

Breve Introdução e Aplicação da Teoria da Relatividade Geral

Lucas Timotheo Sanches

Universidade Federal do ABC, Santo André, São Paulo, Brasil

(Orientador: Prof. Dr. André Gustavo Scagliusi Landulfo)

(Dated: 8 de Dezembro de 2017)

Esse trabalho irá introduzir a teoria da Relatividade Geral de maneira geométrica e enunciar e resolver de forma covariante dois “paradoxos”: O dos gêmeos em um espaço não simplesmente conexo e o da perda de energia eletrostática em um capacitor em movimento. Após isso, o formalismo da teoria também será utilizado no cálculo da velocidade angular de precessão de um spin sob a presença de um objeto massivo em rotação.

I. Introdução

A Teoria da Relatividade Geral (RG) formulada por Einstein em 1915 revolucionou a nossa visão de espaço e tempo e se tornou um dos pilares da física moderna. Ela descreve de maneira extremamente acurada a gravitação, indo de previsões sobre as órbitas de planetas no sistema solar, passando pela previsão da existência dos chamados buracos negros e das ondas gravitacionais (medidas recentemente pela colaboração LIGO/Virgo) [1] chegando a descrever a evolução do universo como um todo. A relatividade geral está intimamente ligada com a estrutura do espaço-tempo. Aliás, poderíamos afirmar que a relatividade geral é uma teoria do espaço-tempo que tem como efeito colateral descrever efeitos gravitacionais.

Este trabalho pretende introduzir brevemente a relatividade geral de maneira geométrica e apresentar suas principais características e ferramentas numa visão moderna, seguindo de perto a primeira parte de [2]. Após isto, o formalismo desenvolvido será aplicado para resolver dois “paradoxos” interessantes de um ponto de vista teórico: Os gêmeos viajando em um espaço-tempo com seção espacial não simplesmente conexa (o chamado “paradoxo dos gêmeos em um toro”) e o paradoxo da energia em um capacitor em movimento (que acaba nos ensinando uma lição valiosa sobre o papel da pressão em contextos relativísticos). Em seguida iremos deduzir uma expressão para a velocidade angular de precessão de um giroscópio próximo à um objeto massivo em rotação e iremos aplicá-la ao caso da métrica de Schwarzschild e de uma casca esférica em rotação lenta.

II. Física em espaços curvos

A geometria diferencial é a ferramenta matemática necessária para formular a teoria e nesta seção o conhecimento prévio dela é assumido [2]. Adicionalmente trabalharemos no sistema de unidades onde $G = c = 1$.

Na RG o espaço-tempo é uma variedade diferenciável M de dimensão 4 dotada de uma métrica g_{ab} com assinatura de Lorentz $(-, +, +, +)$ que não necessariamente é plana (como acontece na relatividade especial) [2].

Uma curva suave $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ é dita tipo-tempo, tipo-espaço ou tipo-luz se seu vetor tangente T for tipo-tempo ($T^a T_a < 0$), tipo-espaço ($T^a T_a > 0$) ou tipo-luz ($T^a T_a = 0$), respectivamente. A linha de mundo de uma partícula é uma curva γ tipo-tempo. [2].

Uma *geodésica* é uma curva suave $\gamma: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ cujo vetor

tangente T é paralelamente propagado ao longo de si mesmo, i.e.,

$$T^a \nabla_a T^b = 0 \quad (1)$$

onde ∇_a é a derivada covariante sem torção ($\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$ para $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ e $f \in C^\infty$) e compatível com a métrica do espaço-tempo ($\nabla_a g_{bc} = 0$). As linhas de mundo de partículas massivas em queda livre num campo gravitacional são geodésicas tipo-tempo da métrica e a linha de mundo de fótons é descrita por geodésicas tipo-luz [2].

O *tempo próprio* (τ) é o observável físico que representa a medida de um relógio que acompanha a linha de mundo da partícula. Ele é definido como o comprimento da curva γ , dado por

$$\tau = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \left(-g_{ab} T^a T^b \right)^{1/2} d\lambda. \quad (2)$$

Se parametrizarmos a curva com τ sua tangente passa a ser denotada por u^a e satisfaz $u^a u_a = -1$. Tal tangente é denominada *4-velocidade* da partícula. A partir dela podemos definir o *4-momento* para uma partícula de massa m como

$$p^a \equiv m u^a. \quad (3)$$

Em um evento $p \in M$, seja u^a a 4-velocidade de um observador e η^a a 4-velocidade de uma partícula de massa m . Através do tensor $h_a^b = \delta_a^b + u_a u^b$, chamado de *projetor ortogonal*, podemos decompor a métrica em [3]

$$g_{ab} = -u_a u_b + h_{ab} \quad (4)$$

onde h_{ab} é uma métrica espacial i.e., $h_{ab} u^b = 0$ e para x^a tal que $x^a u_a = 0$, $h_{ab} x^a x^b \geq 0$. Similarmente o 4-momento $p^a = m \eta^a$ da partícula pode ser decomposto na direção de u^a e uma direção ortogonal:

$$p^a = -(u^a p_a) u^a + h_b^a p^b. \quad (5)$$

A componente temporal de p^a é a energia da partícula de massa m como vista pelo observador de 4-velocidade u^a e a parte espacial de p^a é o momento newtoniano, \mathbb{P}^a , como medido por esse mesmo observador, i.e.,

$$E \equiv -u^a p_a = -mu^a \eta_a = \gamma m \quad (6)$$

e

$$\mathbb{P}^a \equiv h_b^a p^b, \quad (7)$$

onde $\gamma \equiv -u^a \eta_a$ é o chamado *fator de Lorentz*. Se definirmos a *velocidade Newtoniana* v^a da partícula como vista pelo observador de 4-velocidade u^a como sendo

$$v^a = \frac{p^a}{E}, \quad (8)$$

podemos escrever [4]

$$\gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2}. \quad (9)$$

Para se quantificar a curvatura de um espaço-tempo, usamos o *tensor de curvatura de Riemann*, que para um campo vetorial dual ω_c qualquer é dado por

$$\nabla_a \nabla_b \omega_c - \nabla_b \nabla_a \omega_c = R_{abc}{}^d \omega_d. \quad (10)$$

A relação entre a curvatura do espaço-tempo e a matéria e energia contida nele é dada pela *equação de Einstein*:

$$G_{ab} \equiv R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R = 8\pi T_{ab}, \quad (11)$$

onde T_{ab} é o chamado *tensor energia-momento* da matéria e G_{ab} é o chamado *tensor de Einstein*. O tensor $R_{ab} \equiv R_{acb}{}^c$ é o *tensor Ricci* e $R \equiv g^{ab} R_{ab}$ é o *escalar de curvatura* de Ricci.

Dado um tensor energia momento T_{ab} e um observador que se move com uma 4-velocidade u^a temos que a densidade de energia ρ_U medida por esse observador é dada por [2]

$$\rho_U \equiv T_{ab} u^a u^b. \quad (12)$$

Se esse observador consegue identificar duas direções x^a e y^a como sendo espaciais e ortogonais (ou seja, $u^a x_a = u^a y_a = x^a y_a = 0$ e $x^a x_a = y^a y_a = 1$), a grandeza

$$P \equiv T_{ab} x^a x^b \quad (13)$$

é interpretada como a pressão ao longo do plano ortogonal à x^a como medida por u^a e

$$\tau \equiv T_{ab} x^a y^b \quad (14)$$

é o estresse como medido por u^a ao longo de uma direção y^a no plano ortogonal à x^a .

O eletromagnetismo também pode ser escrito de forma covariante a partir do *tensor eletromagnético* F_{ab} . Com ele podemos resumir as 4 equações de Maxwell em apenas duas equações tensoriais:

$$\nabla^a F_{ab} = -4\pi j_b \quad e \quad \nabla_{[a} F_{bc]} = 0, \quad (15)$$

onde j^a é o 4-vetor da densidade de corrente e $[\dots]$ indica anti-simetrização. Para um observador se movendo com 4-velocidade u^a , temos que os campos elétrico e magnéticos medidos por esse observador são respectivamente

$$E_a \equiv F_{ab} u^b \quad e \quad B_a \equiv -\frac{1}{2} \epsilon_{ab}{}^{cd} F_{cd} u^b \quad (16)$$

onde ϵ_{abcd} é o tensor totalmente antissimétrico que satisfaz $\epsilon_{abcd} \epsilon^{abcd} = -24$.

Por fim, temos que dada uma métrica e um sistema de coordenadas o elemento de volume nessas coordenadas é dado na base coordenada por [2]

$$dV = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} dx^1 \dots dx^4. \quad (17)$$

Vale ressaltar que dV é invariante sob uma transformação de coordenadas.

III. Aplicações

A. Paradoxo dos gêmeos em topologia não trivial

Suponha um universo cuja geometria espacial é uma variedade compacta, e sem fronteiras. Tal universo é dito *fechado* [2]. Um universo que é compacto em ao menos uma dimensão espacial permite que um observador viaje ao longo de uma trajetória que o traga de volta a posição inicial sem precisar de uma aceleração. Tal habilidade dá origem a uma versão mais sutil de um “paradoxo” da relatividade restrita: O paradoxo dos gêmeos em topologia não trivial [5].

Por simplicidade, vamos considerar um espaço-tempo de dimensão $(1+1)$ que plano mas compacto na dimensão espacial e que possui largura finita L . As coordenadas de Minkowski são adequadas para descrever tal espaço, porém por ser compacto em x , devemos impor à elas a seguinte condição:

$$(t, x+L) = (t, x) \quad (18)$$

Com essa identificação de coordenadas a métrica do espaço de Minkowski em duas dimensões fica

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2. \quad (19)$$

Na Figura 1 (A) temos um diagrama tradicional de espaço-tempo do sistema e na figura 1 (B) temos a visão da topologia global do espaço-tempo. O fato de x ser uma dimensão compacta, nos leva intuitivamente à ideia de que a topologia deste espaço-tempo deve ser um cilindro cujo lado vale L .

Neste dado espaço, consideremos dois observadores inerciais, α e β com velocidade relativa $v < 1$. Suponhamos também, que no evento $(0,0)$ α e β se encontram e sincronizam

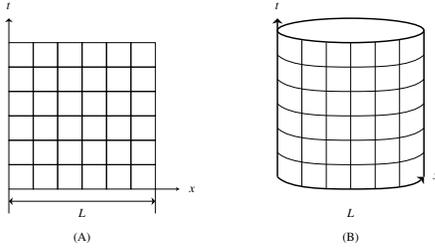


Figura 1. Topologia do espaço tempo.

seus relógios. Graças à topologia do espaço, α e β devem se encontrar novamente nos eventos $(nL/v, nL)$ (onde n é um inteiro que representa a quantidade de voltas dadas no espaço) e podem então comparar novamente seus relógios.

A princípio, não há razão para suspeitar que a descrição dos observadores não seja simétrica, já que estes são inerciais. Sendo assim, do ponto de vista de α podemos desenhar num diagrama de espaço tempo as linhas de mundo de α e β como vistas por α como vemos na Figura 2. Novamente, é feita a representação tanto no diagrama de espaço tempo tradicional (A) quanto no diagrama que mostra a topologia do espaço-tempo (B). É importante frisar que a Figura 2 (B) é meramente ilustrativa e serve apenas para fins didáticos. Sendo assim, apesar da linha de mundo do observador em movimento (em azul) ser tipo-tempo a dita figura pode não representar fielmente esse caráter.

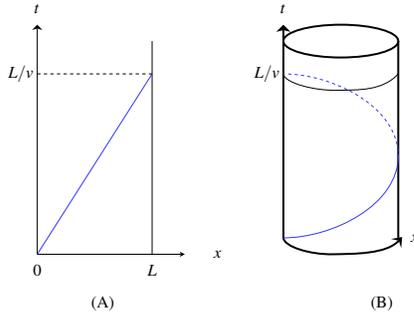


Figura 2. Linha de mundo de β (azul) como vista por α .

Vamos agora calcular o intervalo de tempo próprio transcorrido entre os dois primeiros encontros para ambos os observadores. Começamos escrevendo a equação das curvas descritas por α e β :

$$\begin{aligned} \alpha: x^\mu &= (t, 0), \\ \beta: y^\mu &= (t, vt). \end{aligned} \quad (20)$$

Os vetores tangentes na base coordenada são dados por

$$\begin{aligned} \alpha: T^\mu &= (1, 0), \\ \beta: U^\mu &= (1, v). \end{aligned} \quad (21)$$

O tempo próprio no intervalo de $t = 0$ à $t = L/v$ é dado pela Eq. (2)

• Para α :

$$\Delta\tau_\alpha = \int_0^{L/v} dt = \boxed{\frac{L}{v}}. \quad (22)$$

• Para β :

$$\Delta\tau_\beta = \int_0^{L/v} (1 - v^2)^{1/2} dt = \boxed{\frac{L}{v}(1 - v^2)^{1/2}}. \quad (23)$$

Como $v < 1$, temos que $\Delta\tau_\alpha > \Delta\tau_\beta$ e no encontro dos observadores, β está mais novo que α . O “paradoxo” surge quando lembramos que *a priori* não há razão para desconfiar que o problema não é simétrico: Da mesma maneira que α se considera parado e julga que β envelhece menos, β poderia fazer o mesmo tipo de análise em relação a α já que ambos os observadores são inerciais. Aqui, diferentemente do paradoxo dos gêmeos da relatividade restrita, não se pode usar o argumento de que o observador em movimento acelera para reencontrar o outro (e portanto consegue determinar o seu estado estado de movimento), quebrando a simetria do problema, já que o encontro neste caso é provocado na ausência de aceleração e é devido à topologia não convencional do espaço-tempo.

Acontece que, apesar da falta de aceleração, existe um experimento bastante sutil com pulsos de luz e relógios que pode ser feito por ambos os observadores de maneira independente para se determinar seu estado de movimento, aproveitando a topologia não trivial do espaço.

Suponha que em um evento “0”, α e β (em azul na Figura 3) emitam simultaneamente dois pulsos de luz em direções opostas (em vermelho), que se propagam pelo espaço até o alcançar novamente num evento futuro.

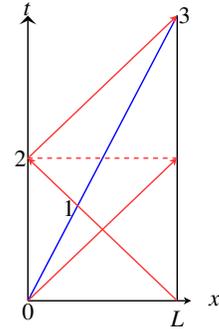


Figura 3. Pulso de luz (em vermelho) emitido por α e a linha de mundo de β (em azul).

Graças à topologia, vemos que há uma separação das duas metades dos cones de luz que representam os pulsos. O observador α , (cuja linha de mundo é o próprio eixo do tempo) recebe as duas metades do pulso no mesmo evento “2”. Já para β (cuja linha de mundo está representada pela cor azul), uma parte do pulso é recebida no evento “1” e outra no evento “3”.

A partir deste experimento simples fica claro que observadores em “repouso” não conseguem detectar nenhum atraso

na recepção de um pulso de luz emitido por eles mesmos em algum momento do passado, enquanto que observadores “em movimento” recebem seus pulsos com um atraso.

É interessante calcular a diferença de tempo próprio entre os eventos “1” e “3”. Para isso, começamos calculando a diferença de tempo coordenado entre eles como medida por α . Vamos considerar duas cópias do espaço-tempo, que se estendem de $-L$ à 0 e de L à $2L$, como mostra a Figura 4. Estas cópia nos permitem considerar os efeitos da viagem dos pulsos de luz e observadores pela topologia não trivial do espaço de maneira mais simples.

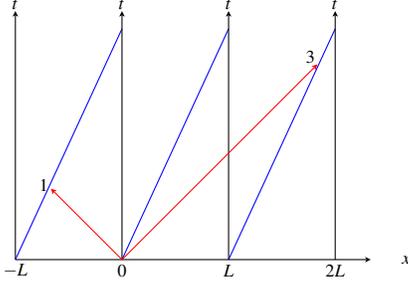


Figura 4. Extensão do espaço-tempo que representa seus efeitos topológicos não triviais.

Para encontrarmos os tempos coordenados t_1 e t_3 em que as recepções dos pulsos ocorrem, basta determinar os pontos de encontro das linhas de mundo dos pulsos de luz com as linhas de mundo do observador β . Para o pulso de luz que viaja no sentido de x positivo, temos a equação

$$t = x. \quad (24)$$

A linha de mundo de β no intervalo $L \leq x \leq 2L$ é dada por

$$t = \frac{1}{v}(x - L). \quad (25)$$

Resolvendo o sistema formado das Eqs. (24) e (25) para t , encontramos

$$t_3 = \frac{L}{1 - v}. \quad (26)$$

De maneira similar, temos a equação do pulso de luz na direção de x negativo e de β no intervalo $-L \leq x \leq 0$ dadas, respectivamente, por

$$t = -x \quad \text{e} \quad t = \frac{1}{v}(x + L). \quad (27)$$

Sendo assim o tempo coordenado de encontro t_1 é dado por

$$t_1 = \frac{L}{1 + v}. \quad (28)$$

Para calcular a diferença de tempo próprio entre os eventos de recepção basta aplicarmos a Eq. (2) com os vetores tangentes dados pela Eq. (21) no intervalo determinado pelas Eqs. (28) a (26) o que resulta em

$$\Delta\tau = \int_{\frac{L}{1+v}}^{\frac{L}{1-v}} (1 - v^2)^{1/2} dt = \boxed{2\gamma Lv}. \quad (29)$$

Esse resultado nos mostra que a existência de uma dimensão compacta cria uma família de observadores “privilegiados” (aqueles para que $\Delta\tau = 0$). Isso implica que temos uma quebra da invariância de Lorentz global, ainda que a invariância local seja mantida.

B. Paradoxo do capacitor

Consideremos um capacitor de placas paralelas de área A e separação ℓ cujo campo é paralelo à direção x como mostrado na Figura 5 no espaço-tempo de Minkowski cuja métrica é dada por $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$

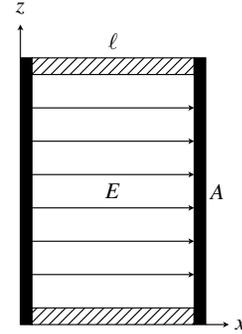


Figura 5. Capacitor de placas paralelas fechado na forma de uma caixa retangular.

Vamos considerar dois observadores, um em repouso com o capacitor cuja 4-velocidade é u^a e outro com velocidade v na direção x e 4-velocidade v^a . Podemos escrever as componentes de u^a e v^a na base coordenada da seguinte maneira:

$$u^\mu = (1, 0) \quad \text{e} \quad v^\mu = \gamma(v)(1, v). \quad (30)$$

Dado que o tensor energia-momento do campo eletromagnético é [2]

$$T_{ab}^{(EM)} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{ac} F_b^c - \frac{1}{4} \eta_{ab} F_{dc} F^{dc} \right) \quad (31)$$

podemos calcular a densidade de energia do campo como medida pelo observador em movimento usando a Eq. (12) e obter

$$\rho_U \equiv T_{ab}^{(EM)} v^a v^b = \frac{E^2}{8\pi}. \quad (32)$$

Através da Eq. (16) vemos que¹ o campo elétrico medido por v^a é $E = E_0$ e portanto $\rho_U = \rho_{U_0} \equiv T_{ab}u^a u^b$ mas o comprimento do capacitor ℓ deve contrair por um fator γ [6] e portanto

$$\rho_U \equiv \frac{U}{A\ell/\gamma} = \rho_{U_0} = \frac{U_0}{A\ell} \Rightarrow \boxed{U = \frac{U_0}{\gamma}}, \quad (33)$$

ou seja, a energia U do capacitor deve *diminuir* por um fator γ quando comparada à energia U_0 no referencial de repouso do capacitor. Por outro lado, sabemos da teoria que a energia de um sistema deve *aumentar* por um fator γ i.e. $U = \gamma U_0$ [2], exatamente o oposto do que prevê a equação (33) dando origem à um “paradoxo”, em aspas, pois como mostraremos a seguir ele é apenas aparente e surge porque os argumentos anteriores deixam de considerar que os suportes do capacitor devem exercer uma pressão não nula sobre as laterais do mesmo para mantê-lo em equilíbrio.

Por ser um contínuo de matéria, os suportes podem ser modeladas pelo tensor energia-momento de um fluido perfeito [2]

$$T_{ab}^{(M)} = \rho_0 u_a u_b + P_0 (\eta_{ab} + u_a u_b), \quad (34)$$

onde ρ_0 é a densidade do suporte e P_0 a pressão exercida por ela no seu referencial de repouso.

O sistema suportes + campo pode ser efetivamente descrito pela soma dos tensores energia-momento (31) e (34):

$$T_{ab} = \rho_0 u_a u_b + P_0 (\eta_{ab} + u_a u_b) + \frac{1}{4\pi} \left(F_{ac} F^c_b - \frac{1}{4} \eta_{ab} F_{dc} F^{dc} \right). \quad (35)$$

A densidade de energia medida pelo observador em movimento é obtida a partir da Eq. (12) e é dada por

$$\rho_U = T_{ab} v^a v^b = \gamma^2 (\rho_0 + v^2 P_0) + \frac{E^2}{8\pi}. \quad (36)$$

Deve-se lembrar de que o capacitor está em equilíbrio em seu referencial de repouso e portanto a pressão que os suportes (cuja a área de seção transversal é α) do capacitor exercem sobre a sua lateral deve ser igual a força elétrica entre as placas, assim

$$P_0 = \frac{E^2 A}{8\pi \alpha} \quad (37)$$

e substituindo a Eq. (37) na Eq. (36) obtemos

¹ A partir de agora vamos denotar todas as grandezas medidas no referencial de repouso do capacitor por um subíndice 0.

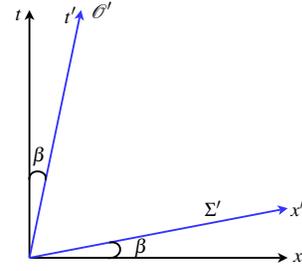


Figura 6. Diagrama de espaço-tempo dos observadores no paradoxo do capacitor. O observador em azul (\mathcal{O}') é o que se move em relação ao capacitor.

$$\rho_U = \gamma^2 \left(\rho_0 + v^2 \frac{E^2 A}{8\pi \alpha} \right) + \frac{E^2}{8\pi}. \quad (38)$$

A Figura 6 é o diagrama de espaço-tempo dos observadores sendo que o observador que se move em relação ao capacitor (\mathcal{O}') está representado em azul. A partir do diagrama vemos que a equação do hiperplano Σ' , que é a hipersuperfície de simultaneidade como vista por \mathcal{O}' , é dada por

$$\Sigma' = \{(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 | t = vx\} \quad (39)$$

e a métrica espacial induzida em Σ' é

$$dS'^2 = \gamma^{-2} dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (40)$$

Usando a equação (17) obtemos o elemento de volume como visto pelo observador em movimento:

$$dV' = \frac{1}{\gamma} dx dy dz. \quad (41)$$

A energia do capacitor como medida pelo observador em movimento é encontrada integrando-se a densidade de energia no volume do capacitor i.e.

$$U = \int \rho_U dV' = \gamma \int_0^a \int_0^b \int_0^l \left(\rho_0 + \frac{E^2}{8\pi \gamma^2} \right) dx dy dz + \gamma \int_0^c \int_0^d \int_0^l \frac{v^2 E^2 A}{8\pi \alpha} dx dy dz \Rightarrow \quad (42)$$

$$U = \gamma \left(m_0 + v^2 \ell A \frac{E^2}{8\pi} \right) + \frac{\ell A E^2}{\gamma 8\pi},$$

onde m_0 é a massa de repouso dos suportes. Nota-se também que introduzimos parâmetros a, b, c e d nos limites de integração de tal forma que $a * b = A, c * d = \alpha$. Lembremos que a segunda integral deve ser feita sobre o volume dos suportes do capacitor, já que a expressão para a pressão de equilíbrio só é válida nessa região.

Podemos facilmente identificar a grandeza $E^2 \ell A / 8\pi$ como a energia do campo elétrico medida no referencial de repouso do capacitor i.e. U_0 e reescrever (42) como

$$U = \gamma m_0 + (\gamma^2 + 1/\gamma) U_0. \quad (43)$$

Uma rápida manipulação algébrica do termo em parênteses revela que ele todo equivale à γ e finalmente chegamos em

$$U = \gamma(m_0 + U_0) \quad (44)$$

Poderíamos ter considerado a massa dos suportes do capacitor desprezíveis desde a Eq. (34) se assim desejássemos porém não o fizemos para tornar a solução um pouco mais generalista. De qualquer modo o ponto central do problema (o de que U aumenta por um fator γ) ainda é provado se $m_0 \rightarrow 0$:

$$U = \gamma U_0, \quad (45)$$

que é a lei de transformação de energia prevista pela teoria.

Como vemos a pressão exercida pelos suportes do capacitor exercem um papel fundamental na resolução do problema. Essencialmente vemos que a pressão em um referencial se transforma em energia em outro referencial e portanto a falha em considerar sua existência leva à previsões dissonantes a respeito das quantidades medidas por observadores em movimento.

C. Precessão de um spin sob a influencia de um objeto em rotação

É sabido que objetos massivos como estrelas e buracos negros em rotação induzem rotação em observadores de momento angular zero em suas proximidades num fenômeno conhecido como *arraste de referenciais inerciais*. Esse efeito diminui à medida que tais observadores se afastam do objeto e desaparecem completamente no infinito [3]. Consideremos um observador estático nas proximidades de um objeto em rotação que carrega consigo (aplicando as forças necessárias para tanto em seu centro de massa e portanto não exercendo nenhum torque) um giroscópio que mantém seu eixo em repouso em relação ao referencial local. Devido ao efeito de arraste o observador estático ira perceber que os eixos do giroscópio precessionam com relação ao referencial inercial local e verá também que a taxa de variação do momento angular do giroscópio (ou seu spin) S é dada por [7]

$$\frac{dS}{d\tau} = \omega \times S, \quad (46)$$

onde ω é a velocidade angular de precessão do giroscópio (daqui em diante usaremos giroscópio e spin como sinônimos). Iremos a seguir derivar uma expressão para ω e $dS/d\tau$ que nos permita calcular essas quantidades em qualquer métrica que desejarmos. O primeiro passo será introduzir a noção do transporte de Fermi-Walker seguindo de perto [8].

Seja $\gamma(s)$ a linha de mundo de um observador cujo vetor tangente é V . Vamos definir num ponto p da curva a base ortonormal E_1, E_2, E_3, E_4 e seus duais E^1, E^2, E^3, E^4 com $E_4 = V$. Gostaríamos de transportar esses vetores ao longo de $\gamma(s)$ sem alterar suas propriedades porém se fizermos isso por meio de um transporte paralelo teremos que $V \neq E_4$ e E_1, E_2, E_3 não permanecerão ortogonais à V a menos que $\gamma(s)$ seja uma geodésica. A *derivada de Fermi-Walker* (\mathcal{F}) realiza tal transporte de um vetor U ao longo da curva $\gamma(s)$ e é dada por

$$\mathcal{F}_V U^a = \nabla_V U^a + g(U, V) \nabla_V V^a - g(U, \nabla_V V) V^a, \quad (47)$$

onde $\nabla_V \equiv V^a \nabla_a$ e satisfaz as seguintes propriedades:

1. Se $\gamma(s)$ é uma geodésica e $V = d/ds$ então $\mathcal{F}_V = \nabla_V$;
2. $\mathcal{F}_V V = 0$;
3. Se X e Y são campos vetoriais ao longo de $\gamma(s)$ tais que

$$\mathcal{F}_V X = \mathcal{F}_V Y = 0,$$

$$\text{então } \mathcal{F}_V g(X, Y) = 0$$

4. Se X é um campo vetorial ao longo de $\gamma(s)$ ortogonal à V então

$$\mathcal{F}_V X = [\nabla_V X]_{\perp},$$

onde $[T]_{\perp}$ indica à componente ortogonal do tensor, obtida pelo operador de projeção ortogonal (exatamente como feito anteriormente para o 4-momento).

Um giroscópio essencialmente é um instrumento que aponta sempre na mesma direção e, portanto, matematicamente seu spin é transportado com a derivada de Fermi nula ao longo da linha de mundo do observador que o carrega pelo seu centro de massa (sem exercer torques) próximo ao objeto em rotação. Vamos assumir que a precessão ocorre em um espaço-tempo estacionário, que portanto admite um campo de Killing tipo-tempo ξ , e que o observador que carrega o giroscópio pelo seu centro de massa segue nas órbitas de ξ . Sendo assim, temos

$$\xi \cdot S = 0. \quad (48)$$

Usando que $V^b = (-\xi^a \xi_a)^{-1/2} \xi^b$ além da Eq. (48), podemos escrever a Eq. (47) como [7]

$$\nabla_{\xi} S = -\xi (S \cdot \nabla_{\xi} \xi) / (\xi \cdot \xi), \quad (49)$$

onde a notação $A \cdot B$ é equivalente à $g(A, B)$.

O observador obviamente não realiza transporte de Fermi sobre seus eixos espaciais mas sim os mantém fixos em relação a um dado sistema de coordenadas e portanto realiza transporte de Lie sobre eles ao longo do vetor de Killing ξ . Sendo assim, definimos:

$$\frac{dS^a}{dt} \equiv (\mathcal{L}_\xi \mathcal{S})^a \equiv (\nabla_\xi \mathcal{S})^a - (\nabla_S \xi)^a. \quad (50)$$

Como $(\nabla_S \xi)^a = S^b \nabla_b \xi^a$ e $\nabla_\xi \mathcal{S}$ é dado pela Eq. (49) temos substituindo na Eq (50)

$$(\mathcal{L}_\xi \mathcal{S})^a = -\frac{\xi^a S_c \xi^b \nabla_b \xi^c}{\xi \cdot \xi} - S^b \nabla_b \xi^a.$$

Usando a métrica para baixar os índices dos argumentos das derivadas covariantes e colocando ambos os termos sobre um denominador comum temos

$$(\mathcal{L}_\xi \mathcal{S})^a = -\frac{1}{\xi \cdot \xi} \left[g^{cd} \xi^a S_c \xi^b \nabla_b \xi_d + (\xi \cdot \xi) g^{ad} S^b \nabla_b \xi_d \right].$$

Escrevendo o produto $(\xi \cdot \xi)$ explicitamente nos colchetes e simplificando usando a anti-simetria $\nabla_b \xi_a = -\nabla_a \xi_b$ imposta sobre ξ pela equação de Killing, $\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 0$, temos

$$(\mathcal{L}_\xi \mathcal{S})^a = \frac{1}{(\xi \cdot \xi)} \left[\xi_d \xi^a S_b \nabla^b \xi^d - \xi_d \xi^d S_b \nabla^b \xi^a \right]. \quad (51)$$

Novamente usando a equação de Killing temos

$$\xi_d S_b \xi^{[a} \nabla^b \xi^d] = \frac{\xi_d S_b}{3} \left[\xi^a \nabla^b \xi^d - \xi^d \nabla^b \xi^a + \xi^b \nabla^d \xi^a \right],$$

onde o ultimo termo claramente é nulo gracias à Eq. (48), então se o somarmos à Eq. (51) podemos escrever

$$(\mathcal{L}_\xi \mathcal{S})^a = \frac{3 \xi_d S_b \xi^{[a} \nabla^b \xi^d]}{(\xi \cdot \xi)}. \quad (52)$$

Aplicando as identidades do delta de Kronecker e do tensor de Levi-Civita [2],

$$\delta^{\mu_1 \dots \mu_4}_{\nu_1 \dots \nu_4} = 4! \delta^{[\mu_1 \dots \mu_4]}_{\nu_1 \dots \nu_4}, \quad (53)$$

$$\varepsilon^{a_1 a_2 a_3 a_4} \varepsilon_{a_1 a_2 b_3 b_4} = -2! \delta^{[a_3 a_4]}_{b_3 \dots b_4}, \quad (54)$$

e

$$\delta^{\mu_1 \dots \mu_4}_{\nu_1 \dots \nu_4} T^{\nu_1 \dots \nu_4} = 4! T^{[\nu_1 \dots \nu_4]} \quad (55)$$

chegamos finalmente em [7]

$$(\mathcal{L}_\xi \mathcal{S})^a = \xi_b \varepsilon^{abcd} \omega_c S_d, \quad (56)$$

onde

$$\omega^a = -\frac{\xi_b \varepsilon^{abcd} \nabla_c \xi_d}{2(\xi \cdot \xi)}. \quad (57)$$

A seguir computaremos a Eq. (57) para a métrica de Schwarzschild e para o exterior de uma casca esférica em rotação lenta.

1. Métrica de Schwarzschild

A métrica de Schwarzschild é dado por [2]

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (58)$$

onde $f = (1 - 2M/r)$. Abaixando o índice de ξ temos

$$\xi_\alpha = g_{\alpha\beta} \xi^\beta = g_{\alpha t} \xi^t$$

cuja única componente não nula é

$$\xi_t = -(1 - 2M/r). \quad (59)$$

Sendo assim a derivada covariante de ξ é dada por

$$\nabla_\sigma \xi_\lambda = \partial_\sigma \xi_\lambda + (1 - 2M/r) \Gamma^\nu_{\sigma\lambda}, \quad (60)$$

mas por outro lado temos

$$\nabla_\lambda \xi_\sigma = \partial_\lambda \xi_\sigma + (1 - 2M/r) \Gamma^\nu_{\sigma\lambda}. \quad (61)$$

Subtraindo a Eq. (61) da Eq. (60) temos

$$\nabla_\sigma \xi_\lambda - \nabla_\lambda \xi_\sigma = \partial_\sigma \xi_\lambda - \partial_\lambda \xi_\sigma. \quad (62)$$

A Eq. (57) fica

$$\omega^\alpha = -\frac{\xi^t}{2(\xi \cdot \xi)} \left[\varepsilon^{t\alpha r\theta} (\nabla_r \xi_\theta - \nabla_\theta \xi_r) + \varepsilon^{t\alpha r\theta} (\nabla_r \xi_\theta - \nabla_\theta \xi_r) \right],$$

mas computando os termos em parênteses com o auxílio da Eq. (62) vemos que

$$\nabla_r \xi_\theta - \nabla_\theta \xi_r = \partial_r \xi_\theta - \partial_\theta \xi_r = 0 \quad (63)$$

$$\nabla_r \xi_\phi - \nabla_\phi \xi_r = \partial_r \xi_\phi - \partial_\phi \xi_r = 0 \quad (64)$$

$$\nabla_\theta \xi_\phi - \nabla_\phi \xi_\theta = \partial_\theta \xi_\phi - \partial_\phi \xi_\theta = 0 \quad (65)$$

e portanto temos

$$\omega = 0, \quad (66)$$

assim como esperávamos para esse caso.

2. Exterior da casca em rotação lenta

A métrica do exterior da casca em rotação lenta é dada por [3]

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 - 2h dt d\phi, \quad (67)$$

onde $f = (1 - 2M/r)$, $h = 2J \sin^2 \theta / r$ e J é o momento angular da casca. Abaixando o índices de ξ temos duas componentes não nulas graças ao elemento não diagonal da métrica:

$$\xi_t = -f \xi^t \quad (68)$$

$$\xi_\phi = -h \xi^t. \quad (69)$$

Utilizando argumentos similares aos usados para chegarmos na Eq. (62) vemos que as derivadas covariantes não dependem dos símbolos de conexão e portanto uma simplificação similar à feita no caso da métrica de Schwarzschild é possível nesse caso. Com ela, obtemos

$$\omega^\alpha = \left[\xi_\phi \varepsilon^{\phi\alpha\theta t} \partial_\theta \xi_t + \xi_\phi \varepsilon^{\phi\alpha r t} \partial_r \xi_t - \xi_t \varepsilon^{t\alpha\phi\theta} \partial_\theta \xi_\phi - \xi_t \varepsilon^{t\alpha\phi r} \partial_r \xi_\phi \right] \quad (70)$$

e lembrando que

$$\varepsilon^{a_1 \dots a_n} = \frac{\tilde{\varepsilon}^{a_1 \dots a_n}}{\sqrt{-g}} \quad (71)$$

$$\varepsilon_{a_1 \dots a_n} = \tilde{\varepsilon}_{a_1 \dots a_n} \sqrt{-g} \quad (72)$$

onde $\tilde{\varepsilon}^{a_1 \dots a_n}$ é o símbolo de Levi-Civita no espaço euclidiano, temos que as componentes não nulas da velocidade angular de precessão são

$$\omega^r = \frac{J \sin(2\theta)}{r \sqrt{\frac{4rJ^2 \sin^4 \theta}{r-2M} + r^4 \sin^2 \theta}} \quad (73)$$

e

$$\omega^\theta = \frac{J \sin^2 \theta}{r^2 \sqrt{\frac{4rJ^2 \sin^4 \theta}{r-2M} + r^4 \sin^2 \theta}} \left(1 + \frac{2M}{f} \right). \quad (74)$$

Vemos que, ω é ortogonal à linha de mundo do observador estacionário e que suas componentes espaciais não nulas, Eq. (73) e Eq. (74), representam a velocidade angular do giroscópio com relação ao referencial do observador estacionário [7]. O efeito de arraste de referenciais é interessante não só de um ponto de vista teórico, já que através cálculos similares aos feitos nesse trabalho é possível prever a velocidade angular de precessão de um giroscópio na órbita terrestre [9].

IV. Conclusões

Com esse trabalho, é possível ver que mesmo para problemas em que é possível se obter soluções apenas fazendo uso da Relatividade Restrita, como no caso do paradoxo dos gêmeos em um espaço compacto e do paradoxo do capacitor em movimento, o formalismo da teoria geral mostra-se mais poderoso e elegante, revelando detalhes que o formalismo restrito pode deixar obscurecido, como o fato de que a pressão em um dado referencial é interpretada como energia em outro no paradoxo do capacitor. Mostramos também que a RG é capaz de prever efeitos gravitacionais interessantes, como o arraste de referenciais inerciais e a precessão de giroscópios como consequência desse efeito, fato esse que foi confirmado pelo experimento descrito em [9].

V. Agradecimentos

Gostaria de agradecer à meu orientador, Prof. Dr. André G. S. Landulfo, pela orientação, ajuda, paciência e apoio durante e anteriormente ao desenvolvimento desse trabalho e a meus pais pelo apoio incondicional.

- [1] B. A. et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016).
- [2] R. M. Wald, *General Relativity* (University Of Chicago Press, 1984).
- [3] E. Poisson, *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics* (Cambridge University Press, 2007).
- [4] R. Geroch, *General Relativity: 1972 Lecture Notes (Lecture Notes Series) (Volume 1)* (Minkowski Institute Press, 2013).
- [5] G. E. A. Matsas, "Eletromagnetismo - notas de aula não divulgadas," (2014).

- [6] W. R. e Jack Denur, American Journal of Physics **56**, 795 (1988).
- [7] K. S. Thorne, General Relativity and Cosmology , 237 (1971).
- [8] S. W. H. e G. F. R. Ellis e P. V. Landshoff, D. R. Nelson, D. W. Sciama, and S. Weinberg, *The Large Scale Structure of Space-Time (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)* (Cambridge University Press, 1975).
- [9] C. W. F. E. et al., Phys. Rev. Lett. **106**, 221101 (2011).