

Difusão ambipolar em coordenadas retangulares e cilíndricas incluindo campo magnético

Leonardo Costa Loreti Lopes e Francisco Eugenio Mendonça da Silveira
Centro de Ciências Naturais e Humanas, Universidade Federal do ABC,
Av. dos Estados - 5001, Bairro Bangu - CEP 09210-580, Santo André - SP

Para manter um plasma em regime estacionário, é necessário empregar uma fonte de partículas neutras para que sua taxa de ionização compense a de recombinação de íons e elétrons. Na ausência dessa fonte, o plasma se degenera, formando um gás quente não ionizado. Um dos estágios finais desse processo é a assim chamada *difusão ambipolar*. Na difusão ambipolar, os fluxos de íons e elétrons são aproximadamente iguais graças a um campo elétrico que se estabelece no plasma. Neste Trabalho de Conclusão de Curso, discutimos a difusão ambipolar de um plasma em coordenadas retangulares e cilíndricas. Em seguida, consideramos esse fenômeno na presença de um campo magnético.

I. INTRODUÇÃO

A. Definição de plasma

Um plasma é um *gás ionizado quase neutro* que apresenta *comportamento coletivo* (Ref. [2]). Devido à presença de íons e elétrons, um campo eletromagnético pode se estabelecer no plasma, gerando interações entre estes corpúsculos. Estas interações caracterizam o comportamento coletivo à medida que modificam substancialmente a dinâmica do plasma, haja visto que qualquer gás possui uma parcela de partículas ionizadas, mas a interação eletromagnética entre estas não necessariamente modifica o comportamento do gás. Caso haja a formação de uma densidade de carga devido ao acúmulo de íons ou elétrons em dada região, partículas de carga oposta serão atraídas de modo a neutralizar a densidade de carga, caracterizando assim a *quasineutralidade*, i.e., o plasma tende a sempre ser neutro.

B. Parâmetros para análise

Um dos principais conceitos usados para descrever a dinâmica de gases é a caracterização de seu movimento através do *fluxo* de suas partículas em um dado meio. Definimos *fluxo* como o produto da *concentração* (o número de partículas por unidade de volume) pela velocidade das partículas. O problema torna-se bastante interessante quando o gás é ionizado, um *plasma*. Um plasma é um gás composto por íons, elétrons e átomos neutros. Quando a concentração de partículas carregadas é muito menor que a das neutras, o plasma é dito *fracamente ionizado*.

De acordo com a Fig. 1, partículas carregadas, representadas por bolinhas totalmente pretas, incidem perpendicularmente a uma placa estacionária, contendo átomos neutros, representados por bolinhas brancas com contornos pretos. Como sabemos, as partículas carregadas po-

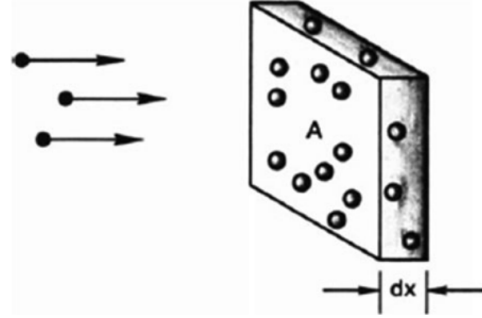


Figura 1. Fluxo de partículas carregadas incidindo em uma placa de seção reta A e espessura dx , parcialmente preenchida com átomos neutros, Chen (Ref. [2]).

dem perder até o dobro de seu momento inicial, quando sua velocidade troca de sinal após a colisão. Assim, concluímos que o fluxo resultante da passagem das partículas carregadas através da placa é proporcional à área não recoberta pelos átomos neutros. Esse resultado nos conduz à noção de *seção de choque*.

Se n_n é a concentração de átomos neutros na placa de área A e espessura dx da Fig. 1, então $n_n A dx$ é o número total de átomos neutros contidos na placa. Nesse caso, o número *efetivo* de átomos neutros que podem bloquear a passagem de partículas carregadas é dado por

$$n_n A dx \frac{\sigma}{A} = n_n \sigma dx, \quad (1)$$

onde σ é a seção de choque de partículas carregadas com átomos neutros.

De acordo com a Eq. (1), o fluxo Γ' de partículas carregadas que atravessam a placa deve ser proporcional ao fluxo Γ de partículas carregadas que interagem com átomos neutros,

$$\Gamma' = \Gamma (1 - n_n \sigma dx). \quad (2)$$

Como $\Gamma' = \Gamma + d\Gamma$, a Eq. (2) fornece

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dx} = -\Gamma n_n \sigma &\implies \Gamma = \Gamma_0 \exp(-n_n \sigma x) \\ &= \Gamma_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda_m}\right), \end{aligned} \quad (3)$$

onde Γ_0 é uma constante de integração e $\lambda_m = (n_n \sigma)^{-1}$ é chamado de *livre caminho médio*. De acordo com a Eq. (3), para $x \sim \lambda_m$, o fluxo $\Gamma \sim \Gamma_0/e \approx 0.63 \Gamma_0$, onde “e” é o número de Euler.

A noção de livre caminho médio sugere a de *tempo médio de colisão*,

$$\tau = \frac{\lambda_m}{v_d}, \quad (4)$$

entre duas colisões sucessivas, onde v_d é chamada de *velocidade de deriva* das partículas carregadas. Alternativamente à noção de tempo médio de colisão, poderíamos ter recorrido à de *frequência média de colisão*,

$$\nu = \frac{v_d}{\lambda_m}. \quad (5)$$

De acordo com as Eqs. (4) e (5), concluímos que

$$\nu = \tau^{-1} = n_n \sigma v_d, \quad (6)$$

onde escrevemos λ_m em termos de n_n e σ .

II. DIFUSÃO AMBIPOLAR

Para descrever a dinâmica do gás de partículas carregadas, recorremos à equação de Euler

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \\ &= \pm \frac{e}{m} \mathbf{E} - \frac{\nabla P}{nm} - \nu \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (7)$$

onde m e $\pm e$ são a massa e a carga para íons e elétrons, respectivamente, n e \mathbf{v} são a concentração e a velocidade, respectivamente, \mathbf{E} e P são o campo elétrico e a pressão, respectivamente, e ν é a frequência de colisão de partículas carregadas com neutras.

Por possuírem maior velocidade térmica que íons, elétrons tendem a ocupar mais rapidamente o volume acessível ao gás. Entretanto, o campo elétrico gerado pelos íons quase estacionários tende a retardar o movimento dos elétrons. Como resultado, fluxos de elétrons e íons tornam-se aproximadamente iguais.

Na ausência de campo magnético, a pressão P é isotrópica. A presença de um campo magnético induziria uma trajetória helicoidal das partículas

carregadas em torno das linhas de campo, estabelecendo, assim, uma direção preferencial para o movimento.

A derivada total $d\mathbf{v}/dt$ é conhecida como *derivada material*. Ela é a soma da derivada parcial $\partial \mathbf{v}/\partial t$, calculada em um *elemento de volume* fixo, com a derivada parcial $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$, calculada ao longo de uma *linha de corrente*. Um elemento de volume é uma porção do fluido suficientemente pequena para que as quantidades físicas possam ser consideradas constantes em seu interior, entretanto, suficientemente grande para conter um número enorme de partículas que colidem umas com as outras. Uma linha de corrente é uma linha do campo de escoamento \mathbf{v} .

O estado de equilíbrio estacionário do sistema é definido tomando $d\mathbf{v}/dt = 0$. No equilíbrio estacionário, podemos introduzir a *equação de estado* isotérmica $P = nkT$, onde k e T são a constante de Boltzmann e a temperatura do gás, respectivamente. De acordo com a Eq. (7), a velocidade das partículas carregadas nesse estado de equilíbrio é

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \pm \frac{e}{m\nu} \mathbf{E} - \frac{kT}{m\nu} \frac{\nabla n}{n} \\ &= \pm \mu \mathbf{E} - D \frac{\nabla n}{n}, \end{aligned} \quad (8)$$

onde as quantidades μ e D são chamadas de *mobilidade da partícula* e *coeficiente de difusão*, respectivamente. A partir da Eq. (8), vemos, imediatamente, que μ e D satisfazem a, assim chamada, *relação de Einstein*, a saber $\mu = [e/(kT)] D$.

Multiplicando ambos os membros da Eq. (8) pela concentração n , obtemos o (vetor) fluxo de partículas

$$\mathbf{\Gamma} = \pm n \mu \mathbf{E} - D \nabla n. \quad (9)$$

Uma vez que supomos o plasma como um gás eletricamente neutro (mais precisamente, *localmente* neutro, quer dizer, $n_e \approx n_i$, onde “e” é para elétrons e “i” é para íons), a combinação da Eq. (8) com a Eq. (9) fornece o campo elétrico no equilíbrio estacionário,

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}_e \approx \mathbf{\Gamma}_i &\implies -\mu_e n \mathbf{E} - D_e \nabla n = \mu_i n \mathbf{E} - D_i \nabla n \\ &\implies \mathbf{E} = \left(\frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \right) \frac{\nabla n}{n}. \end{aligned} \quad (10)$$

Substituindo a Eq. (10) na Eq. (9), obtemos (tanto para elétrons, quanto para íons) o fluxo

$$\mathbf{\Gamma} = - \left(\frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_i + \mu_e} \right) \nabla n = -D_a \nabla n, \quad (11)$$

onde D_a é chamado de *coeficiente de difusão ambipolar*.

A magnitude do coeficiente de difusão ambipolar D_a pode ser estimada do seguinte modo. A massa do elétron é muito menor que a massa do íon (a massa do elétron é cerca de 1837 vezes menor que a massa do próton). Assim, a mobilidade do elétron é muito maior que a mobilidade do íon. Além disso, a teoria cinética prevê que a frequência de colisão de partículas carregadas com átomos neutros é proporcional à velocidade térmica das partículas carregadas. Como o quadrado desta velocidade térmica é inversamente proporcional à massa das partículas que compõem o gás, concluímos que $\mu \sim m^{-1/2}$. Então, podemos aproximar D_a por

$$\begin{aligned} D_a &\approx \frac{\mu_i D_e + \mu_e D_i}{\mu_e} = \frac{\mu_i}{\mu_e} D_e + D_i \\ &= \frac{T_e}{T_i} D_i + D_i. \end{aligned} \quad (12)$$

No equilíbrio termodinâmico, a temperatura do gás de elétrons é aproximadamente igual àquela do gás de íons. Neste caso, a Eq. (12) fornece

$$D_a \approx 2D_i. \quad (13)$$

Na ausência de fontes e/ou sorvedouros de matéria, a concentração n e o fluxo $\mathbf{\Gamma}$ satisfazem a equação de continuidade na forma

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma} = 0. \quad (14)$$

Assim, se $\mathbf{\Gamma}$ é dado pela Eq. (11), a Eq. (14) implica

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D_a \nabla^2 n, \quad (15)$$

conhecida como a *equação de difusão ambipolar*. Passamos agora a discutir as soluções dessa equação em coordenadas retangulares.

III. COORDENADAS RETANGULARES

A. Tempo de difusão

As soluções da equação de difusão ambipolar, Eq. (15), podem ser expressas através do método de separação de variáveis, a saber

$$n(\mathbf{r}, t) = S(\mathbf{r})T(t). \quad (16)$$

Substituindo a Eq. (16) na Eq. (15), obtemos

$$\frac{1}{T(t)} \frac{dT}{dt} = D_a \frac{1}{S(\mathbf{r})} \nabla^2 S(\mathbf{r}). \quad (17)$$

A Eq. (17) será satisfeita se, e somente se, ambos os membros forem iguais a uma constante, digamos $-1/\tau$. Neste caso, o membro esquerdo da

Eq. (17) fornece

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{T}{\tau} \implies T(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (18)$$

A Eq. (18) mostra que a concentração de partículas carregadas no plasma decai exponencialmente com o tempo na escala τ , desde $T(0) = 1$ até $T(\infty) = 0$. Esta escala é denominada *tempo de difusão*.

B. Comprimento de difusão

Em uma dimensão, digamos x , o membro direito da Eq. (17) fornece

$$\frac{d^2 S}{dx^2} = -\frac{1}{D_a \tau} S(x). \quad (19)$$

A solução mais simples da Eq. (19) é uma combinação linear de senos e cossenos, a saber

$$S(x) = A \cos\left(\frac{x}{\sqrt{D_a \tau}}\right) + B \sin\left(\frac{x}{\sqrt{D_a \tau}}\right), \quad (20)$$

onde A e B são duas constantes de integração.

Estamos interessados em descrever a situação em que recombinações de íons com elétrons ocorram, preferencialmente, nas duas “paredes” que contêm o gás (em uma dimensão, um segmento de reta limitado por dois pontos). Assim, supomos que o plasma esteja confinado por duas paredes localizadas em $x = \pm L$. Como resultado, tomamos as condições de contorno $S(\pm L) = 0$ na Eq. (20), obtendo

$$A \cos\left(\frac{\pm L}{\sqrt{D_a \tau}}\right) + B \sin\left(\frac{\pm L}{\sqrt{D_a \tau}}\right) = 0. \quad (21)$$

A Eq. (21) será satisfeita se, e somente se, pusermos $\pm L/\sqrt{D_a \tau} = \pi/2$, o que implica $B = 0$, donde segue que

$$S(x) = n_0 \cos\left(\frac{x}{\sqrt{D_a \tau}}\right), \quad (22)$$

onde definimos $A = n_0$, a concentração de partículas em $x = \pm L$, chamada *concentração de equilíbrio*. De acordo com as condições de contorno estabelecidas, o tempo de difusão pode ser expresso através de

$$\tau = \frac{(2L/\pi)^2}{D_a}. \quad (23)$$

Substituindo a Eq. (23) na Eq. (22) e, subsequentemente, a Eq. (18) na Eq. (16), obtemos

$$n(x, t) = n_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right). \quad (24)$$

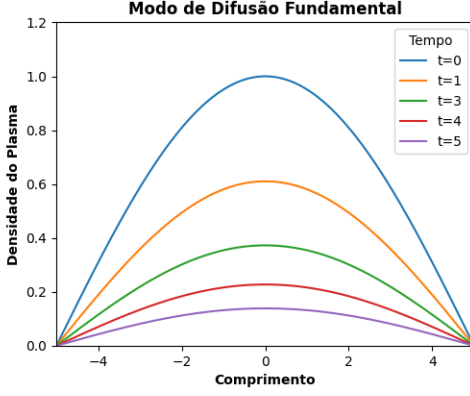


Figura 2. A concentração n de partículas carregadas no plasma, de acordo com a Eq. (24), como função de x para valores selecionados de t . A concentração de equilíbrio n_0 é tomada igual à unidade, sem perda de generalidade.

A quantidade $2L/\pi$ é o *comprimento de difusão* e a solução (24) é o *modo de difusão fundamental*. Na Fig. 2, ilustramos a concentração n de partículas carregadas no plasma, de acordo com a Eq. (24), como função de x para valores selecionados de t .

C. Três dimensões

Em três dimensões, a função $S(x)$ que figura na Eq. (19) generaliza-se para

$$S(\mathbf{r}) = X(x)Y(y)Z(z). \quad (25)$$

Como resultado, as funções $X(x)$, $Y(y)$ e $Z(z)$ devem satisfazer a equação

$$YZ \frac{d^2 X}{dx^2} + XZ \frac{d^2 Y}{dy^2} + XY \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\frac{1}{D_a \tau} XYZ. \quad (26)$$

Dividindo ambos os membros da Eq. (26) pelo produto XYZ , obtemos

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\frac{1}{D_a \tau}. \quad (27)$$

A Eq. (27) será satisfeita se, e somente se, por exemplo,

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{D_a \tau} - C, \quad (28)$$

onde C é uma constante. A solução da Eq. (28) pode ser expressa através de

$$X(x) = A \cos \left[\left(\frac{1}{D_a \tau} + C \right)^{1/2} x \right] + B \sin \left[\left(\frac{1}{D_a \tau} + C \right)^{1/2} x \right]. \quad (29)$$

Modo de Difusão Fundamental

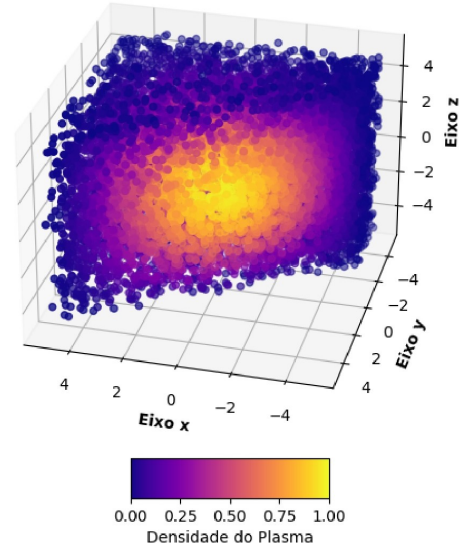


Figura 3. O modo de difusão fundamental das partículas carregadas no plasma, de acordo com a Eq. (31). O cubo possui cinco unidades de comprimento em cada aresta. O plasma foi seccionado ao longo de uma diagonal perpendicular ao plano xy para melhor exibir o padrão de distribuição da concentração de partículas. As bolinhas representam elementos de volume do plasma com a informação da concentração local, de acordo com o mapa de cores mostrado abaixo da figura.

Tomando as condições de contorno $X(\pm L) = 0$ e pondo $[1/(D_a \tau) + C]^{1/2} L = \pi/2$, concluímos que $B = 0$, donde segue que

$$X(x) = A \cos \left(\frac{\pi x}{2L} \right). \quad (30)$$

Procedendo de modo análogo para $Y(y)$ e $Z(z)$, obtemos uma expressão para o modo de difusão fundamental das partículas carregadas no plasma em três dimensões, a saber

$$n(\mathbf{r}, t) = n_0 e^{-t/\tau} \cos \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \cos \left(\frac{\pi y}{2L} \right) \cos \left(\frac{\pi z}{2L} \right), \quad (31)$$

onde o tempo de difusão τ satisfaz

$$\tau = \frac{1/D_a}{\pi^2/(4L^2) - C}. \quad (32)$$

Note que, de acordo com a Eq. (32), $C < \pi^2/(4L^2)$, uma vez que $\tau > 0$. Na Fig. 4, ilustramos o modo de difusão fundamental das partículas carregadas no plasma, de acordo com a Eq. (31), como função de x , y e z , para um instante selecionado.

IV. COORDENADAS CILÍNDRICAS

Em coordenadas cilíndricas, o operador laplaciano escreve-se como

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{d^2}{dz^2}, \quad (33)$$

onde usamos derivadas totais porque supomos que a função $S(\mathbf{r})$ é separável,

$$S(\mathbf{r}) = R(r)\Phi(\phi)Z(z). \quad (34)$$

Como resultado, as funções $R(r)$, $\Phi(\phi)$ e $Z(z)$ devem satisfazer a equação

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{Rr} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\Phi r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\frac{1}{D_a \tau}. \quad (35)$$

A função $Z(z)$ deve satisfazer a equação

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\frac{1}{D_a \tau} - E, \quad (36)$$

onde E é uma constante. A solução da Eq. (36) pode ser expressa através de

$$Z(z) = B \cos \left[\left(\frac{1}{D_a \tau} + E \right)^{1/2} z \right] + C \sin \left[\left(\frac{1}{D_a \tau} + E \right)^{1/2} z \right]. \quad (37)$$

Tomando as condições de contorno $Z(\pm H) = 0$ e pondo $[1/(D_a \tau) + E]^{1/2} H = \pi/2$, concluímos que $C = 0$, donde segue que

$$Z(z) = B \cos \left(\frac{\pi z}{2H} \right). \quad (38)$$

Substituindo a Eq. (38) na Eq. (36), obtemos o tempo de difusão,

$$\tau = \frac{1/D_a}{\pi^2/(4H^2) - E}. \quad (39)$$

De novo, note que $E < \pi^2/(4H^2)$, porque $\tau > 0$.

A função $\Phi(\phi)$ deve satisfazer a equação

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -\frac{r^2}{D_a \tau} - F, \quad (40)$$

onde F é uma constante. A solução mais simples para a Eq. (40) é uma combinação linear de senos e cossenos,

$$\Phi(\phi) = G \cos \left[\left(\frac{r^2}{D_a \tau} + F \right)^{1/2} \phi \right] + I \sin \left[\left(\frac{r^2}{D_a \tau} + F \right)^{1/2} \phi \right]. \quad (41)$$

A solução para a equação radial é um pouco mais complicada. Primeiro, reescrevemos a Eq. (35),

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{Rr} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\Phi r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} - \frac{1}{D_a \tau}. \quad (42)$$

Em seguida, substituímos as equações (36) e (40) na Eq. (42),

$$\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{Rr} \frac{dR}{dr} = \frac{1}{D_a \tau} + E + \frac{F}{r^2}. \quad (43)$$

Agora, consideramos a seguinte transformação de variáveis:

$$\frac{1}{D_a \tau} + E = \gamma^2 \quad \text{e} \quad F = \nu^2, \quad (44)$$

Assim, substituímos as Eqs. (44) na Eq. (43),

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{r}{R} \frac{dR}{dr} - r^2 \gamma^2 - \nu^2 = 0. \quad (45)$$

Finalmente, multiplicamos ambos os membros da Eq. (45) por R ,

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - [(r\gamma)^2 + \nu^2] R = 0. \quad (46)$$

A Eq. (47) é conhecida como *equação diferencial modificada de Bessel*. Suas soluções são chamadas de *funções de Bessel modificadas* de 1º e 2º tipos (Ref. [1]), sendo assim, a solução mais geral para $R(r)$ é uma combinação linear das funções de 1º e 2º tipos,

$$R(r) = H I_n(\gamma r) + J K_n(\gamma r), \quad (47)$$

onde I_n e K_n são as funções de Bessel modificadas do 1º e 2º tipos de ordem n , respectivamente, e também H e J são constantes de integração. A função de Bessel modificada de 1º tipo tende a infinito conforme seu argumento cresce, e a função de 2º tipo apresenta o mesmo comportamento quando o argumento tende a zero, por isso é necessário realizar uma combinação linear de ambas de modo a obter uma descrição física. Por fim, as constantes de integração só podem ser encontradas conforme condições de contorno específicas.

A partir das Eqs. (18), (38), (41) e (47), concluímos que a solução da equação de difusão em coordenadas cilíndricas pode ser expressa através de

$$n(r, \phi, z, t) = n_0 e^{-t/\tau} [I_n(\gamma r) + K_n(\gamma r)] \cos \left(\frac{\pi z}{2H} \right) \times \left\{ \cos \left[\left(\frac{r^2}{D_a \tau} + F_m \right)^{1/2} \phi \right] + \sin \left[\left(\frac{r^2}{D_a \tau} + F_m \right)^{1/2} \phi \right] \right\}, \quad (48)$$

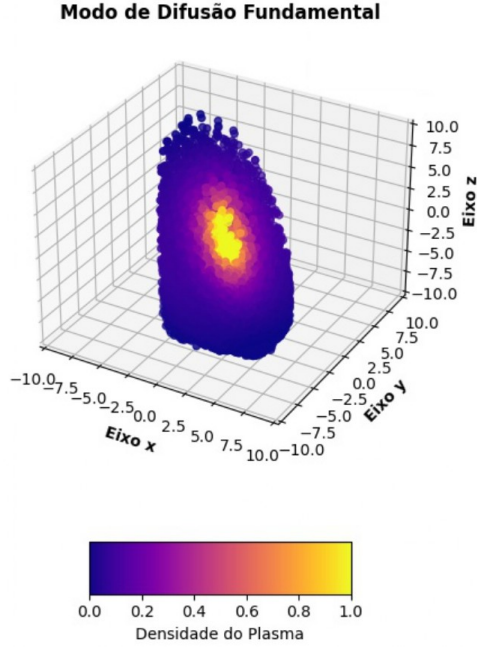


Figura 4. O modo de difusão fundamental das partículas carregadas no plasma, de acordo com a Eq. (48). O cilindro possui cinco unidades de raio, e vinte unidade de altura. O plasma foi seccionado transversalmente para melhor exibir o padrão de distribuição da concentração de partículas. As bolinhas representam elementos de volume do plasma com a informação da concentração local, de acordo com o mapa de cores mostrado abaixo da figura.

onde incluímos o sufixo m à constante F para indicar diferentes modos de difusão.

A referência (Ref. [2]) apresenta uma solução simplificada para a geometria cilíndrica, em que a densidade não depende do argumento ϕ e o cilindro é ilimitado em z . Nesse caso, a densidade depende somente do raio, e a solução é descrita pela função de Bessel de 1º tipo, que é bem comportada.

V. CAMPO MAGNÉTICO

Na presença de um campo magnético, íons e elétrons do gás tendem a seguir trajetórias helicoidais em torno das linhas de campo. Como resultado, o meio se torna anisotrópico, na medida em que uma direção preferencial se estabelece no plasma. Se colisões entre partículas carregadas e neutras pudessem ser desprezadas, as primeiras girariam em torno de uma determinada linha de campo. Entretanto, considerando as colisões, concluímos que as partículas carregadas podem girar em torno de linhas de campo distintas.

Supondo um campo magnético $\mathbf{B} = B\hat{z}$, a equação de movimento para as partículas carre-

gadas pode ser expressa através de

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \\ &= \pm \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{\nabla P}{nm} - \nu \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (49)$$

De novo, consideramos que o sistema esteja em um estado estacionário de equilíbrio, i.e., $d\mathbf{v}/dt = 0$. Além disso, supomos um regime isotérmico do gás, i.e., $P = nkT$. Como resultado, a Eq. (49) mostra que o componente- x , v_x , da velocidade será dado por

$$v_x = \pm \frac{e}{m\nu} (E_x + v_y B) - \frac{kT}{m\nu n} \frac{\partial n}{\partial x}, \quad (50)$$

onde v_y é o componente- y da velocidade. Usando as noções de mobilidade de partícula, μ , e coeficiente de difusão, D , a Eq. (50) pode ser lida como

$$v_x = \pm \mu E_x - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \pm \frac{w_c}{\nu} v_y, \quad (51)$$

onde $w_c = eB/m$ é a *frequência ciclotrônica* (Ref. [3]).

Procedendo de modo análogo para v_y , obtemos

$$v_y = \pm \mu E_y - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial y} \mp \frac{w_c}{\nu} v_x. \quad (52)$$

Substituindo a Eq. (51) na Eq. (52),

$$\begin{aligned} v_y \left(1 + \frac{w_c^2}{\nu^2} \right) &= \pm \mu E_y - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial y} \\ &\quad - \frac{w_c^2}{\nu^2} \frac{E_x}{B} \pm \frac{w_c^2}{\nu^2} \frac{kT}{eB} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x}, \end{aligned} \quad (53)$$

e a Eq. (52) na Eq. (51),

$$\begin{aligned} v_x \left(1 + \frac{w_c^2}{\nu^2} \right) &= \pm \mu E_x - \frac{D}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \\ &\quad + \frac{w_c^2}{\nu^2} \frac{E_y}{B} \mp \frac{w_c^2}{\nu^2} \frac{kT}{eB} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y}. \end{aligned} \quad (54)$$

Combinando as equações (53) e (54) expressamos a componente da velocidade perpendicular ao campo magnético, \mathbf{v}_\perp , através de

$$\mathbf{v}_\perp = \pm \mu_\perp \mathbf{E} - D_\perp \frac{\nabla n}{n} + \frac{\mathbf{v}_E + \mathbf{v}_D}{1 + \nu^2/w_c^2}, \quad (55)$$

onde $\mu_\perp = \mu/(1 + w_c^2/\nu^2)$ e $D_\perp = D/(1 + w_c^2/\nu^2)$ são a mobilidade de partícula e coeficiente de difusão *transversais*, respectivamente. As quantidades $\mathbf{v}_E = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})/(B^2)$ e $\mathbf{v}_D = [(kT)/(eB)][(\nabla n)/(n)]$ são conhecidas como *derivadas $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$* e *diamagnética*, respectivamente. No limite $w_c^2 \ll \nu^2$, os coeficientes transversais tendem para seus correspondentes usuais, discutidos na primeira parte desta monografia, e os

termos de deriva tornam-se desprezíveis. No limite $w_c^2 \ll \nu^2$, os coeficientes transversais adquirem magnitudes da ordem de ν^2/w_c^2 menores que aquelas dos seus correspondentes usuais, e os termos de deriva, definitivamente, não podem mais ser desprezados.

Na presença de um campo magnético, devemos considerar dois tipos de fluxos: o *longitudinal*, paralelo a \mathbf{B} , e o *transversal*, perpendicular a \mathbf{B} , notando que o fluxo longitudinal é o mesmo derivado na primeira parte desta monografia, pois o campo magnético somente interfere na dinâmica não paralela às suas linhas de campo.

Dado que a massa dos íons é muito maior que aquela dos elétrons, o fluxo longitudinal de elétrons é muito maior que aquele dos íons. Analisando o raio da trajetória helicoidal (raio de Larmor), $r_l = mv/eB$, nota-se que este é muito menor para elétrons do que para íons, devido as suas massas, portanto, os elétrons tendem a se difundir longitudinalmente, já que a probabilidade de ocorrência de colisões com átomos neutros é menor, enquanto que os íons tendem a se difundir perpendicularmente.

Assim, para descrever a difusão ambipolar na presença de um campo magnético, estabelecemos que o fluxo *resultante* (*longitudinal + transversal*),

$$\mathbf{\Gamma} = n(\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}), \quad (56)$$

deve ser igual para íons e elétrons, onde \mathbf{v}_{\parallel} e \mathbf{v}_{\perp} são os campos longitudinal e transversal, respectivamente. A velocidade \mathbf{v}_{\parallel} é a mesma discutida na primeira parte desta monografia, e a velocidade \mathbf{v}_{\perp} é dada pela Eq. (55). Portanto, o fluxo resultante para elétrons pode ser expresso através de

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}_e = & -\mu_{e\perp} n \mathbf{E}_{\perp} - D_{e\perp} \nabla_{\perp} n + n \frac{\mathbf{v}_{eE} + \mathbf{v}_{eD}}{1 + \nu^2/w_c^2} \\ & - \mu_e n \mathbf{E}_{\parallel} - D_e \nabla_{\parallel} n, \end{aligned} \quad (57)$$

e o fluxo resultante para íons pode ser expresso por uma relação similar, onde trocamos o índice “e” pelo índice “i”. Na Eq. (57), ∇_{\perp} e ∇_{\parallel} representam os gradientes transversal e longitudinal, respectivamente. Finalmente, para determinar a equação de difusão na presença de um campo magnético, devemos expressar a equação da continuidade na forma

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_e + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_i = 0. \quad (58)$$

Devido à sua complexidade, a Eq. (58) é usualmente tratada numericamente, o que está além do escopo desta monografia.

VI. CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste Trabalho de Conclusão de Curso, discutimos a difusão ambipolar em um plasma de íons, elétrons e partículas neutras. Neste fenômeno, os fluxos de elétrons e de íons em um dado elemento de volume são iguais. Como resultado, o plasma pode ser considerado eletricamente neutro em um regime estacionário.

Expressões para a distribuição espacial da concentração do plasma foram deduzidas e discutidas nos casos unidimensional e tridimensional (plasma em um cubo e em um cilindro). Além disso, a difusão ambipolar na presença de um campo magnético foi estudada, enfatizando o caráter de confinamento do plasma pelo campo. De fato, à medida em que a magnitude do campo aumenta (e então, aumenta a frequência ciclotrônica), o coeficiente de difusão transversal diminui. Como resultado, íons e elétrons tendem a seguir as linhas de campo. Em dispositivos conhecidos como *tokamaks* (Ref. [6]), este efeito é extremamente importante, pois impede que o plasma extremamente quente toque os limites do equipamento, evitando assim problemas como o derretimento do material das paredes do vaso.

Como perspectivas para futuros desenvolvimentos deste trabalho, podemos mencionar o estudo da influência das recombinações entre elétrons e íons. Esta situação ocorre quando o plasma é fortemente ionizado. Outro aspecto interessante para ser investigado refere-se à introdução de fontes de ionização, retardando assim a degradação do plasma com o tempo. Por fim, a presença de um campo magnético muito forte induz processos não previstos pela teoria de dois fluidos, aqui apresentada. Como mencionado por Hoh e Lehnert (Ref. [4]), dados experimentais sugerem um valor crítico para o campo magnético em que a teoria de dois fluidos deve dar lugar à teoria cinética. O estudo da difusão ambipolar no âmbito da teoria cinética foi originalmente desenvolvido por Kadomtsev e Nedospasov (Ref. [5]).

[1] Arfken, G. B., Weber, H. J., and Harris, F. E. (2013). *Mathematical Methods for Physicists: A*

Comprehensive Guide. Academic Press, 7th edition.

- [2] Chen, F. F. (2018). *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*. Springer, 3rd edition.
- [3] Griffiths, D. J. (1999). *Introduction to Electrodynamics*. Prentice-Hall, 3rd edition.
- [4] Hoh, F. C. and Lehnert, B. (1960). Diffusion processes in a plasma column in a longitudinal magnetic field. *The Physics of Fluids*, 3:600–607.
- [5] Kadomtsev, B. B. and Nedospasov, A. V. (1960). Instability of the positive column in a magnetic field and the ‘anomalous’ diffusion effect. *Journal of Nuclear Energy, Part C, Plasma Physics*, 1:230–235.
- [6] Wesson, J. and Campbell, D. J. (2004). *Tokamaks*. Clarendon Press, 3rd edition.