

# Trajatórias exóticas e efeito Aharonov-Bohm

Diego Guimarães Barreto\*  
Universidade Federal do ABC

O experimento de dupla fenda é usado em muitas ocasiões para ilustrar as propriedades ondulatórias de sistemas quânticos e para entender sobre a interferência quântica. A monografia em questão tem o intuito de estudar e compreender fenômenos de interferência quântica associados ao experimento de dupla fenda, entre eles o efeito Aharonov Bohm e trajetórias exóticas.

## I. INTEGRAIS DE CAMINHO

### A. Partícula Livre

Sabemos dos fundamentos de mecânica quântica que para um estado quântico inicial  $|\psi(t_0)\rangle$  que descreve uma partícula livre de massa  $m$ , podemos definir como esse estado evolui temporalmente, dada hamiltoniana independente do tempo  $\hat{H}$ , na forma [3]:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} |\psi(t_0)\rangle \quad (1)$$

Porém, se avaliarmos de que forma esse estado evolui em  $N$  pequenas e iguais parcelas de tempo  $\epsilon$  tal que  $\epsilon = \frac{t_N - t_0}{N}$ .

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\hat{H}\epsilon}{\hbar}} e^{-\frac{i\hat{H}\epsilon}{\hbar}} \dots e^{-\frac{i\hat{H}\epsilon}{\hbar}} |\psi(t_0)\rangle \quad (2)$$

Expandindo em bases de posição  $|x\rangle$ , definimos o operador de propagação

$$K(x_N, t_N, x_0, t_0) = \langle x_N | e^{-\frac{i\hat{H}(t_N - t_0)}{\hbar}} | x_0 \rangle \quad (3)$$

Logo,

$$K(x_N, t_N, x_0, t_0) = \int dx_{N-1} \dots dx_0 \langle x_N | e^{-\frac{i\hat{p}^2\epsilon}{2m\hbar}} | x_{N-1} \rangle \dots e^{-\frac{i\hat{p}^2\epsilon}{2m\hbar}} | x_0 \rangle \quad (4)$$

E em momento  $|p\rangle$ ,

$$\langle x_N | e^{-\frac{i\hat{p}^2\epsilon}{2m\hbar}} | x_{N-1} \rangle = \int dp \langle x_N | p \rangle \langle p | e^{-\frac{i\hat{p}^2\epsilon}{2m\hbar}} | x_{N-1} \rangle \quad (5)$$

Perceba, que para,

$$\begin{aligned} \langle x_N | p \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ipx_N}{\hbar}} \\ \langle p | x_{N-1} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{ipx_{N-1}}{\hbar}} \end{aligned} \quad (6)$$

Substituindo em (4), temos a integral gaussiana passível de resolução completando quadrado:

$$\begin{aligned} \langle x_N | e^{-\frac{i\hat{p}^2\epsilon}{2m\hbar}} | x_{N-1} \rangle &= \int dp \frac{1}{2\pi\hbar} e^{\frac{ip(x_N - x_{N-1})}{\hbar}} e^{-\frac{ip^2\epsilon}{2m\hbar}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle x_N | e^{-\frac{i\hat{p}^2\epsilon}{2m\hbar}} | x_{N-1} \rangle &= \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i\epsilon}} e^{\frac{im(x_N - x_{N-1})^2}{2\hbar\epsilon}} \end{aligned} \quad (7)$$

Nos possibilitando, enfim, concluir a forma do propagador:

$$K(x_N, t_N, x_0, t_0) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar i\epsilon}\right)^{\frac{N}{2}} \int D_x e^{\sum_i \frac{im(x_N - x_{N-1})^2}{2\hbar\epsilon}} \quad (8)$$

Onde, por recorrência [1], concluímos a forma final dada por:

$$K(x_b, t_b, x_a, t_a) = \sqrt{\frac{m}{2\pi\hbar i(t_b - t_a)}} e^{\frac{im(x_b - x_a)^2}{2\hbar(t_b - t_a)}} \quad (9)$$

Dessa forma, dado propagador, podemos definir de que forma uma partícula livre propaga no espaço.

### B. Caso Geral

Para um caso em que a partícula possua energia potencial independente do tempo  $V(\hat{X})$ , podemos, analogamente aos passos anteriores chegar na forma:

$$\langle x_N | e^{-\frac{i\hat{p}^2\epsilon}{2m\hbar}} e^{\frac{i\epsilon V(\hat{X})}{\hbar}} | x_{N-1} \rangle = \langle x_N | e^{-\frac{i\hat{p}^2\epsilon}{2m\hbar}} | x_{N-1} \rangle e^{-\frac{i\epsilon V(x_{N-1})}{\hbar}} \quad (10)$$

Onde vemos que executando os mesmos passos da subseção anterior para a partícula livre, concluímos:

$$\left(\frac{m}{2\pi\hbar i\epsilon}\right)^{\frac{N}{2}} \int D_x e^{(\sum_k \frac{i\epsilon}{\hbar} (\frac{m(x_k - x_{k-1})^2}{2\epsilon^2} - \epsilon V(x_{k-1})))} \quad (11)$$

Onde podemos generalizar para o espaço contínuo na forma [2]:

$$K(x, x', t) = \int [D_x] e^{\int dt \frac{i}{\hbar} \mathcal{L}(x, \dot{x})} \quad (12)$$

Dessa forma, podemos observar que a contribuição de cada caminho é proporcional a uma fase  $\theta$  descrita proporcionalmente pela ação  $S$ .

$$\theta = \frac{S}{\hbar}, \quad S = \int dt \mathcal{L}(x, \dot{x}) \quad (13)$$

Portanto, sabemos que classicamente, para qualquer variação no caminho  $\delta x$ , o fator  $S(x) \gg \hbar$  implicando que as oscilações de fase serão muito grandes e conseqüentemente haverá a soma de fases opostas que se cancelarão. Então, para que não haja esse cancelamento das fases, é necessário que haja uma variação de caminho nas vizinhanças próximas à curva de ação mínima

\* Universidade Federal do ABC; diego.barreto@aluno.ufabc.edu.br

clássica (trajetória clássica), na ordem de  $\hbar$  [5], a estes caminhos, não cancelados, que produzem contribuições e não alteram em primeira ordem a ação, damos o nome de trajetórias não clássicas.

## II. DUPLA FENDA

### A. Propagação livre com obstaculo

Dadas partículas livres, disparadas por uma fonte, propagando no vácuo e na direção  $z$  pelo espaço 2D em direção a uma tela, onde existe entre a tela e a fonte um obstaculo tal que a mesma só consegue continuar propagando caso passe por duas fendas de largura próxima ao seu comprimento de onda  $\lambda$ .

O que devemos nos perguntar nesse caso é, qual a probabilidade de encontrar partícula num ponto  $x$  da tela dado esse obstaculo?

Sabemos que este caso está relacionado com a dualidade onda-partícula e só pode ser explicado utilizando a mecânica quântica, pois contra intuitivamente, a intensidade na tela sugere algum tipo de interferência existente, tal que:

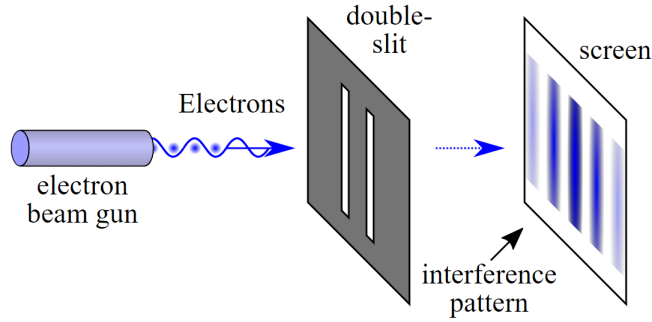


FIG. 1: Esquema representativo do experimento de dupla fenda para elétrons. (Fonte: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Double-slit.PNG>)

### B. Amplitude e densidade de probabilidade

Para compreensão do cálculo da interferência quântica é necessária a compreensão do conceito de amplitude de probabilidade, que simboliza a representação de um processo físico, e a probabilidade de ocorrência desse processo físico, que é demarcada pelo quadrado da amplitude de probabilidade. Caso este processo físico ocorra mais de uma vez, a amplitude de probabilidade total para este evento é dada como a soma de todas as amplitudes individuais de cada processo e a probabilidade total é dada pelo quadrado da amplitude total.

Na construção do experimento da dupla fenda para o elétron, por exemplo, temos o processo evidenciado na figura 1, denotamos as fendas como 1 e 2, a amplitude

de probabilidade total  $\psi$  associada as fendas é da forma  $\psi = \psi_1 + \psi_2$ , onde  $\psi_1$  e  $\psi_2$  significam a amplitude de probabilidade da partícula passar pela fenda 1 ou fenda 2. Dessa forma, pode-se concluir o padrão de interferência na tela associada à densidade de probabilidade que terá a forma  $P = |\psi|^2$

### C. Experimento de dupla fenda com trajetórias clássicas

Para simular o experimento de dupla fenda, podemos primeiramente supor que as fendas são do tipo gaussianas  $F$ , com largura  $\beta$ , pois as mesmas tornam mais simples a descrição analítica da probabilidade de encontrar a partícula na tela. Portanto, queremos que as fendas assumam a forma:

$$F(x) = 1 \text{ se } -\beta \leq x \leq \beta \quad F(x) = 0 \text{ se } |x| \geq \beta$$

Porém, se  $F(x)$ , assumir a forma gaussiana abaixo, sabemos que aproximadamente dois terços da área da curva se encontra entre  $-\beta$  e  $\beta$ , tendo o mesmo formato da distribuição normal com desvio padrão  $\beta$ .

$$F(x) = e^{-\frac{x^2}{2\beta^2}} \quad (14)$$

Então, podemos enfim, montar o experimento para fonte de elétrons que se comportam como pacotes de onda gaussianos com largura  $\sigma_0$  que percorrem um tempo  $T$  até as fendas, de largura  $\beta$  e distantes  $d$ , e um tempo  $\tau$  da fenda até a tela. Sabendo a função pacote de onda:

$$\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{\sigma_0} \cdot \sqrt{\pi}} \cdot \exp\left(\frac{-x_0^2}{2\sigma_0^2}\right) \quad (15)$$

Utilizando o método de fendas gaussianas:

$$F_1(x) = \exp\left(\frac{-(x - \frac{d}{2})^2}{2 \cdot \beta^2}\right) \quad (16)$$

$$F_2(x) = \exp\left(\frac{-(x + \frac{d}{2})^2}{2 \cdot \beta^2}\right) \quad (17)$$

Considerando as detecções num plano paralelo às fendas a fim de reduzi-lo a um problema unidimensional, dada velocidade de propagação em  $z$  grande, com componente de momento linear  $p_z$  bem definida, definindo movimento clássico, na direção  $z$ , temos a descrição das amplitudes de probabilidade para as fendas 1 e 2:

$$\psi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, x_1, \tau) \cdot F_1(x) \cdot K(x_1, x_0, T) \cdot \Psi_0 dx_0 dx_1 \quad (18)$$

$$\psi_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, x_2, \tau) \cdot F_2(x) \cdot K(x_2, x_0, T) \cdot \Psi_0 dx_0 dx_2 \quad (19)$$

Dessa forma para [9]:

- $m = 9.11 \cdot 10^{-31} kg$
- Onda eletrônica com  $\lambda \approx 50 pm$
- $d = 650 nm$ ,  $\beta = 62 nm$
- $T = 18 ns$ ,  $\tau = 15 ns$
- $\sigma_0 = 62 nm$

Temos o seguinte padrão de interferência para intensidade normalizada  $I = |\Psi|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2$  :

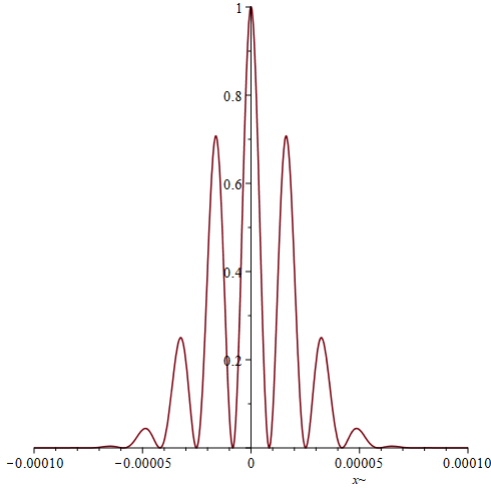


FIG. 2: Padrão de interferência gerado a partir da propagação de elétrons sobre dupla fenda.

Nota-se que a existência de máximos e mínimos no padrão de interferência mostra de fato a existência da dualidade onda-matéria e concorda com os experimentos conhecidos na literatura relacionados à dupla fenda, mostrando que o formalismo de integrais de caminho nos permite explorar essa característica dual e como veremos adiante, a adição de novos caminhos no princípio da superposição.

### 1. Contribuição de trajetórias exóticas

Vimos na seção I e subseção B que as trajetórias não clássicas são resultado de variações  $\delta x$  no caminho que não alteram a ação  $S$  em primeira ordem  $\hbar$ . Dessa forma, é necessário acrescentar à superposição de amplitudes para fenda dupla, a contribuição dessas trajetórias não clássicas que chamaremos de trajetórias exóticas para refinamento da descrição experimental [11]. Neste caso, abordaremos o experimento de dupla fenda considerando as trajetórias clássicas (em preto) e as trajetórias exóticas (em verde), como mostra a figura a seguir, Neste caso, dada partícula que caminha entre as fendas, montamos

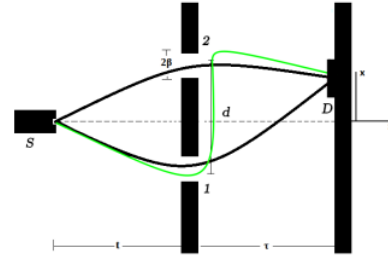


FIG. 3: Esquemática do experimento da fenda dupla, onde temos trajetória exótica(em verde) e trajetória clássica(em preto).[5]

a amplitude:

$$\psi_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, x_2, \tau) F(x_2) K(x_2, x_1, \epsilon) F(x_1) K(x_1, x_0, T) \phi_0(x_0) dx_0, dx_1, dx_2 \quad (20)$$

$$\psi_{21} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x, x_1, \tau) F(x_1) K(x_1, x_2, \epsilon) F(x_2) K(x_2, x_0, T) \phi_0(x_0) dx_0, dx_1, dx_2 \quad (21)$$

Onde o propagador  $K(x_2, x_1, \epsilon)$  diz a respeito da propagação, por exemplo, da partícula entre as fendas 1 e 2 num tempo  $\epsilon = \frac{d}{\Delta v_x}$  que é calculado a partir incerteza no momento linear  $\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2}$  [13].

Dessa forma, se executarmos o princípio da superposição, temos:

$$\Psi = |\psi_1 + \psi_2 + \psi_{12} + \psi_{21}|^2 \quad (22)$$

E concluímos o seguinte padrão de interferência:

A fim de quantificar a contribuição no padrão de interferência vinda das trajetórias exóticas na fenda dupla, utilizamos o parâmetro de Sorkin  $\kappa$ ,

$$\kappa = \frac{I_{et}(x) - I_c(x)}{I_{et}(x=0)} \quad (23)$$

Onde, a intensidade de elétrons na tela dada contribuição das trajetórias exóticas é dada por  $I_{et}$  e  $I_c$  representa a intensidade clássica. Neste caso, observamos contribuições na ordem de  $10^{-8}$ .

### D. Efeito Aharonov Bohm

O efeito Aharonov Bohm prediz que os potenciais eletromagnéticos  $\phi(\vec{x})$  e  $\vec{A}$  podem ser grandezas físicas reais e que isso pode ser mostrado a partir dos efeitos de interferência gerado por elétrons[8]. Este efeito aplicado no experimento de dupla fenda consiste em pôr um solenoide impenetrável entre as fendas e observar as implicações que o fluxo dentro do solenoide é capaz de gerar no padrão de interferência final gerado no anteparo.

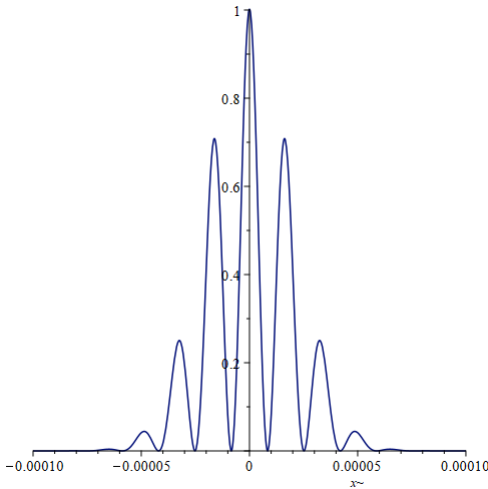


FIG. 4: Padrão de interferência dado experimento de dupla fenda, considerando trajetórias exóticas, onde os dados utilizados foram o mesmo da seção para trajetórias clássicas e o tempo entre as fendas  $\epsilon = 0.492ns$ .

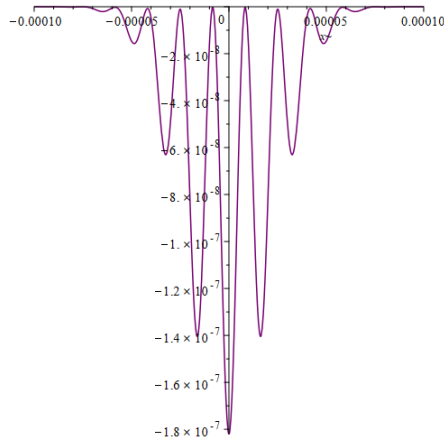


FIG. 5: Parâmetro de Sorkin em função de  $x$  para onda eletrônica.

### 1. Potencial vetor, escalar e transformação de Gauge

Para compreender o efeito Aharonov Bohm, é necessário conhecer a abordagem das Equações de Maxwell por vetores potenciais[7], onde partindo da divergência do campo magnético e por propriedades do cálculo vetorial, podemos utilizar um vetor potencial  $\vec{A}$  como ferramenta para descrever o campo magnético na forma:

$$\vec{B}(x, y, z) = (\vec{\nabla} \times \vec{A}(x, y, z)) \quad (24)$$

Analogamente, pela lei de Faraday, encontramos uma descrição para o campo elétrico definindo um potencial escalar  $V$ ,

$$\vec{E}(x, y, z) = -\nabla V - \frac{\partial \vec{A}(x, y, z)}{\partial t} \quad (25)$$

Reduzindo assim, um problema de 6 graus de liberdade para 4 graus de liberdade.

Dada construção, percebe-se que, para qualquer função escalar  $\Lambda(r, t)$ , podemos adicionar  $\nabla\Lambda$  ao potencial vetor e subtrair  $\frac{\partial\Lambda}{\partial t}$  ao potencial escalar que não alteramos as propriedades físicas do campo elétrico e magnético, a essas mudanças, damos o nome de transformações de Gauge.

### 2. Fluxo magnético

Considerando um ambiente em que não temos campo magnético e ligamos um campo magnético dentro de um solenoide impenetrável infinito, se esperarmos bastante tempo, podemos supor:

$$\vec{A}(x, t) = \vec{A}(x) \Rightarrow \vec{A}(x) = \vec{A}_0(x) + \nabla\Lambda \quad (26)$$

Sabemos que fora do solenoide teremos campo nulo, tal que  $\nabla \times \vec{A} = 0$  e,

$$\vec{A} = \vec{\nabla}\Lambda \Rightarrow \Lambda(\vec{x}) = \int_{\vec{x}_o}^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{x}') d\vec{x}' \quad (27)$$

Percebemos então, devido caráter conservativo, que a integral de linha é feita num caminho arbitrário e depende apenas da posição final e inicial. Portanto, se considerarmos dois caminhos 1 e 2, que possuem mesmo ponto inicial e final, podemos afirmar que estes caminhos constroem uma superfície.

Portanto, no contexto do experimento de dupla fenda, dada esta relação, analisando o fluxo magnético ( $\phi$ ) numa superfície fechada  $\sigma$  descrita por um caminho 1 (fonte-fenda1-anteparo) e caminho 2 (fonte-fenda2-anteparo), onde possuímos um solenoide impenetrável infinito entre esses caminhos.

$$\int_{\partial\sigma} \vec{B} \cdot d\sigma = \int_{\partial\sigma} [\vec{\nabla} \times \vec{A}] \cdot d\sigma \quad (28)$$

Aplicamos o Teorema de Stokes, e manipulando algebricamente chegamos na descrição do fluxo magnético  $\phi$  interno ao solenoide.

$$\phi = \int_{\vec{x}_o,1}^{\vec{x}} \vec{A} d\vec{x}' - \int_{\vec{x}_o,2}^{\vec{x}} \vec{A} d\vec{x}' \quad (29)$$

### 3. Função de onda transformada por Gauge

Analisamos então a aplicação dessa transformação na equação de Schrodinger para hamiltoniana eletromagnética:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} [\hat{p} - \frac{e}{c}(\vec{A} + \nabla\Lambda)]^2 + e(V - \frac{1}{c} \frac{\partial\Lambda}{\partial t}) \quad (30)$$

Onde chegamos a uma relação importante para a solução da equação de onda transformada por Gauge ( $\psi'$ ) [4]:

$$\psi' = \psi \cdot e^{\frac{i \cdot e}{\hbar \cdot c} \cdot \Lambda} \quad (31)$$

#### 4. Efeito Aharonov-Bohm e Dupla Fenda

Da equação (31), podemos expressar as funções de onda transformadas para dupla fenda como:

$$\psi'_1 = \psi_1 \cdot e^{\frac{i \cdot e}{\hbar \cdot c} \cdot \int_{x_0,1}^{\vec{x}} \vec{A} dx'} \quad (32)$$

$$\psi'_2 = \psi_2 \cdot e^{\frac{i \cdot e}{\hbar \cdot c} \cdot \int_{x_0,2}^{\vec{x}} \vec{A} dx'} \quad (33)$$

Assim, construímos o padrão de interferência  $I_{AB}$ :

$$I_{AB} = |\psi_1 \cdot e^{\frac{i \cdot e}{\hbar \cdot c} \cdot \int_{x_0,1}^{\vec{x}} \vec{A} dx'} + \psi_2 \cdot e^{\frac{i \cdot e}{\hbar \cdot c} \cdot \int_{x_0,2}^{\vec{x}} \vec{A} dx'}|^2 \quad (34)$$

Note que os caminhos 1 e 2 geram uma superfície que engloba o solenoide, e por essa razão podemos utilizar a abordagem de fluxo magnético e concluir que:

$$I_{AB} = |\psi_1 \cdot e^{\frac{i \cdot e}{\hbar \cdot c} \cdot (\int_{x_0,1}^{\vec{x}} \vec{A} dx' - \int_{x_0,2}^{\vec{x}} \vec{A} dx')} + \psi_2|^2 \quad (35)$$

$$I_{AB} = |\psi_1 \cdot e^{\frac{i \cdot e}{\hbar \cdot c} \cdot \phi} + \psi_2|^2 \quad (36)$$

Portanto, percebemos que o padrão de interferência depende numericamente do fluxo magnético fechado dentro do solenoide infinito entre as fendas, compreendendo assim, que a adição de um fluxo magnético no experimento de dupla fenda promove o deslocamento desse padrão[6].

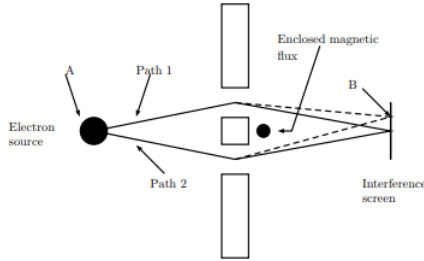


FIG. 6: Efeito Aharonov-Bohm esquematizado no experimento de dupla fenda onde observamos que a presença de um solenoide impenetrável infinito gera um deslocamento no padrão de interferência na tela. [4]

#### 5. Trajetórias Exóticas e efeito Aharonov Bohm

A partir dos cálculos de trajetória exótica, analogamente à equação 32 e 33, sabemos que estes caminhos podem ser representados na forma:

$$\psi'_{12} = \psi_{12} \cdot e^{\frac{i \cdot e}{\hbar \cdot c} \cdot \int_{x_0,3}^{\vec{x}} \vec{A} dx'}, \quad \psi'_{21} = \psi_{21} \cdot e^{\frac{i \cdot e}{\hbar \cdot c} \cdot \int_{x_0,4}^{\vec{x}} \vec{A} dx'} \quad (37)$$

Isso, nos permite montar a função de onda final,

$$\Psi = |\psi_1 \cdot e^{\frac{i \cdot e}{\hbar \cdot c} \cdot \int_{x_0,1}^{\vec{x}} \vec{A} dx'} + \psi_2 \cdot e^{\frac{i \cdot e}{\hbar \cdot c} \cdot \int_{x_0,2}^{\vec{x}} \vec{A} dx'} + \psi_{12} \cdot e^{\frac{i \cdot e}{\hbar \cdot c} \cdot \int_{x_0,3}^{\vec{x}} \vec{A} dx'} + \psi_{21} \cdot e^{\frac{i \cdot e}{\hbar \cdot c} \cdot \int_{x_0,4}^{\vec{x}} \vec{A} dx'}|^2 \quad (38)$$

Manipulando algebricamente, a fim de gerar superfícies que contenham o solenoide, concluímos a forma final,

$$\psi_f = \Omega \cdot (\Omega \cdot \psi_1 + \psi_2) + \psi_{12} + \psi_{21} \cdot \Omega \quad (39)$$

Onde  $\Omega = e^{\frac{i \cdot e \cdot \phi}{\hbar \cdot c}}$

Observe que nesse caso, a presença do solenoide gera diferença de fase entre as funções de onda representando trajetória clássica e entre a superposição das trajetórias clássicas com a trajetória exótica.

Dada aplicação do efeito Aharonov Bohm no experimento de dupla fenda com e sem trajetórias exóticas, construímos os gráficos (figuras 7 e 8) para  $\Omega = e^{\frac{i \cdot \pi}{2}}$ .

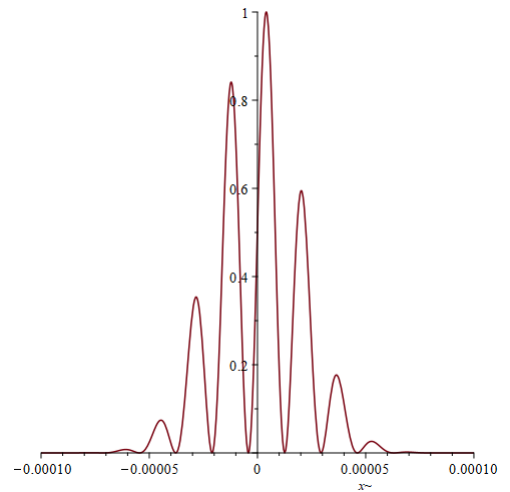


FIG. 7: Padrão de interferência gerado a partir da propagação de elétrons sobre dupla fenda tendo em vista o efeito Aharonov Bohm gerado por um solenoide infinito

### III. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo desta monografia, estudamos de que forma podemos utilizar a abordagem de integral de caminho para descrever o experimento de fenda dupla no vácuo e compreender a necessidade de adição das trajetórias exóticas no experimento a fim de tornar a aplicação do princípio de superposição mais adequada quanto à descrição do fenômeno observado[11]. Por fim, notou-se a influência que o potencial vetor é capaz de gerar no experimento de dupla fenda, num ambiente sem campo magnético, no comportamento das partículas carregadas deslocando o seu padrão de interferência[8], num contexto de adição ou não de trajetórias exóticas. Além disso, da literatura, podemos tentar compreender de que forma

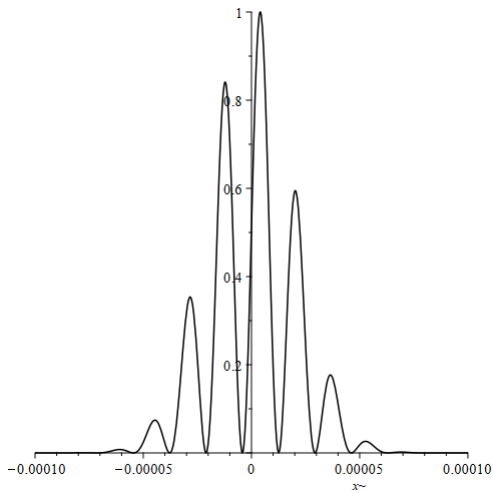


FIG. 8: Padrão de interferência gerado a partir da propagação de elétrons sobre dupla fenda considerando trajetórias exóticas tendo em vista o efeito Aharonov Bohm gerado por um solenoide infinito

os padrões de interferência na tela são afetados pela interação das partículas com ambiente [10] e temos que partículas neutras com um momento magnético também podem exibir o efeito Aharonov-Bohm, a esse efeito deu-se o nome de Aharonov-Casher[12].

- 
- [1] R.P. Feynman, A.R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals (McGraw-Hill Book Company, New York, 1965)
- [2] R. Shankar, “Principles of Quantum Mechanics,” 2nd Edition, Plenum Press, New York, 1994.
- [3] J.J. Sakurai. Modern Quantum Mechanics. Addison-Wesley Publishing Company, revised edition edition, 1994.
- [4] Orasch, Oliver. The Aharonov-Bohm-Effect, Karl-Franzens-Universität Graz,2014
- [5] Vieira, Carlos Henrique da Silva. Trajetórias exóticas e experimentos de interferência com ondas de matéria.Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Piauí.Teresina,2019
- [6] D. Shapiro and W. C. Henneberger, “The aharonov-bohm effect in double- and singleslit diffraction,” Journal of Physics A: Mathematical and General, vol. 22, no. 17, 1989.
- [7] D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics. Cambridge University Press, 1981.
- [8] Y. Aharonov and D. Bohm, “Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory,” Physical Review, vol. 115, no. 3, 1959.
- [9] Brito,Francisca Crislane Vieira.Medida da Fase de Gouy e de Efeitos de Trajetórias Não-Clássicas Via Efeito Aharonov-Bohm.Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Piauí.Teresina,2017
- [10] Viale, A. et al. “Analysis of the loss of coherence in interferometry with macromolecules (18 pages).” Physical Review A 68 (2003): 63610.
- [11] H. Yabuki. Feynman path integrals in the young double-slit experiment. International Journal of Theoretical Physics, 1986.
- [12] ] Yakir Aharonov and Aharon Casher. Topological quantum effects for neutral particles.Physical Review Letters, 53(4):319, 1984.
- [13] Oscar CO Dahlsten, Andrew JP Garner, and Vlatko Vedral. How uncertainty enables non-classical dynamics. arXiv preprint arXiv:1206.5702, 2012.