplicidade, de um potencial

$$V(\phi) = \frac{g}{3!}\phi^3. \quad (82)$$

A teoria ϕ^3 não é uma teoria estável. Isso acontece porque ela não possui limitação inferior (sem limite de valores negativos para ϕ), não possui um estado fundamental [6]. Não se espera que o potencial $g\phi^3$ possa descrever nenhuma partícula fundamental. Para que seja razoável uma descrição com essa teoria, supõe-se que $\phi = 0$ classicamente. Desta maneira, ϕ não será grande o suficiente para ultrapassar a barreira de potencial inferior.

A Lagrangiana para essa teoria quântica de campos será construída da seguinte maneira⁴:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{3!}g\phi^3 \quad (83)$$

A expansão perturbativa da teoria é obtida diretamente do formalismo funcional:

$$W[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{-\langle V(\phi) \rangle} e^{i\langle \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + J\phi \rangle} \quad (84)$$

Para a ação

$$\mathcal{S} = \left\langle \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V(\phi) + J\phi \right\rangle, \quad (85)$$

a equação de movimento clássica fornece

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathcal{S}}{\delta\phi} &= -(\square_x + m^2)\phi(x) - V'(\phi(x)) + J(x) = 0 \\ \implies (\square_x + m^2)\phi(x) &= -V'(\phi(x)) + J(x) \end{aligned} \quad (86)$$

De acordo com a equação (74), o campo clássico é definido como $\phi_c(x) = \frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)}$ para a teoria livre. Porém, a integral de caminho $W[J]$ possui agora dependência do potencial. Levando esse termo dependente em consideração, a equação de movimento para ϕ_c será :

$$(\square_x + m^2)\phi_c = J(x) - \frac{1}{W[J]}V'\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_x}\right)W[J] \quad (87)$$

⁴ Existem parâmetros que são inseridos nesta equação para garantir sua renormalização, o que resulta na expressão $\mathcal{L} = \frac{1}{2}Z_\phi\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}Z_m m^2\phi^2 + \frac{1}{3!}Z_g g\phi^3 + Y\phi$ [6]. Porém estes parâmetros se tornam relevantes na teoria quântica de campos relativística. Assim sendo, para uma teoria com aproximação clássica, os parâmetros terão os valores $Z_\phi = Z_m = Z_g = 1$ e $Y = 0$.

[7]. Nota-se, ao compararmos este resultado com a equação (86), que o termo do potencial foi modificado. Para o caso de $V(\phi) = \frac{g}{3!}\phi^3$ teremos a equação de movimento:

$$(\square_x + m^2)\phi_c = J_x - \frac{g}{2}\phi_c^2 + \frac{ig}{2}\frac{\delta\phi_c}{\delta J_x}, \quad (88)$$

cujos primeiros dois termos do lado direito da equação satisfazem a equação de movimento clássica e o terceiro termo ($\frac{ig}{2}\frac{\delta\phi_c}{\delta J_x}$) se trata de uma correção quântica⁵. Nota-se que a *ação efetiva* também será alterada se comparada ao caso da teoria livre, onde era definida como sendo $\Gamma_0[\phi_c] = \int d^4x(\mathcal{L}_0)$. Fazendo o uso da definição (76), é possível encontrar a relação

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)} = -J(\phi_c), \quad (89)$$

que utilizamos na equação de movimento substituindo $J(\phi_c)$ para obter:

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi_c] &= \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\phi_c(\square_x + m^2)\phi_c - V(\phi_c) - \mathcal{O}(\hbar) \right] \\ &= \int d^4x \left[-V_{ef}(\phi_c) + \frac{1}{2}\partial^\mu\phi_c\partial_\mu\phi_c(1 + \mathcal{O}(\hbar)) + \mathcal{O}'(\hbar) \right], \end{aligned} \quad (90)$$

onde o *potencial efetivo* é definido como $V_{ef}(\phi_c) = \frac{1}{2}m^2\phi_c + V(\phi_c) + \mathcal{O}(\hbar)$ e o último termo $\mathcal{O}'(\hbar)$ denota um conjunto de termos de derivadas de ordens superiores. Verifica-se que na teoria de interação, o potencial é modificado pelas correções quânticas.

Utilizando o método da fase estacionária para a integral de caminho com a interação, reescrevemos esta de forma aproximada:

$$W[J] \approx \mathcal{N} e^{i\langle \frac{1}{2}J\phi_0 + \frac{1}{2}\phi_0 V'(\phi_0) - V(\phi_0) \rangle}, \quad (91)$$

onde a função clássica ϕ_0 depende de J da equação de movimento

$$(\square_x + m^2)\phi_0 = J - V'(\phi_0) = J - \frac{g}{2}\phi_0^2. \quad (92)$$

Essa aproximação é conhecida como *aproximação de nível de árvore*. Para se resolver ϕ_0 , utiliza-se uma expansão de potências de g , de forma que:

$$\phi_0 = \phi_0^{(0)} + g\phi_0^{(1)} + g^2\phi_0^{(2)} + \dots \quad (93)$$

A ação para essa aproximação toma forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\phi_0, J] &= \left\langle \frac{1}{2}J\phi_0 + \frac{1}{2}\phi_0 V'(\phi_0) - V(\phi_0) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2}J\phi_0 + \frac{1}{12}g\phi_0^3 \right\rangle \end{aligned} \quad (94)$$

⁵ Este termo de correção possui um \hbar multiplicado, porém não foi apresentado no texto devido a notação de unidades naturais.

Ao substituirmos a expressão (93) na equação acima, podemos organizar os termos em função de g :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\phi_0, J] = & \left\langle \frac{1}{2} J \phi_0 + g \left(\frac{1}{2} J \phi_0^{(1)} + \frac{1}{2} \phi_0^{(0)3} \right) + \right. \\ & \left. + g^2 \left(\frac{1}{2} J \phi_0^{(2)} + \frac{1}{4} \phi_0^{(1)} \phi_0^{(0)2} \right) + \mathcal{O}(g^3) \right\rangle. \end{aligned} \quad (95)$$

Resolvendo ordem a ordem em g através da equação de movimento (92):

$$\begin{aligned} (\square_x + m^2) \phi_0^{(0)}(x) &= J(x) \\ \Rightarrow \phi_0^{(0)}(x) &= - \int dy \Delta_F(x-y) J(y) \\ \therefore \phi_0^{(0)}(x) &= - \langle \Delta_{x,1} J_1 \rangle_1 \end{aligned} \quad (96)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \phi_0^{(1)}(x) &= \frac{1}{2} \langle \Delta_{x,1} \Delta_{1,2} \Delta_{1,3} J_2 J_3 \rangle_{1,2,3}, \\ \phi_0^{(2)}(x) &= - \frac{1}{2} \langle \Delta_{x,1} \Delta_{1,2} \Delta_{1,3} \Delta_{3,4} \Delta_{3,5} J_2 J_4 J_5 \rangle_{1,2,3,4,5}. \end{aligned} \quad (97)$$

Substituindo todos estes termos na equação da ação, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[J] = & - \frac{1}{2} \langle \Delta_{1,2} J_1 J_2 \rangle + \frac{g}{3!} \langle \Delta_{1,2} \Delta_{1,3} \Delta_{1,4} J_2 J_3 J_4 \rangle - \\ & - \frac{g^2}{8} \langle \Delta_{1,2} \Delta_{1,3} \Delta_{1,4} \Delta_{4,5} \Delta_{4,6} J_2 J_3 J_5 J_6 \rangle + \mathcal{O}(g^3). \end{aligned} \quad (98)$$

Podemos agora utilizar estes termos para representar as *funções de Green conectadas*, de acordo com a equação (72) e lembrando que, para a aproximação clássica, o *funcional gerador das funções de Green conectadas* se torna a ação:

$$Z[J] = -i \ln W[J] = -i \ln e^{i\mathcal{S}[J]} = \mathcal{S}[J]. \quad (99)$$

Calculando assim as funções de Green conectadas para a teoria com interação. Para o caso com dois pontos:

$$\begin{aligned} G_c^{(2)}(x, y) &= \left(\frac{1}{i} \right)^2 \frac{\delta}{\delta J(x) \delta J(y)} Z[J] \Big|_{J \rightarrow 0} \\ &= \left(\frac{1}{i} \right)^2 \frac{\delta}{\delta J(x) \delta J(y)} \left(- \frac{i}{2} \langle \Delta_{1,2} J_1 J_2 \rangle + \dots \right) \Big|_{J \rightarrow 0} \\ &= i \Delta_F(x-y) \\ &= i \Delta_{x,y}, \end{aligned} \quad (100)$$

onde os pontilhados no lado direito da primeira linha da equação representam termos que se anulam devido a imposição de $J \rightarrow 0$. Nota-se que a função $G_c^{(2)}(x, y)$ concorda com o resultado da teoria livre (equação (65)).

Para três pontos, tem-se a equação:

$$\begin{aligned} G_c^{(3)}(x, y, z) &= \left(\frac{1}{i} \right)^3 \frac{\delta}{\delta J(x) \delta J(y) \delta J(z)} Z[J] \Big|_{J \rightarrow 0} \\ &= \left(\frac{1}{i} \right)^3 \frac{\delta}{\delta J(x) \delta J(y) \delta J(z)} \left(\frac{ig}{3!} \langle \Delta_{1,2} \Delta_{1,3} \Delta_{1,4} \times \right. \\ & \quad \left. \times J_2 J_3 J_4 \rangle + \dots \right) \Big|_{J \rightarrow 0} \\ &= -g \langle \Delta_{1,x} \Delta_{1,y} \Delta_{1,z} \rangle \\ &= -g \int d^4 \omega \Delta_F(\omega-x) \Delta_F(\omega-y) \Delta_F(\omega-z). \end{aligned} \quad (101)$$

Ao contrário das funções de Green da teoria livre quando estas tratam de um número ímpar de pontos (a partir de 3), não se anulam na teoria com interação. Para quatro pontos:

$$\begin{aligned} G_c^{(4)}(x, y, z, \omega) &= \left(\frac{1}{i} \right)^4 \frac{\delta}{\delta J(x) \delta J(y) \delta J(z) \delta J(\omega)} Z[J] \Big|_{J \rightarrow 0} \\ &= \left(\frac{1}{i} \right)^4 \frac{\delta}{\delta J(x) \delta J(y) \delta J(z) \delta J(\omega)} \left(- \frac{ig^2}{8} \times \right. \\ & \quad \left. \times \langle \Delta_{1,2} \Delta_{1,3} \Delta_{1,4} \Delta_{4,5} \Delta_{4,6} \times \right. \\ & \quad \left. \times J_2 J_3 J_5 J_6 \rangle + \dots \right) \Big|_{J \rightarrow 0} \\ &= -ig^2 \left(\langle \Delta_{1,\omega} \Delta_{1,z} \Delta_{1,4} \Delta_{4,x} \Delta_{4,y} \rangle + \right. \\ & \quad \left. + \langle \Delta_{1,\omega} \Delta_{1,x} \Delta_{1,4} \Delta_{4,z} \Delta_{4,y} \rangle + \right. \\ & \quad \left. + \langle \Delta_{1,\omega} \Delta_{1,y} \Delta_{1,4} \Delta_{4,z} \Delta_{4,x} \rangle \right) \end{aligned} \quad (102)$$

Essas equações podem ser representadas pelos *diagramas de Feynman* seguindo-se as regras da tabela I. A equação (100) corresponde a primeira linha dessa tabela, resumindo-se ao *propagador de Feynman* entre dois pontos. Já as equações (101) e (102) correspondem, respectivamente, aos diagramas apresentados nas figuras 6 e 7. As últimas equações de Green apresentadas correspondem aos chamados *diagramas de árvore*, uma vez que se tratam de funções conectadas que não possuem Loops (linhas fechadas), que quando presentes, correspondem a perturbações de ordens mais elevadas (como no termo excedente da equação (88)). Este diagrama para um dado processo representa a contribuição de menor ordem (em g), não nula, para esse processo. Novamente, podemos representar as *funções de Green conectadas* no espaço de momento. A equação (100) nesta representação é a já citada (68):

$$\begin{aligned} \tilde{G}_c^{(2)}(k_1, k_2) &= (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2) G_0^{(2)}(k_1) \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2) \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i\epsilon}. \end{aligned} \quad (103)$$

Cont.

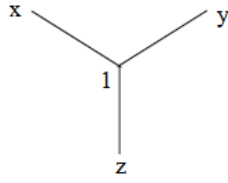


FIG. 6. Diagrama de Feynman no espaço de posição da equação (101) seguindo as regras da tabela I.



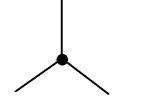
As análogas as equações (101) e (102) são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_c^{(3)}(k_1, k_2, k_3) &= (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3) (-ig) \times \\ &\quad \times G_0^{(2)}(k_1) G_0^{(2)}(k_2) G_0^{(2)}(k_3) \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3) (-ig) \times \\ &\quad \times \prod_{j=1}^3 \frac{i}{k_j^2 - m^2 + i\epsilon}, \end{aligned} \quad (104)$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_c^{(4)}(k_1, k_2, k_3, k_4) &= (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) (-ig^2) \times \\ &\quad \times \prod_{j=1}^4 \frac{1}{k_j^2 - m^2 + i\epsilon} \left[\frac{1}{(k_1 + k_2)^2 - m^2 + i\epsilon} + \right. \\ &\quad \left. + (k_1 \leftrightarrow k_3) + (k_2 \leftrightarrow k_3) \right], \end{aligned} \quad (105)$$

onde os dois últimos termos da equação (105) são permutações do primeiro termo que aparece entre colchetes para a soma dos k 's. A representação gráfica das equações acima podem ser visualizadas nos diagramas 8 e 9. Cada seta representa o quadrimomento k_i , correspondente a i -ésima partícula.

TABLE I. Regras para construção dos *diagramas de Feynman* na teoria de interação $g\phi^3$.

Propagador	$i\Delta_F(x-y)$	
Fonte externa	$i \int d^4x J(x)$	
Interação $g\phi^3$	$-ig \int d^4x$	

Observemos agora a expansão de $W[J]$. Utilizando a substituição da equação (35) para ϕ em termos da

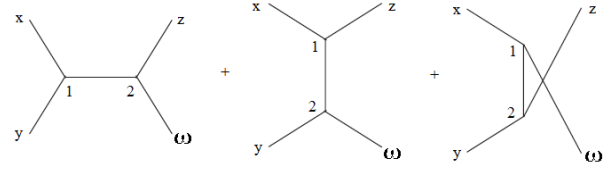


FIG. 7. Diagrama de Feynman no espaço de posição da equação (102) seguindo as regras da tabela I.

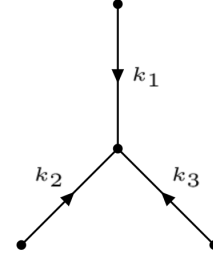


FIG. 8. Diagrama de Feynman no espaço de momento da equação (104).

derivada parcial de $J(x)$:

$$\begin{aligned} W[J] &= e^{i \int d^4x \mathcal{L}_I \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)} \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{i \left(\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + J\phi \right)} \\ &= e^{i \int d^4x \mathcal{L}_I \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)} W_0[J] \\ &= e^{i \int d^4x \mathcal{L}_I \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)} e^{-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y \Delta_F(x-y) J(x) J(y)} \\ &= \sum_{V=0}^{\infty} \frac{i^V}{V!} \left[\int d^4x \mathcal{L}_I \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right]^V \times \\ &\quad \times \sum_{P=0}^{\infty} \frac{1}{P!} \left(-\frac{i}{2} \right)^P \left[\int d^4x d^4y \Delta_F(x-y) J(x) J(y) \right]^P \\ &= \sum_{V=0}^{\infty} \frac{(-i)^V}{V!} \left[\frac{g}{3!} \int d^4x \frac{1}{i^3} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^3 \right]^V \times \\ &\quad \times \sum_{P=0}^{\infty} \frac{1}{P!} \left(-\frac{i}{2} \right)^P \left[\int d^4x d^4y \Delta_F(x-y) J(x) J(y) \right]^P \end{aligned} \quad (106)$$

onde foi introduzido o termo \mathcal{L}_I para denotar a Lagrangiana de interação, uma vez que ela abrange o potencial, e nas últimas linhas o caso da teoria com $\frac{g}{3!} \phi^3$

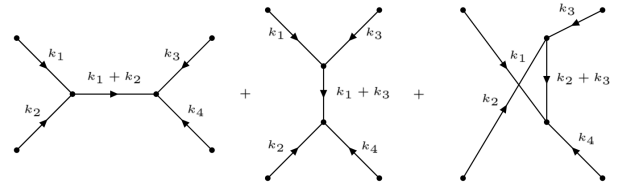


FIG. 9. Diagrama de Feynman no espaço de momento da equação (105).

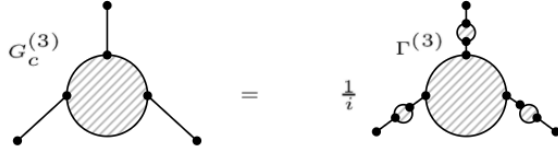


FIG. 10. Diagrama de Feynman no espaço de posição da equação (112). Os círculos em cada uma das 3 "pernas" do lado direito do diagrama representa uma função de Green de 2 pontos.

foi abordado. Uma análise diagramática mais profunda pode ser feita para se chegar na conclusão de que $iZ[J]$ é efetivamente o gerador das *funções de Green conectadas*. Partindo de

$$\phi_c(x) \equiv \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} \implies J[\phi_c|x], \quad (107)$$

$$\Gamma[\phi_c] = Z[J[\phi_c]] - \int d^4x J[\phi_c|x]\phi_c(x), \quad (108)$$

realiza-se a diferenciação

$$\begin{aligned} \frac{\delta \phi_c(x)}{\delta \phi_c(y)} &= \delta^4(x-y) \\ &= - \int d^4z \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x)\delta J(z)} \frac{\delta^2 \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(z)\delta \phi_c(y)} \\ &= -i \int d^4z G_c^{(2)}(x-z)\Gamma^{(2)}(z-y), \end{aligned} \quad (109)$$

onde

$$\begin{aligned} G_c^{(2)}(x-z) &= \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2(iZ[J])}{\delta J(x)\delta J(z)} \\ \Gamma^{(2)}(z-y) &= \frac{\delta^2 \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(z)\delta \phi_c(y)}. \end{aligned} \quad (110)$$

Fazendo a Transformada de Fourier encontra-se a relação

$$G^{(2)}(k) = \frac{i}{\Gamma^{(2)}(k)}, \quad (111)$$

resultado que já havia sido encontrado na teoria livre (equação (81)) e que agora é generalizado para a teoria com interação. É possível escrever as *funções de Green conectadas* em termos das *funções de vértice*. Tomemos como exemplo o caso de 3 pontos no espaço de posição:

$$\begin{aligned} G_c^{(3)}(x, y, z) &= \frac{1}{i} \int d^4x' d^4y' d^4z' \Gamma^{(3)}(x', y', z') \times \\ &\quad \times G_c^{(2)}(x'-x)G_c^{(2)}(y'-y)G_c^{(2)}(z'-z). \end{aligned} \quad (112)$$

Conclui-se então que as funções conectadas são obtidas a partir das funções de vértice em *diagramas de árvore*

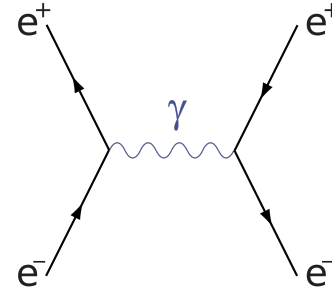


FIG. 11. Diagrama de Feynman de uma interação entre um elétron e^- e um pósitron e^+ com a troca de um fóton γ .

em que os vértices são as *funções de vértice* $\Gamma^{(n)}$ (objeto mais elementar presente em TQC) e os propagadores são as funções de 2 pontos $G_c^{(2)}$.

As funções de Green constroem as amplitudes de espalhamento, que são utilizadas nas seções de choque, medidas experimentalmente. Diagramas do tipo descrito na figura 11 são um exemplo de aplicação mais avançada do ferramental matemático abordado até então.

IX. CONCLUSÕES

Foi introduzida a formulação de integral funcional para ser aplicada na mecânica quântica e descrever os propagadores, que representam a amplitude da partícula viajar de um ponto inicial a um ponto final num dado tempo. Também foi mostrado que essa amplitude contabiliza uma soma de caminhos possíveis para a partícula percorrer. Essa ferramenta foi utilizada para se calcular a amplitude no vácuo, onde foi constatado que existe diferença entre o caso com fontes externas (mesmo que temporariamente desligadas) e na ausência das mesmas. Ao estudarmos o oscilador harmônico e calcularmos a amplitude para o mesmo na presença de uma fonte externa, o resultado foi obtido em termos da função de Green, possibilitando assim que as amplitudes calculadas com determinada quantidade de observáveis (temporalmente ordenados) fossem expressas como um produto destas funções (equação (50)).

O *propagador de Feynman* foi definido na observação do campo escalar e, por sua vez, pode ser usado para descrever as funções de Green. A partir dessa definição, os *diagramas de Feynman* foram apresentados para o campo escalar, expressando as equações matemáticas graficamente (nos espaços de momento e posição). Estas funções representadas pelos diagramas eram desconectadas, ou seja, possuíam redundância (espalhamentos sem interação). Para corrigir esse tipo de fator, foram introduzidas as *funções de Green conectadas*, bem como seus funcionais geradores.

O campo escalar foi estudado no caso da teoria livre e com interações. Em todo o estudo foi levado em conta a

aproximação para o limite clássico. Nos deparamos, na teoria com interação, com correções quânticas (análogas diagramaticamente a Loops).

O ferramental introdutório para o estudo de TQC foi apresentado, ficando como perspectiva futura uma conexão

com aspectos mais físicos (cita-se como exemplo o estudo de seção de choque, amplitude de espalhamento, aniquilação de partículas) e também de perturbações de maiores ordens, onde os Loops nos diagramas estarão presentes.

-
- [1] A. Einstein, *Ann Phys* **18**, 639 (1905).
 - [2] R. P. Feynman, in *Feynman's Thesis—A New Approach To Quantum Theory* (World Scientific, 2005) pp. 71–109.
 - [3] R. P. Feynman, *Physical Review* **76**, 769 (1949).
 - [4] A. Zee, *Quantum field theory in a nutshell*, Vol. 7 (Princeton university press, 2010).
 - [5] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field quantization* (Springer Science & Business Media, 2013).
 - [6] M. Srednicki, *Quantum field theory* (Cambridge University Press, 2007).
 - [7] P. Ramond, *Field Theory*, *Frontiers in Physics* (Avalon Publishing, 1997).