

Espectro de emaranhamento de férmions livres na presença de campos magnéticos altos

Marcela Derli de Oliveira
Universidade Federal do ABC
(Dated: 10 de maio de 2023)

O objetivo desse trabalho é estudar analiticamente férmions livres que se movimentam em uma rede quadrada e o espectro de emaranhamento entre duas partes dessa rede. Esse estudo foi motivado pelo trabalho de Li e Haldane[9], que estudaram de maneira numérica férmions interagentes se movimentando em uma esfera. Apesar dessa formulação do problema parecer muito peculiar, ela poderia ser parafraseada como o espectro de emaranhamento entre duas barras Hall no limite de campo magnético extremamente alto, o que permite definir o trabalho como o estudo de sistemas topológicos em matéria condensada em regimes extremos da matéria.

Palavras-chave: Emaranhamento Quântico, Efeito Unruh, Topologia, Informação Quântica, Efeito Hall.

I. INTRODUÇÃO

O estudo de sistemas topológicos é de grande interesse na física moderna. Além de representarem uma quebra no paradigma de Landau para caracterizar fases, eles tem importância na procura de sistemas quânticos úteis para a construção de computadores quânticos [4].

Uma maneira interessante de se estudar as características topológicas de um sistema quântico é estudando sua matriz de densidade reduzida [14], já que a entropia de emaranhamento de sistemas topológicos apresenta um termo extra, ligado a estrutura topológica do espaço [8]. Subsequente se identificou que o espectro de emaranhamento continha mais informações que apenas a matriz de densidade reduzida e a entropia de emaranhamento.

Li e Haldane [9] mostraram evidências numéricas que o espectro de emaranhamento do estado fundamental de sistemas Hall está relacionado aos estados de borda dos sistemas Hall abertos. Em seguida se obteve evidências teóricas que comprovam essa hipótese para sistemas com invariância conforme[1, 13]. A principal motivação desses estudos era mostrar que o espectro de emaranhamento trás muito mais informação sobre o sistema topológico que o termo topológico da entropia de emaranhamento. Uma construção mais precisa entre espectro de emaranhamento e estados de borda foi finalmente dada por Swingle e Senthil[15].

De maneira inusitada, sistemas topológicos apresentam conexões interessantes com o estudo de fenômenos muito conhecidos em teorias quânticas de campo: o efeito Unruh e a radiação Hawking. O efeito Unruh é um resultado interessantíssimo de teoria quântica de campos em que observadores acelerados discordam do conteúdo de partículas de um campo quântico. No centro desse problema reside o fato de que os dois observadores, inercial e não-inercial, vêem o espaço de maneira diferente. Um observador não-inercial entende o espaço-tempo plano como tendo um horizonte de eventos e isso o impede de usar todos os modos de campo necessários para descrever a função de onda que o observador inercial vê. Assim, o efeito Unruh e a radiação Hawking essencialmente correspondem ao estudo do espectro de emaranhamento de

dois subsistemas.

A principal motivação desses estudos era mostrar que o espectro de emaranhamento trás muito mais informação sobre o sistema topológico que o termo topológico da entropia de emaranhamento. Para isso, vamos estudar o que pode ser definido como o problema topológico mais simples que se pode definir: férmions livres em uma rede quadrada na presença de um campo magnético altíssimo.

Na Seção II será discutido um modelo topológico simples de férmions livres na presença de um campo magnético. Estudaremos o espectro do modelo, as representações dos auto-estados de partícula única e o número de Chern da banda (mostrando que efetivamente o modelo é topológico). Na seção III calcularemos o espectro de emaranhamento. Finalmente, na seção IV apresentamos nossas conclusões.

II. O MODELO

Um dos problemas mais interessantes em matéria condensada é o efeito Hall quântico[3]. Nele, elétrons se movimentam em um campo magnético em uma superfície metálica formando um estado eletrônico que pode ter características topológicas. Uma das principais características do efeito Hall é o surgimento de um estado de borda com condutividade ideal. O ponto de partida para o estudo do efeito Hall é o entender o grupo de translações magnéticas e os níveis de Landau associados. Para campos magnéticos convencionais, os raios das órbitas de Landau são muito maiores que o parâmetro de rede, o que permite desconsiderar os efeitos da rede cristalina[3]. Contudo, existem situações em que devemos revisar essa simplificação. Em situações com campos astronômicos, ou surgindo de maneira efetiva no caso da presença da interação spin-orbita[7].

O ponto de partida de nosso trabalho é a Hamiltoniana de elétrons livres que no formalismo de segunda quantização tem a forma:

$$H = \sum_{x,y} (c_{x+1,y}^\dagger c_{x,y} + e^{i\pi x} c_{x,y+1}^\dagger c_{x,y} + h.c.), \quad (1)$$

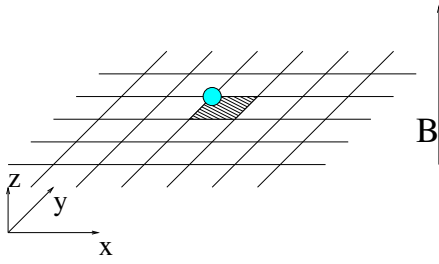


Figura 1: Representação esquemática do modelo. O fêrmion é representado pelo círculo azul. Ele pode se movimentar nos sítios da rede quadrada. Quando ele se movimenta em uma trajetória fechada ele ganha uma fase por conta do campo magnético externo, B . A menor órbita fechada é chamada de plaqueta, e está representada pelo quadrado hachurado, onde ele recebe uma fase de π . Para obter esse fluxo magnético π por uma plaqueta no caso da escala atômica seria necessário um campo magnético da ordem de milhares de Tesla.

onde $c_{x,y}$ são os operadores fermiônicos nos sítios de uma rede quadrada (veja figura 1). A amplitude de "hopping" é escolhida como 1 e determina a escala de energia do model. Finalmente a fase no termo de "hopping" surgiu da substituição de Peirls[3] e da escolha do calibre de Landau para o potencial vetor. Essa fase captura o efeito de um campo magnético perpendicular ao plano onde os elétrons se movimentam. Como toda escolha de calibre, a física do problema não depende dessa escolha.

Essa hamiltoniana descreve uma rede de período de dois sítios em x . Ela pode ser resolvida usando-se uma transformada de Fourier que leve em consideração o fato da célula unitária ser de duas plaquetas por conta do fluxo magnético π . Isso pode ser feito de maneira direta e o sistema descrito pela Eq.(1) não possui gap de energia, apresentando dois cones de Dirac na primeira zona de Brillouin ($\pi, \pm \frac{\pi}{2}$),

$$E = \pm 2 \sqrt{\cos^2 \frac{k_x}{2} + \cos^2 k_y}, \quad (2)$$

onde k_x e k_y são os momentos definidos na transformada de Fourier para as direções x e y respectivamente. Para encontrarmos um modelo semelhante ao da física do efeito Hall inteiro vamos considerar a possibilidade de os elétrons executarem "hoppings" de segundos vizinhos,

$$H = \sum_{x,y} c_{2x+1,y}^\dagger c_{2x,y} + e^{2i\pi x} c_{2x,y+1}^\dagger c_{2x,y} + ite^{2i\pi x} c_{2x+1,y+1}^\dagger c_{2x,y} + ite^{2i\pi x} c_{2x,y+1}^\dagger c_{2x+1,y} + h.c. \quad (3)$$

onde a amplitude desse "hopping" de segundos vizinhos é dada por t . Na Eq.(3) nos explicitamente apresentamos os sítios pares e ímpares na direção x . Isso torna evidente que devemos fazer as substituições dos operadores,

$$\begin{cases} c_{2x,y} = a_{x,y} \\ c_{2x+1,y} = b_{x,y} \end{cases} \quad (4)$$

e aplicarmos a transformada de Fourier para finalmente encontramos

$$H = \sum_{\vec{k}} \begin{bmatrix} a_{\vec{k}}^\dagger & b_{\vec{k}}^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2(\cos k_y) & e^{i\frac{k_x}{2}} (2 \cos \frac{k_x}{2}) \\ e^{-i\frac{k_x}{2}} (2 \cos \frac{k_x}{2}) & -2(\cos k_y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{\vec{k}} \\ b_{\vec{k}} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

que evidencia que o efeito do fluxo π é o de criar um isospin 1/2 para um fêrmion sem spin físico. É por conta do surgimento desse isospin que esse modelo de fêrmions livre se compota como um modelo topológico. identificando os operadores a e b como as componentes do isospin, temos que o modelo é equivalente a

$$H = \vec{h} \cdot \vec{S},$$

onde \vec{h} é um campo fictício e \vec{S} o isospin. Como existe essa dependência dos elementos de matriz com os pontos da primeira zona de Brillouin teremos o surgimento de um invariante topológico (que será discutido na próxima seção).

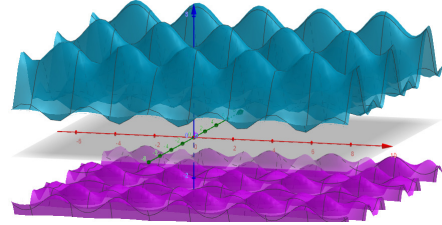


Figura 2: Espectro com gap do modelo assumindo $t = a$. Nessa imagem são apresentadas diversas zonas de Brillouin.

E, portanto, diagonalizando a matriz, obtém-se o espectro

$$E = \pm 2 \sqrt{\cos^2 \frac{k_x}{2} + \cos^2 k_y + 4t^2 \sin^2 k_y \sin^2 \frac{k_x}{2}}, \quad (6)$$

que mostra claramente um gap. Para $t = 1$ apresentamos esse espectro no gráfico 2.

A. Estudo da topologia do modelo

O modelo acima é o modelo mais simples para um isolante topológico e uma versão em "tight-binding" do problema Hall. Em um modelo de teoria de bandas é possível calcular o número de Chern. Esse número nos diz o tipo topológico das bandas. Caso ele seja igual a zero a topologia é dita trivial. Para número diferentes de zero ele

classifica que tipo de isolante topológico temos e quais os estados de borda que existiriam em uma amostra finita do material. No apêndice se encontra o cálculo desse invariante para o nosso modelo, cujo resultado é 1. O primeiro passo é calcular os autovetores dessa teoria de bandas.

Definindo

$$\begin{cases} h_x = 2 \cos \frac{k_x}{2} \\ h_y = 4t \sin k_y \sin \frac{k_x}{2} \\ h_z = 2 \cos k_y \\ \pm \lambda = \pm \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2} \end{cases} \quad (7)$$

teremos a seguinte equação de autovalores para resolver

$$\begin{bmatrix} h_z - \lambda & e^{i\frac{k_x}{2}}(h_x - ih_y) \\ e^{-i\frac{k_x}{2}}(h_x + ih_y) & -h_z - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix} = 0 \quad (8)$$

Como a representação dos vetores depende dos pontos na zona de Brillouin, não há como obter uma representação única para todos os autovetores. Essa é uma propriedade matemática bem conhecida de espaços vetoriais sobre a esfera. São necessários almenos dois mapas para escrevermos todos os autovalores. Autovalores do tipo 1 deve satisfazer

$$|\gamma_1| \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{i\frac{k_x}{2}}(h_x - ih_y) \\ h_z - \lambda \end{bmatrix}, \quad (9)$$

onde γ_1 é a normalização. O autoestado nessa representação possui uma singularidade na zona de Brillouin ($k_x \in [0, 2\pi]$ e $k_y \in [0, 2\pi]$) quando $h_x = 0$, $h_y = 0$ e $h_z - \lambda = 0$. O autovetor de tipo 2 são definidos por

$$|\gamma_2| \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_z + \lambda \\ e^{-i\frac{k_x}{2}}(h_x + ih_y) \end{bmatrix} \quad (10)$$

o que está bem definido no ponto da singularidade do autovetor tipo 1.

Para demonstrarmos que estamos trabalhando com um modelo topológico vamos calcular explicitamente um invariante topológico bem conhecido, o número de Chern. As representações dos autovetores explicitados acima diferem por uma fase,

$$e^{i\theta} = \frac{\gamma_1 - e^{i\frac{k_x}{2}}(h_x - ih_y)}{\gamma_2 (h_z + \lambda)} \quad (11)$$

e,

$$e^{i\theta} = \frac{\gamma_2 (h_z + \lambda)}{\gamma_1 (e^{-i\frac{k_x}{2}}(h_x + ih_y))} \quad (12)$$

Provando que essa última satisfaz a primeira:

$$-\frac{\gamma_1}{\gamma_2} e^{i\frac{k_x}{2}} \frac{(h_x - ih_y)}{(h_z - \lambda)} = e^{i\frac{k_x}{2}} \frac{(h_z - \lambda)}{(h_x + ih_y)}$$

Temos a expressão para a transformação de gauge:

$$e^{i\theta} = -e^{i\frac{k_x}{2}} \frac{\sqrt{(h_z + \lambda)^2 + h_x^2 + h_y^2} (h_x - ih_y)}{\sqrt{(h_z - \lambda)^2 + h_x^2 + h_y^2} (h_z - \lambda)} \quad (13)$$

Por definição, o Chern Number é calculado por:

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{BZ} dk \Omega_- \quad (14)$$

Sendo $\Omega_- = \nabla \times A_-$, a curvatura de Barry, e $A_- = -iu_n^\dagger \nabla_k u_n$ a fase de Barry.

Portanto:

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{BZ} dk (\nabla \times A_-) \quad (15)$$

É possível perceber, ao começar os cálculos, que as expressões se tornam muito extensas e facilmente confusas. De forma a simplificar os passos algébricos, podemos analisar a zona de Brillouin mais atentamente no entorno da singularidade. Para o tipo 1 de autovetores, temos a singularidade em $\mu > 0$, $k_x = \frac{\pi}{2}$, $k_y = \pi$.

Podemos considerar um círculo de raio r pequeno entorno do ponto $(k + x, k_y) = (\frac{\pi}{2}, \pi)$, de modo que a BZ seja definida em ambas as representações e nas bordas.

Se $u_1 = e^{i\theta} u_2$ e $A_-^{(1)} = -iu_1^\dagger \nabla_k u_1$, temos:

$$\begin{aligned} A_-^{(1)} &= -ie^{-i\theta} u_2 \nabla_k (e^{i\theta} u_1) \\ A_-^{(1)} &= A_-^{(2)} + \nabla_k \theta \end{aligned} \quad (16)$$

E, então, o CN pode ser calculado a partir de:

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{BZ(1)} dk (\nabla \times A_-^{(1)}) + \frac{1}{2\pi} \int_{BZ(2)} dk (\nabla \times A_-^{(2)}) \quad (17)$$

Escolhendo o círculo em (1) no sentido horário e em (2) no anti-horário, usamos o teorema de Stokes:

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{c(1)} dk A_-^{(1)} + \frac{1}{2\pi} \int_{c(2)} dk A_-^{(2)} \quad (18)$$

Sendo: $c(1) = -c(2)$

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2\pi} \int_{c(1)} dk (A_-^{(2)} - A_-^{(2)}) \\ &\rightarrow C = \frac{1}{2\pi} \int_{c(1)} dk \nabla_k \theta \end{aligned} \quad (19)$$

Tendo definido o método, aplicaremos os autovetores encontrados anteriormente. Fazendo a substituição

$$h_x^2 + h_y^2 = r^2$$

$$h_x - ih_y = -re^{-i\phi}$$

Para r pequeno teremos

$$e^{i\theta} = \frac{ie^{-i\phi}r}{2\mu} \sqrt{\frac{4\mu^2 + r^2}{r^2}} = ie^{-i\phi}$$

$$e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-i\phi} \quad (20)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$$

E, por sua vez, o CN é:

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{BZ_{c(1)}} dk \nabla_k \theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{(1)} dk \frac{\partial \phi}{\partial k} \quad (21)$$

$$= \frac{1}{2\pi} (-1) \int_0^{2\pi} (-1) d\phi = \frac{2\pi}{2\pi}$$

$$C = 1$$

O que corresponde à topologia esperada do modelo, um isolante topológico bidimensional com um estado de borda "chiral" (como o de uma barra Hall).

B. Estados de borda

Em sistemas com invariantes topológicos não triviais podem aparecer estados de superfície (ou de borda) com características especiais. Em sistemas Hall, em particular, aparecem estados quirais ("chiral gapless edge modes"), sendo independentes da desordem [3] o que faz com que tenham condutância ideal.

O modelo de rede que estamos trabalhando nos permite estudar explicitamente essas características. Inicialmente introduzimos o campo magnético com fluxo π em uma rede quadrada semi-infinita. Ao aplicamos uma transformação de Fourier na direção com invariância translacional (direção y), criamos modelos unidimensionais caracterizados pelos momentos na direção y , $H = \sum_q H_q$

(22)

Somando os conjugados hermitianos é possível reescrever a dependência de q em funções trigonométricas. Para a periodicidade de dois sítios em x e usando a substituição dos operadores: $c_{2x} = a_x$ e $c_{2x+1} = b_x$, teremos:

$$H_q = \sum_x (1 - 2t \sin q) b_x^\dagger a_x + (1 - 2t \sin q) a_x^\dagger b_x$$

$$+ (1 + 2t \sin q) a_{x+1}^\dagger b_x + (1 + 2t \sin q) b_x^\dagger a_{x+1}$$

$$+ 2(\cos q) a_x^\dagger a_x - 2(\cos q) b_x^\dagger b_x \quad (23)$$

Utilizando a seguinte forma de agrupamento matricial:

$$H_q = \begin{bmatrix} \vec{a}^\dagger & \vec{b}^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B^\dagger & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Sendo as componentes, as seguintes matrizes:

- $A = 2(\cos q)I = -C$
- $B = (1 - 2t \sin q)I + (1 + 2t \sin q)N_-$
- $B^\dagger = (1 - 2t \sin q)I + (1 + 2t \sin q)N_+$

Em seguida a diagonalização.

$$\begin{cases} (A - \lambda)\vec{\phi} + B\vec{\eta} = 0 \\ B^\dagger\vec{\phi} + (C - \lambda)\vec{\eta} = 0 \end{cases} \rightarrow \vec{\phi} = \frac{-B}{(A - \lambda)}\vec{\eta} \quad (25)$$

Usando uma exponencial periódica como solução genérica para η . Sendo a identidade: $\cos p = 1 - 2\sin^2 \frac{p}{2}$.

$$\lambda = \pm 2\sqrt{(\cos q + \mu)^2 + \cos^2 \frac{p}{2} + 4t^2 \sin^2 q \sin^2 \frac{p}{2}} \quad (26)$$

Que coincide com as energias já calculadas para o modelo 2D. Para obter os estados de borda temos de voltar a equação de autovalores 25 e assumir $(A - \lambda) = 0$. Para simplificar a álgebra podemos escolher que o potencial químico é zero. Sendo assim teremos $\lambda = 2 \cos q$. Quando $q = \frac{\pi}{2}$, $\lambda = 0$. Então, sendo:

$$B = \begin{bmatrix} 1 - 2t \sin q & 1 + 2t \sin q & 0 \\ 0 & 1 - 2t \sin q & 1 + 2t \sin q \\ 0 & 0 & 1 - 2t \sin q \end{bmatrix} \quad (27)$$

Teremos:

$$(1 - 2t \sin q)\eta_j + (1 + 2t \sin q)\eta_{j+1} = 0$$

$$\frac{\eta_{j+1}}{\eta_j} = -\left(\frac{1 - 2t \sin q}{1 + 2t \sin q}\right) \quad (28)$$

Se $q = \frac{\pi}{2}$, e t é pequeno:

$$\frac{\eta_{j+1}}{\eta_j} = -\left(\frac{1 - 2t}{1 + 2t}\right) \approx -\frac{e^{-2t}}{e^{2t}} = -e^{-4t} \quad (29)$$

Podemos escrever uma função genérica que representa os estados de borda: $\eta_x = \alpha(-1)^x e^{-4tx}$
A outra equação para o estado de borda, 25, é

$$B^\dagger \vec{\phi} (C - \lambda) \vec{\eta} = 0 \quad (30)$$

Para $q = \frac{\pi}{2}$:

$$\phi_{n-1} \phi_{n+1} = -2 \frac{1 + 4t^2}{1 - 4t^2} \phi_n = -2e^{8t^2} \phi_n \quad (31)$$

O que nos permite escrever a função genérica: $\phi_n = \alpha(-1)^n e^{\beta n}$. E, usando que $\frac{e^\beta + e^{-\beta}}{2} = e^{8t^2} = \cosh \beta$, os estados de borda podem ser encontrados. As constantes obedecem a normalização.

$$\phi_x = \sqrt{2\beta} (-1)^x e^{\beta(x-L)} \quad (32)$$

$$\eta_x = \sqrt{8t} (-1)^x e^{-4tx} \quad (33)$$

A partir desses resultados, vemos que faz sentido afirmar que os estados de borda são quirais, visto que a trajetória dos férmions está definida em apenas uma direção, definida pelos momentos q . Vemos também que o modelo é coerente com o esperado para bordas de um estado Hall com quiralidades opostas em cada borda como visto no esquema a seguir.

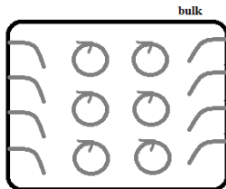


Figura 3: Esquema dos estados dos férmions no bulk.[Acervo Próprio]

III. O ESPECTRO DE EMARANHAMENTO DO MODELO

Quando um sistema é dividido em duas partes que compartilham uma fronteira, a entropia de emaranhamento independe de qual dos dois sistemas foi traçado[14]. Isso significa que as características mais importantes do emaranhamento devem estar relacionadas a uma física localizada próxima a fronteira entre as duas partes. Essa lógica é ainda mais clara se o sistema que estivermos estudando tiver um gap e estivermos considerando a matriz de densidade pura do estado fundamental. É um fato bem conhecido de mecânica estatística quântica que nesses casos as funções de correlação entre observáveis calculados usando esse estado decaem como uma lei exponencial na distância entre os observáveis[5]. Por isso, pelo menos nesses casos, é completamente razoável que a entropia de emaranhamento e o espectro de

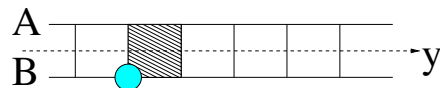


Figura 4: Para o cálculo do espectro de emaranhamento do nosso modelo nos usamos o fato que em um sistema com um gap no espectro as funções de correlação decaem exponencialmente com a distância. Por isso podemos considerar apenas sítios próximos da fronteira que estamos criando. No caso, consideramos apenas sítios de forma uma escada. Traçaremos os gaus de liberdade de uma das cadeias (A) e obteremos o espectro de emaranhamento da cadeia (B). Na figura o círculo azul representa um férmion, a área hachurada a plaqueta por onde um fluxo magnético de π está sendo aplicado e a linha tracejada a fronteira imaginária que estaremos considerando.

emaranhamento dependam exclusivamente dos graus de liberdade na fronteira entre as duas regiões.

No modelo que estamos estudando, o problema de uma rede quadrada com férmions na presença de um campo magnético, encontramos um modelo topológico com um gap. Se considerarmos o estado fundamental desse modelo e construirmos a matriz de densidade pura, poderíamos nos perguntar qual seria a matriz de densidade reduzida se traçarmos parte dos sítios do plano. Os coeficientes dessa matriz de densidade revelam como as duas partes do plano estão emaranhadas.

Como falamos acima, quando o sistema apresenta um gap todas as correlações entre observáveis medidas no estado fundamental decaem exponencialmente com a distância. Por isso não precisamos considerar todos os sítios de nossa rede quadrada, mas apenas uma faixa de duas cadeias e estudar o espectro de emaranhamento entre essas cadeias. Esse é um ponto crucial no cálculo que estamos fazendo. Calcular a matriz de densidade reduzida de um semi-plano de nosso sistema topológico é equivalente a calcular a matriz de densidade reduzida uma das cadeias desse problema equivalente.

Re-escrevendo nosso modelo usando duas cadeias de sítio com tunelamento entre elas, com fases dadas pelo campo magnético. A dedução a seguir é feita para um modelo semelhante na referência [1].

$$H = t' \sum_j (e^{i\frac{\pi}{2}} c_{A,j+1}^\dagger c_{A,j} + e^{-i\frac{\pi}{2}} c_{B,j+1}^\dagger c_{B,j} + h.c. + 2\mu e^{i\frac{\pi}{2}} [c_{A,j}^\dagger c_{A,j} + c_{B,j}^\dagger c_{B,j}]) + t \sum_j (c_{A,j}^\dagger c_{B,j} + c_{B,j}^\dagger c_{A,j}) \quad (34)$$

Onde t' é a amplitude de "hopping" nas cadeias fermiônicas (considerada como 1 no modelo), e t é a amplitude de direção de "hopping" perpendicular às cadeias, podendo ser descrita, também, como sendo na direção dos degraus de uma escada.

No espaço dos momentos, a hamiltoniana é:

$$H = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \mathcal{H}(k) \quad (35)$$

Que pode ser diagonalizada por uma mudança de base, de forma a encontrar os autovalores de energia.

$$\mathcal{H}(k) = \sum_k E_+ c_a^\dagger(k) c_a(k) + E_- c_b^\dagger(k) c_b(k) \quad (36)$$

Onde as energias dizem respeito ao "bonding" e "anti-bonding" do modelo. O espectro da hamiltoniana fica definido como:

$$E_{\pm} = \pm \sqrt{(2 \sin(k))^2 + t^2} \quad (37)$$

Esses passos são feitos com mais detalhes na referência [1]. Tendo diagonalizado completamente a Hamiltoniana de duas cadeias na presença de um campo magnético, podemos calcular a matriz densidade reduzida para a cadeia A, traçando fora a cadeia B. Os passos algébricos podem ser encontrados em [12].

A hamiltoniana de emaranhamento é definida como:

$$H_E = -\ln(\rho_A) = \sum_{i,j=1}^N H_{ij} c_i^\dagger c_j \quad (38)$$

E a função de correlação para todo o sistema é definida como:

$$C_{i,j} = \langle \psi_0 | c_i^\dagger c_j | \psi_0 \rangle \quad (39)$$

Se usarmos a matriz quadrática \mathcal{H} com uma mudança de base:

$$\mathcal{H} = \sum H_{i,j} c_i^\dagger c_j = \sum_k \xi_k a_k^\dagger a_k \quad (40)$$

Com ξ sendo o autovalor. Usando a matriz de correlação C obtida, Podemos encontrar a Hamiltoniana de Emaranhamento, que é diagonal de forma:

$$H_E = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \ln[w^2(k)] c^\dagger(k) c(k) \quad (41)$$

Em seguida, vamos analisar o espectro de energia $\epsilon = \ln[w^2(k)]$. Ao expandirmos para $k \rightarrow 0$, ou até $k \rightarrow \pi$, obtemos:

$$\epsilon = \frac{2k}{t} \quad (42)$$

Precisamos recordar que o espectro da hamiltoniana antes do corte é descrito pela equação 37. Que ao expandir nos retorna apenas $E = k$. Cabe lembrar que

a amplitude de "hopping" dentro da cadeia foi considerada como 1, caso contrário ela apareceria multiplicada nos espectros.

Ao comparar os dois espectros, antes e depois do corte do sistema, percebemos que existe um termo de diferença, $2/t$, que pode ser interpretado como a aparição de uma temperatura, consequência do emaranhamento das metades.

Definindo o inverso da temperatura a partir da amplitude de hopping entre as cadeias: $\beta_{eff} = \frac{2}{t}$. A matriz densidade reduzida pode ser reescrita em termos de uma temperatura efetiva, a partir da função de partição Z e da exponencial de Boltzmann:

$$\rho_A = \frac{e^{-\beta_{eff} H_A}}{Z} = \rho_{T_{eff}} \quad (43)$$

Ou seja, ao traçarmos uma das cadeias (que era equivalente ao traço de um semi-plano infinito em nossa rede quadrada original) encontramos uma matriz de densidade térmica com uma estrutura de energia idêntica a estrutura de férmions livres quirais. Isso corresponde exatamente as energias dos estados de borda que havíamos calculado anteriormente. Esse foi exatamente o resultado obtido numericamente por Li e Haldane para os estados do efeito Hall.

IV. DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Ao fazermos um traço parcial de um sistema é sempre possível definir o espectro de emaranhamento como o logaritmo dos coeficientes de Schmidt da expansão usada para se fazer o traço parcial. O que é inusitado em sistemas topológicos é que esse espectro reproduz os estados de borda da teoria construída em uma geometria finita. No problema que estudamos, nós exatamente evidenciamos esse fato.

Em resumo, o conceito de isolante topológico foi estudado a partir de um modelo que é a generalização do modelo de Hofstadter e que representa elétrons em um campo magnético tão alto que os efeitos de rede se tornam relevantes. Esse modelo é uma versão tight-binding para a física do problema Hall quântico inteiro. Estudamos o espectro, os autovalores, e a propriedade topológica do modelo calculando o número de Chern. Em seguida estudamos de maneira explícita o que são os estados de borda quirais em um sistema com uma borda (no caso um plano semi-infinito). Em seguida estudamos o espectro de emaranhamento que aparece ao se calcular a matriz de densidade reduzida para um semi-plano da rede quadrada. Ao fazer isso, foi encontrada uma matriz de densidade reduzida térmica, com teoria de baixas energias idêntica a dos estados de borda calculados anteriormente. Esse é um resultado que foi proposto inicialmente por Li e Haldane[9] com base em evidências numéricas para os estados Hall (mas aqui todos os pas-

so foram obtidos analiticamente porque discutimos um modelo de férmions livres).

Esse caminho de investigação é muito promissor para problemas de isolantes topológicos, já que pode significar uma rota alternativa para a redução dimensional no estudo de impurezas nesses sistemas.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao CNPq pelo incentivo ao projeto pesquisa e ao meu orientador, Eduardo Novais, pela orientação.

Apêndice A: Definições de alguns termos usados no trabalho

1. O efeito Hall

Um dos problemas mais interessantes em matéria condensada é o efeito Hall quântico. Nele, elétrons se movimentam em um campo magnético em uma superfície de uma barra metálica formando um estado eletrônico que tem características topológicas. Para campos magnéticos convencionais, os raios das órbitas de Landau são muito maiores que o parâmetro de rede, o que permite desconsiderar os efeitos da rede cristalina na dinâmica do elétron.

Em 1980, K. Von Klitzing, G. Dorda e M. Pepper estudaram a condutância de Hall em camadas bidimensionais de MOSFETS ("Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor"). Nesse sistema, é formado um poço bidimensional onde elétrons podem se movimentar livremente. Esses pesquisadores notaram que quando se mediu a condutância $\sigma_{x,y}$ em baixas temperaturas, ela tinha uma dependência gradual com o campo magnético. No entanto essa dependência se dá em platôs, ou seja, para determinados intervalos de valores de campo, existem patamares com a condutância constante múltiplos inteiros de $\frac{e^2}{h}$. Isso ocorre devido ao preenchimento das bandas de Landau. Entre uma banda e outra há um gap o que faz que para esses parâmetros a condutância da barra seja constante. O fato interessante é que mesmo que não haja condução de elétrons pela barra, pode ocorrer condução na borda. Essa propagação é em apenas uma direção (determinada pela direção do campo magnético). Como esses elétrons se propagam em apenas uma direção, a influência de impurezas aparece apenas como uma fase na função de onda. Impurezas deveriam causar um aumento na resistividade, contudo como não há a possibilidade de espalhamento dos elétrons para trás a condutância dos estados de borda é perfeita mesmo com as impurezas presentes.

a. Efeito Hall Quântico

Para entender o Efeito Hall Quântico, é necessário saber que o mesmo é uma consequência da exposição de um sistema à um campo magnético. Por esse motivo, faz-se útil discutir à priori o problema de um elétron mergulhado em um campo. O problema contínuo nos retorna um resultado conhecido, com os níveis de energia de Landau e a quantização do fluxo magnético. A seguir será feita uma revisão da solução para esse sistema, que se encontra com mais detalhes no livro do Fradkin [3]. Sabemos que a Hamiltoniana para o caso de uma partícula, sem spin com carga e e massa m , num campo magnético é descrita por:

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{e}{c} A_1 \right)^2 \right] + \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{e}{c} A_2 \right)^2 \quad (A1)$$

Sendo o campo magnético o rotacional do potencial A :

$$B = \epsilon_{ij} \partial_i A_j \quad (A2)$$

As energias no n -ésimo nível de Landau são descritas pela energia do oscilador harmônico com a frequência sendo a da órbita ciclotrônica, $\omega_c = \frac{eB\hbar}{mc}$.

$$E_n = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (A3)$$

Os níveis de Landau possuem a mesma diferença entre um e outro, e degenerescência de N_ϕ para cada nível. A partir desses resultados, toda a física do Efeito Hall pode ser entendida. Para entender os efeitos da rede cristalina vamos construir uma hamiltoniana microscópica, de forma a estudar o limite de Hofstadter.[3]

b. As funções de onda de Hofstadter

O limite contínuo estudado anteriormente é justificado quando o raios das órbitas ciclotrônicas é muito maior que espaçamento atômico que existe nos materiais. Normalmente essa é uma excelente aproximação, contudo efeitos de rede podem aparecer para campos altos ou em sistemas como ions em redes ópticas. Hofstadter considerou uma rede quadrada no modelo hopping com amplitude de salto t e campo uniforme B , o que pode ser visto com detalhes em [6]. A hamiltoniana de tight-binding, que nesse contexto pode ser chamada de Equação de Harper, com fluxo $= \pi$, o mais simples de todos, se encontra na equação A4. Sendo o sítio $|\vec{x}\rangle$.

$$H = -t \sum_{\vec{x}, j=1,2} |\vec{x}\rangle e^{i\frac{e}{\hbar c} A_j(\vec{x})} \langle \vec{x} + e_j | + h.c. \quad (A4)$$

Onde o potencial vetor é $A_j(\vec{x})$, o campo externo é B , sendo ϕ o fluxo total. Podemos estabelecer uma transformação de gauge (de Landau), e assumindo um toroide, com $Ba^2 = \frac{p}{q}\phi_0$, sendo o fluxo que passa por um segmento elementar. Os autoestados são expandidos em (Wannier States):

$$|\Psi\rangle = \sum_{\vec{x}} \Psi(\vec{x}) |\vec{x}\rangle \quad (\text{A5})$$

Que obedecem à Equação de Schrodinger independente do tempo, que quando resolvida leva à borboleta de Hofstadter:

$$\begin{aligned} & -t \left[e^{-i2\pi\frac{p}{q}x_2} \Psi(x_1+1, x_2) + e^{i2\pi\frac{p}{q}x_2} \Psi(x_1-1, x_2) \right] \\ & -t \left[\Psi(x_1, x_2+1) + \Psi(x_1, x_2-1) \right] = E\psi(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

Essa hamiltoniana não é invariante perante translações de espaçamento unitário da rede. Porém é invariante perante:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) & \rightarrow (x_1+q, x_2) \\ (x_1, x_2) & \rightarrow (x_1, x_2+1) \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

A célula unitária possui q plaquetas, portanto o fluxo em cada célula é $\phi_{cell} = q\phi_{plaquette}$ e então $\phi_{cell} = p$. O operador de translação de gauge em unidades naturais é:

$$e^{i\hat{P}_J} = \sum_{\vec{x}} |\vec{x}\rangle e^{iA_J(\vec{x})} \langle \vec{x} + \hat{e}_j | \quad (\text{A8})$$

Esses operadores geralmente não comutam entre si, mas comutarão se um fator inteiro for multiplicado no expoente de cada um de forma que esses inteiros formem uma área de fluxo múltipla do quanta de fluxo. O menor retângulo formado por lados com esses valores inteiros é chamado de célula unitária magnética. Eles satisfazem:

$$e^{i\hat{P}_1} e^{i\hat{P}_2} = e^{i2\pi\frac{p}{q}} e^{i\hat{P}_2} e^{i\hat{P}_1} \quad (\text{A9})$$

A hamiltoniana, enfim, pode ser escrita em função desses operadores.

$$H = -t \sum_{j=1,2} (e^{i\hat{P}_j} + e^{-i\hat{P}_j}) \quad (\text{A10})$$

Podemos escrever operadores de translação magnética em função de passos ao longo dos eixos x e y . Esses operadores comutam com a hamiltoniana, portanto possuem autoestados em comum. Definindo as condições de borda dos novos autoestados na zona de Brillouin, o fluxo total

ϕ deve ser um inteiro. Expandindo o estado em função dos operadores magnéticos teremos: $\Psi_r(k_1, k_2)$ com r indo de 0 a q . Agora, explicitaremos a hamiltoniana discretizada, que é chamada de equação de Harper. Os passos e detalhes dessa seção se encontram na referência [3]

$$\begin{aligned} & -t \left[e^{ik_1} \Psi_{r+1}(k_1, k_2) + e^{-ik_1} \Psi_{r-1}(k_1, k_2) \right] \\ & -2t \cos\left(k_2 + 2\pi\frac{p}{q}r\right) \Psi_r(k_1, k_2) = E\Psi_r(k_1, k_2) \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

As amplitudes soluções dessa equação são funções periódicas na zona magnética de Brillouin. Para valores genéricos de p e q o espectro tem q bandas. Quando esses valores são inteiros não divisíveis, a hamiltoniana aliada à equação de Schrodinger possui determinadas simetrias. Esse problema pode ser estudado mais afundo na referência [3].

2. Matriz Densidade

O estado quântico de um sistema físico pode ser puro ou misto. Um estado puro é aquele que não pode ser escrito como uma combinação de outros estados. O formalismo de vetores de estado descreve apenas estados puros, enquanto a matriz densidade pode ser vista como a generalização desse formalismo, já que descreve, também, os estados mistos. Os estados mistos surgem na mecânica quântica quando, por exemplo, em uma preparação experimental, os estados são preparados com uma probabilidade estatística associada. Esse ensemble estatístico que surge faz com que o estado misto possa ser escrito como uma combinação de estados. Outra aplicação da matriz densidade pode ser a descrição de estados emaranhados.

Seja um estado puro u_α com probabilidade p_α [11]. Definimos o operador de projeção como:

$$\rho_\alpha = u_\alpha u_\alpha^\dagger \quad (\text{A12})$$

O valor esperado de um observador A , para o estado puro, será:

$$\langle A \rangle_\alpha = u_\alpha^\dagger A u_\alpha = \text{Tr}\{\rho_\alpha A\} \quad (\text{A13})$$

Portanto, podemos escrever:

$$\langle A \rangle = \sum_{\alpha} p_\alpha \langle A \rangle_\alpha = \text{Tr}\left\{ \left(\sum_{\alpha} p_\alpha \rho_\alpha \right) A \right\} \quad (\text{A14})$$

$$\langle A \rangle = \text{Tr}\{\rho A\} \quad (\text{A15})$$

Sendo a matriz densidade:

$$\rho = \sum_{\alpha} p_{\alpha} \rho_{\alpha} \quad (\text{A16})$$

Essa definição satisfaz a propriedade de que o traço da matriz densidade é sempre 1.

3. Emaranhamento Quântico

Emaranhamento quântico é um fenômeno que ocorre quando um grupo de partículas interage em um determinado momento e posteriormente a função de onda do sistema não pode ser descrita como um estado produto das funções de onda das partículas individuais.

De maneira forma, primeiro precisamos definir os estados separados. Um estado é dito separado se podemos escrever sua função de onda como o produto tensorial direto das partículas. O oposto disso se define como estados emaranhados, onde a função de onda é uma soma de termos, onde cada termo é o produto tensorial de estados das partículas.

Se começarmos com uma função de onda separada, não é possível construir uma função de onda emaranhada apenas usando operações "locais" (nos espaços de Hilbert de cada partícula). Na linguagem de Informação Quântica é necessário a ação de portas lógicas de dois ou mais qubits, ou mais comumente na linguagem de física, durante algum momento as partículas devem interagir.

Quando trabalhamos com a matriz densidade, podemos extrair os estados dos subsistemas emaranhados. O método utilizado para isto é o traço parcial da matriz densidade, que nos retorna a matriz densidade reduzida. Consideremos um sistema composto de dois subsistemas separados A e B , que tem uma matriz densidade ρ_{AB} . Para descrever o subsistema A , por exemplo, temos:

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}) \quad (\text{A17})$$

Quando os graus de liberdade disponíveis são apenas de um dos subsistemas, traçar a matriz densidade permite que se trate apenas desse subsistema.

4. O Espectro de Emaranhamento

O conceito de entropia termodinâmica é descrito como a medida da desordem e da aleatoriedade em um sistema termodinamicamente macroscópico. Para um sistema quântico em equilíbrio térmico, essa quantidade é definida por:[1]

$$S_T = -\text{Tr}\{\rho_T \ln \rho_T\} \quad (\text{A18})$$

Sendo essa entropia chamada de entropia de Von Newman, onde a matriz de densidade térmica é definida por:

$$\rho_T = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}, \quad (\text{A19})$$

Com função de partição $Z = \text{Tr}\{e^{-\beta H}\}$. Por outro lado, tem-se a entropia de emaranhamento, que é definida como a medida de correlações não-locais de um estado quântico puro. Se pensarmos em um sistema dividido em outros dois subsistemas A e B , com uma fronteira em comum $\Gamma = \partial A = \partial B$, a matriz densidade do estado puro é:

$$\rho_{A \cup B} = |\psi\rangle \langle \psi| \quad (\text{A20})$$

E as matrizes reduzidas normalizadas dos subsistemas são:

$$\rho_A = \text{Tr}_B \rho_{A \cup B} \quad e \quad \rho_B = \text{Tr}_A \rho_{A \cup B} \quad (\text{A21})$$

A entropia de emaranhamento pode ser definida, então, por:

$$S_{vN}(A) = -\text{Tr}_A \rho_A \ln(\rho_A) \quad (\text{A22})$$

E como o sistema $A \cup B$ é um estado puro, as entropias de emaranhamento de cada subsistema são iguais, $S_{vN}(A) = S_{vN}(B)$.

Partindo de um sistema quântico, em um estado puro, a entropia de emaranhamento é equivalente a entropia de Von-Newman da matriz de densidade reduzida de um subsistema. Essa matriz densidade tem sempre a forma $\hat{\rho} = \exp(-\hat{H})$ [9], onde H é o logaritmo dos coeficientes da decomposição de Schmidt.

Não há nenhuma razão a priori para que a "Hamiltoniana" H tenha alguma relação com a Hamiltoniana que definiu o estado puro ρ_{AB} . Aos autovalores de H se dá o nome de espectro de emaranhamento. É possível utilizar o emaranhamento quântico como forma de identificação de topologias, utilizando a entropia de emaranhamento, ou de forma mais completa, pelo espectro de emaranhamento (o espectro de H). Uma característica importante que foi observada em sistemas topológicos é que essa Hamiltoniana de emaranhamento corresponde a teoria efetiva dos estados de borda.

5. Efeito Unruh

O efeito Unruh expressa o fato de que observadores acelerados uniformemente no espaço-tempo de Minkowski, também chamados de observadores de Rindler, associam um banho térmico de partículas de Rindler aos estados de não-partículas de observadores inerciais, também chamados de de vácuo de Minkowski[2].

Esse efeito é um resultado da Teoria Quântica de Campos, e tem um papel importante tanto na teoria de campos, quanto como ferramenta de investigação de outros

fenômenos, como o Efeito Hawking (1974) [10], que é a emissão térmica de partículas por buracos negros, além dos estudos da física do horizonte de eventos cosmológico.

No centro do efeito Unruh reside o fato que os dois observadores, inercial e não-inercial, vêem o espaço de maneira diferente. Um observador não-inercial entende o espaço-tempo plano como tendo um horizonte de eventos e isso o impede de usar todos os modos de campo necessários para descrever a função de onda que o observador inercial vê. Assim, o efeito Unruh (e a radiação Hawking) essencialmente correspondem ao estudo do espectro de emaranhamento de dois subsistemas.

Assim, no efeito Unruh, se um observador acelerado vê um estado térmico, podemos entender esse observador como uma metade de um sistema puro que foi traçado. O espectro e temperatura definidos pelo observador acelerado podem então ser entendidos como o espectro de emaranhamento que vêm da separação do sistema total em dois. No modelo considerado em nosso trabalho temos exatamente a situação de um estado puro, o estado fundamental do isolante topológico, que traçamos metade da rede do sistema.

Apêndice B: Resolvendo uma cadeia unidimensional em segunda quantização

Com o intuito de se familiarizar com a metodologia de segunda quantização iniciamos o estudo pelo problema unidimensional

$$H = -t \sum_{n=0}^{N-1} c_{n+1}^\dagger c_n + h.c. \quad (\text{B1})$$

Com condições periódicas, $c_{n+N} = c_n$, e usando:

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2\pi(1-\frac{1}{N})} e^{-ikn} c_k \quad (\text{B2})$$

Com $k = \frac{2\pi}{N}I$ para um I inteiro.

Antes de prosseguir com o problema, se faz útil relembrar a definição do Delta de Kronecker.

$$\delta_{n,m} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{2\pi i \frac{k}{N}(n-m)} \quad (\text{B3})$$

Voltando para a equação que define o operador c_n . Percebe-se que ele é uma transformada de Fourier, e está construída de forma que apareça um Delta de Kronecker. Sendo assim, podemos aplicar a transformada na Hamiltoniana.

$$H = -t \sum_k (e^{ik(n+1)} e^{-ikn} c_k^\dagger c_k + h.c.) = -2t \cos(k) \quad (\text{B4})$$

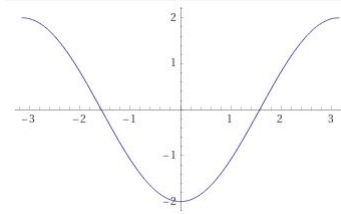


Figura 5: Gráfico da banda para um $t=1$. ($E \times k$) [By Wolfram Alpha]

Cuja energia pode ser observado na figura 5:

O gráfico mostra explicitamente a ausência de um gap de energia, portanto, para um preenchimento half-filling, essa banda é de um metal. Agora seguiremos para a análise de um sistema cujo período é de dois sítios, sendo $t_1 \neq t_2$. Nesse caso a Hamiltoniana da cadeia pode ser escrita como:

$$H = - \sum_{n=1}^N t_1 (c_{2n+1}^\dagger c_{2n} + h.c.) + t_2 (c_{2n+2}^\dagger c_{2n+1} + h.c.) \quad (\text{B5})$$

Como a periodicidade agora, respeita: $2n + 2N = 2n$, faremos uma substituição ($c_{2n} = a_n$ e $c_{2n+1} = b_n$) antes de aplicar a transformada de Fourier para a_n e b_n :

$$H = -t_1 (b_k^\dagger a_k + b_k a_k^\dagger) - t_1 (e^{ik} a_k^\dagger b_k + e^{-ik} a_k b_k^\dagger) \quad (\text{B6})$$

E por fim, encontrando os valores de energias pelo método da diagonalização, teremos:

$$E = \pm \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2 \cos k} \quad (\text{B7})$$

Que possui um gráfico conforme a figura 6:

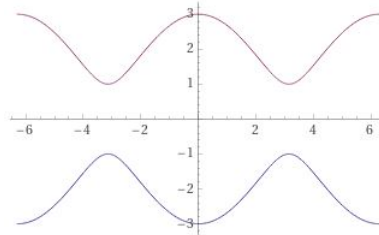


Figura 6: Gráfico de bandas $E \times k$, para $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$. [By Wolfram Alpha]

Observa-se, portanto, que existe um gap para esse caso. E diferentemente do anterior, para um preenchimento half-filling, a banda é de um material isolante.

Apêndice C: Cálculo da H_E pelas funções de correlação

De acordo com o teorema de Wick, teorias não integrais podem ser geradas por exponenciais. Quando

traçamos o sistema:

$$\rho = \text{Tr}_{\bar{i}, \bar{j}}(|\psi_0\rangle \langle \psi_0|)[(i, j) + (\bar{i}, \bar{j})] \quad (\text{C1})$$

A função de correlação para todo o sistema é definida como:

$$C_{i,j} = \langle \psi_0 | c_i^\dagger c_j | \psi_0 \rangle \quad (\text{C2})$$

Ao separar o sistema, definimos os operadores de cada metade:

$$C_{i,j} = \sum_1 \langle \mu_1 | \rho | \lambda_1 \rangle \langle \lambda_1 | c_i^\dagger c_j | \mu_1 \rangle \sum_1 \langle \mu_1 | \rho c_i^\dagger c_j | \mu_1 \rangle \quad (\text{C3})$$

Onde temos $\rho = \mathcal{K}e^{-\mathcal{H}}$
E a matriz quadrática:

$$\mathcal{H} = \sum H_{i,j} c_i^\dagger c_j \quad (\text{C4})$$

Que portanto, possui uma mudança de base:

$$c_i = \sum_k \phi_k(i) a_k \quad (\text{C5})$$

Tal que:

$$\mathcal{H} = \sum_k \xi_k a_k^\dagger a_k \quad (\text{C6})$$

Com ξ sendo o autovalor. Podemos então escrever a função de correlação como:

$$C_{i,j} = \text{Tr}(\rho c_i^\dagger c_j) = \text{Tr}(\mathcal{K}e^{\mathcal{H}} c_i^\dagger c_j) \quad (\text{C7})$$

$$C_{i,j} = \sum_q \mathcal{K} e^{-\xi_q a_q^\dagger a_q} \phi_q^*(i) \phi_q(j) a_q^\dagger a_q$$

Sendo que na função de onda é normalizada, podemos usar a propriedade $\text{Tr} \rho = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Tr} \rho &= \text{Tr}(\mathcal{K} e^{\sum_q \xi_q a_q^\dagger a_q}) = 1 \\ &= \mathcal{K} \prod_q (e^{\xi_q} + 1) = 1 \end{aligned} \quad (\text{C8})$$

Encontramos que a constante é:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{1}{\prod_q e^{-\xi_q} (e^{\xi_q} + 1)} \\ \mathcal{K} &= \prod_q \frac{e^{\xi_q}}{e^{\xi_q} + 1} \end{aligned} \quad (\text{C9})$$

Substituindo na função de correlação:

$$C_{i,j} = \sum_q \phi_q^*(i) \phi_q(j) \frac{1}{e^{\xi_q} + 1} \quad (\text{C10})$$

Sendo a hamiltoniana diagonalizada representada por:

$$H_{i,j} = \sum_q \phi_q^*(i) \phi_q(j) \xi_q \quad (\text{C11})$$

Podemos definir a função $\zeta_q = \frac{1}{e^{\xi_q} + 1}$, de forma que os autovalores são definidos por:

$$\xi_q = \ln \left[\frac{1 - \zeta_q}{\zeta_q} \right] \quad (\text{C12})$$

Desta forma, usando a matriz de correlação C , a hamiltoniana transposta (H') pode ser encontrada a partir de:

$$H' = \ln \left[\frac{1 - C}{C} \right] \quad (\text{C13})$$

Ao escrever a função de correlação para o subsistema A na base que diagonaliza a hamiltoniana do modelo, obtemos:

$$C_{kk'} = \langle c_A^\dagger(k) c_A(k') \rangle \quad (\text{C14})$$

E relembando a mudança de base:

$$c_A = \cos\left(\frac{\nu(k)}{2}\right) c_a(k) - \sin\left(\frac{\nu(k)}{2}\right) c_b(k) \quad (\text{C15})$$

Com $\sin\left(\frac{\nu(k)}{2}\right) = \frac{w(k)}{\sqrt{1+w^2(k)}}$. no half-filling, os estados das bandas ligantes (c_b) são preenchidos, enquanto as bandas antiligantes (c_a) estão vazias. Para as funções de correlação temos então:

$$\begin{aligned} C_{kk'} &= \left\langle \left(-\sin\left(\frac{\nu(k)}{2}\right) c_b \right) \left(-\sin\left(\frac{\nu(k')}{2}\right) c_b^\dagger \right) \right\rangle \\ C_{kk'} &= 2\pi \delta(k - k') \sin^2\left(\frac{\nu(k)}{2}\right) \quad (\text{C16}) \\ C_{kk'} &= 2\pi \delta(k - k') \frac{w^2(k)}{1 + w^2(k)} \end{aligned}$$

Substituindo na relação C13, a Hamiltoniana de Embaranhamento é diagonal, de forma:

$$H_E = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \ln[w^2(k)] c^\dagger(k) c(k) \quad (\text{C17})$$

-
- [1] Xiao Chen and Eduardo Fradkin. Quantum entanglement and thermal reduced density matrices in fermion and spin systems on ladders. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2013(08):P08013, aug 2013.
- [2] Luis C. B. Crispino, Atsushi Higuchi, and George E. A. Matsas. The unruh effect and its applications. *Reviews of Modern Physics*, 80(3):787–838, jul 2008.
- [3] Eduardo Fradkin. *Field Theories of Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, 2 edition, 2013.
- [4] Michael H. Freedman, Alexei Kitaev, Michael J. Larsen, and Zhenghan Wang. Topological quantum computation, 2002.
- [5] M. B. Hastings. Locality in quantum systems, 2010.
- [6] Indubala I Satija; Douglas R Hofstadter. *Butterfly in the quantum world : the story of the most fascinating quantum fractal*. Morgan & Claypool Publishers, 2016.
- [7] C. L. Kane and E. J. Mele. Quantum spin hall effect in graphene. *Phys. Rev. Lett.*, 95:226801, Nov 2005.
- [8] Alexei Kitaev and John Preskill. Topological entanglement entropy. *Phys. Rev. Lett.*, 96:110404, Mar 2006.
- [9] Hui Li and F. D. M. Haldane. Entanglement spectrum as a generalization of entanglement entropy: Identification of topological order in non-abelian fractional quantum hall effect states. *Phys. Rev. Lett.*, 101:010504, Jul 2008.
- [10] George E. A. Matsas Luis C. B. Crispino, Atsushi Higuchi. The unruh effect and its applications. *J.Phys.A: Math.Gen.*, 36:L205, 2008.
- [11] Asher Peres. *Quantum Theory: Concepts and Methods*. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [12] Ingo Peschel. Calculation of reduced density matrices from correlation functions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36(14):L205, mar 2003.
- [13] Xiao-Liang Qi, Hoshio Katsura, and Andreas W. W. Ludwig. General relationship between the entanglement spectrum and the edge state spectrum of topological quantum states. *Phys. Rev. Lett.*, 108:196402, May 2012.
- [14] Mark Srednicki. Entropy and area. *Phys. Rev. Lett.*, 71:666–669, Aug 1993.
- [15] Brian Swingle and T. Senthil. Geometric proof of the equality between entanglement and edge spectra. *Phys. Rev. B*, 86:045117, Jul 2012.