Uma breve exposição sistemática dos conceitos e resultados fundamentais da teoria da escolha racional

Pedro Henrique Carrasqueira Zanei

Resumo

Neste trabalho de conclusão de curso, expõem-se os conceitos e resultados fundamentais da teoria da escolha racional, com o objetivo de ressaltar a importância da noção de normalidade de uma função de escolha nessa teoria.

1 Introdução

Este trabalho de conclusão de curso consiste numa exposição formal e sistemática dos conceitos e resultados fundamentais da teoria da escolha racional. A teoria da escolha racional versa a respeito da racionalidade do comportamento de escolha de agentes. Formalmente, o comportamento de escolha de um agente é representado por uma *função de escolha*: uma função que designa, para conjuntos dados de *opções*, aquelas dentre as opções do conjunto que são aceitáveis para o *agente*, — isto é, aquelas dentre as quais ele escolheria uma se tivesse que fazê-lo [2], [3], [6], [8]. Nesses termos, a questão da racionalidade do comportamento de escolha de um agente traduz-se na questão das *condições* que se espera que uma função de escolha satisfaça. Essas condições podem ser separadas em dois grupos: aquelas a respeito de quão *decidido* um agente deveria ser — isto é: para que conjuntos de opções ele deveria ser capaz de aceitar alguma opção —, e aquelas a respeito de como ele deveria escolher, dado que fez certas escolhas ante certos conjuntos de opções [8].

Naturalmente ligado ao conceito de comportamento de escolha de um agente está o conceito das suas *preferências* a respeito das opções que lhe sejam apresentadas. Intuitivamente, as preferências de um agente consistem nos seus juízos a respeito de quais opções seriam *melhores que* ou *pelo menos tão boas quanto* quais opções [2], [3], [6], [8]. Sendo, dessa feita, uma *relação binária*, é de se esperar das preferências de um agente, se racionais, que satisfaçam ao menos duas condições [1], [4] [7]: que sejam *reflexivas* (isto é: que um agente sempre julgue uma opção tão boa quanto ela mesma), e que sejam *transitivas* (isto é: que, sempre que um agente julgue uma opção pelo menos tão boa quanto e talvez melhor que outra, e esta tão boa quanto e talvez melhor que uma terceira, então que ele também julgue a primeira tão boa quanto e talvez melhor que a última). A respeito das preferências também se põe a questão de quão decidido um agente deveria mostrar-se, na forma das noções de *abrangência* (isto é: se ele deveria ter preferências a respeito de *todas* as opções) e completude (isto é: se, para quaisquer duas opções, ele deveria ou julgar uma tão boa quanto e talvez melhor que a outra, ou julgar esta tão boa quanto e talvez melhor que aquela) [4].

É de se supor que um agente racional que escolha segundo suas preferências julgue aceitáveis, de um conjunto de opções, todas e somente aquelas opções que sejam pelo menos tão boas quanto todas as outras e talvez melhores [1], [4]. Se, portanto, supõe-se a racionalidade de um agente, pode-se inferir, do fato de que ele julga certa opção aceitável, que ele também a julga pelo menos tão boa quanto e talvez melhor que todas as outras dentre as que lhe são apresentadas [3], [8]. Em outros termos é dizer, enfim, que o comportamento de escolha de um agente supostamente racional *revelaria* dessa feita suas preferências.

Uma questão fundamental que se põe, pois, na teoria da escolha racional é esta: se, ao se supor racional nesse sentido um agente (isto é: no sentido de alguém que age segundo preferências), as escolhas que ele *faria*, se agisse segundo as preferências que suas escolhas revelam, coincidiriam, ou não, com essas escolhas. Essa é a questão da *normalidade* de seu comportamento de escolha [8]. Convém observar que, com a exceção de Amartya Sen, até onde sabemos poucos na literatura da escolha racional dedicaram grande atenção a essa noção de normalidade.

Com efeito, essa é a questão mais importante cuja resposta procura-se expor neste trabalho: assumindo-se num sentido a racionalidade *plena* de um agente — ou seja, que preferências reveladas por seu comportamento de escolha normal são reflexivas, transitivas, abrangentes e completas —, que condições de racionalidade esse comportamento de escolha satisfaria?

2 Preliminares

2.1 Teoria dos conjuntos

Supomos que o leitor está habituado às noções fundamentais da teoria dos conjuntos [5], que denotaremos por seus signos usuais: a noção de *pertinência* e a relação de *estar em* e sua negação ($\in$, $\notin$); a noção de *subconjunto* e a relação de *estar contido em* ($\subseteq$) e *estar contido propriamente em* ($\subset$); a noção de conjunto das partes ($\wp$); as noções de *união* ($\bigcup$, $\cup$), intersecção ($\bigcap$, $\cap$), e de *diferença* ($\setminus$) de dois conjuntos; e a noção de *conjunto vazio* ($\varnothing$). Supomos também que o leitor está habituado com a notação usual de *termo de classe* para um subconjunto de X cujos elementos satisfazem a sentença φ (isto é: a expressão $\{x \in X : \varphi(x)\}$, onde x ocorre livre em φ) e suas variantes.

Seja X um conjunto e $x_0, \ldots$ e x_{n-1} elementos seus. Denotaremos abreviadamente o fato de que $x_0 \in X, \ldots$ e $x_{n-1} \in X$ por $x_0, \ldots$ e $x_{n-1} \in X$, e de forma similar para as relações de estar contido em e estar contido propriamente em.

Supomos, ademais, que o leitor está habituado à noção de *par ordenado* de x e y ($\langle x, y \rangle$). Denotaremos o conjunto de todos os pares ordenados $\langle x, y \rangle$ tais que $x \in X$ e $y \in Y$ por $X \times Y$.

Por fim, supomos que o leitor está habituado à noção de *número ordinal* e a sua aritmética. Denotaremos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos ordinais finitos ($\{0, 1, 2, \dots\}$).

2.2 Relações e funções

Um conjunto R tal que $R \subseteq X \times Y$ para algum X e algum Y é uma *relação binária*. X e Y são, respectivamente, a *origem* e o *alvo* da relação. Quando a origem e o alvo de uma relação forem evidentes pelo contexto, omitiremos menção deles. Denotaremos o fato de que $\langle x, y\rangle \in R$ por xRy, e o fato de que $\langle x, y\rangle \notin R$ por $x \not R\, y$. Se $Y = X$, então R é uma relação *em* X.

Seja $R \subseteq X \times Y$. Denotaremos o *domínio* de R (o conjunto de todos os $x \in X$ tais que xRy para algum $y \in Y$) por $\mathsf{dom}(R)$, sua *imagem* (o conjunto de todos os $y \in Y$ tais que xRy para algum $x \in X$) por $\mathsf{imag}(R)$, e o seu *campo* (o conjunto $\mathsf{dom}(R) \cup \mathsf{imag}(R)$) por $\mathsf{camp}(R)$. Se $\mathsf{dom}(R) = X$, R é *total* em X (e, novamente, omitiremos menção do conjunto X se este for evidente pelo contexto).

A *restrição* de uma relação $R \subseteq X \times Y$ a um conjunto Z é o conjunto $\{\langle x, y\rangle \in R : x \in Z\rangle\}$. Denotaremos a restrição de R a Z por $R \restriction Z$.

Uma relação R em X é *reflexiva* se, para todo $x \in \mathsf{camp}(R)$, xRx; é *irreflexiva* se, para todo $x \in \mathsf{camp}(R)$, $x \not R\, x$; é *simétrica* se, para todos $x, x' \in \mathsf{camp}(R)$, se xRx', então $x'Rx$; é *assimétrica* se, para todos $x, x' \in \mathsf{camp}(R)$, se xRx', então $x' \not R\, x$. Note-se que uma relação assimétrica é irreflexiva. Uma relação R em X é *transitiva* se, para todos $x, x', x'' \in \mathsf{camp}(R)$, se xRx' e $x'Rx''$, então xRx''. Uma relação simétrica e transitiva (e, portanto, reflexiva) é uma relação de *equivalência*. Uma relação R em X é *completa* se, para todos $x, x' \in \mathsf{camp}(R)$, ou xRx' ou $x'Rx$. Note-se que uma relação completa é reflexiva. Por fim, uma relação é *abrangente* se $\mathsf{camp}(R) = X$. Uma relação R em X abrangente, completa e transitiva é uma *ordenação* de X, e X é então *ordenado* por R.

Se uma relação binária $f \subseteq X \times Y$ é tal que, para todos $x \in X$ e todos $y, y' \in Y$, se xfy e xfy' então $y = y'$, dizemos que f é *funcional*, ou simplesmente que é uma *função*. Quando f for uma função, denotaremos o fato de que xfy por $f(x) = y$, e diremos que f *de* x é y. Também denotaremos o fato de que $f \subseteq X \times Y$ por

$f : X \longmapsto Y$, e diremos que f é uma função *de* X *em* Y.

Neste trabalho, assumimos que todas as funções são *totais*.

3 Teoria da escolha racional

Definição 3.1. Seja O um conjunto finito de opções. Uma *função de escolha* para O é uma função $\mathcal{E} : \wp(O) \longmapsto \wp(O)$ tal que, para todo $X \subseteq O$, $\mathcal{E}(X) \subseteq X$.

Seja O um conjunto finito e $\mathcal{E}$ uma função de escolha para O.

Condição 1 (Indiferença)**.** Para todo $X \subseteq O$, se existe $x \in O$ tal que $X = \{x\}$, então $\mathcal{E}(X) \neq \varnothing$.

Condição 2 (Decisão duas a duas)**.** Para todo $X \subseteq O$, se existem x e $y \in O$ tais que $X = \{x, y\}$, então $\mathcal{E}(X) \neq \varnothing$.

Condição 3 (Determinação)**.** Para todo $X \subseteq O$, se $X \neq \varnothing$, então $\mathcal{E}(X) \neq \varnothing$.

Condição 4 (Estabilidade)**.** Para todo $X \subseteq O$, $\mathcal{E}(\mathcal{E}(X)) = \mathcal{E}(X)$.

Condição 5 (Contração positiva)**.** Para todos X e $Y \subseteq O$ tais que $X \subseteq Y$ e todo $x \in O$ tal que $x \in X$, se $x \in \mathcal{E}(Y)$, então $x \in \mathcal{E}(X)$.

Condição 6 (Contração negativa)**.** Para todos X e $Y \subseteq O$ tais que $X \subseteq Y$ e $X \cap \mathcal{E}(Y) \neq \varnothing$ e todo $x \in O$, se $x \notin \mathcal{E}(Y)$, então $x \notin \mathcal{E}(X)$.

Condição 7 (Constrição)**.** Para todos X e $Y \subseteq O$, se $\mathcal{E}(X \cup Y) \neq \varnothing$, então ou $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(X)$, ou $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(Y)$ ou $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(X) \cup \mathcal{E}(Y)$.

Condição 8 (Anulação)**.** Para todos X e $Y \subseteq O$, se $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(Y) = \varnothing$, então $\mathcal{E}(X \cup Y) = \varnothing$.

Condição 9 (Decomposição)**.** Para todo $X \subseteq O$ tal que existe $Y \subset X$ tal que $Y \neq \varnothing$ e para todo $x \in O$, se $x \in \mathcal{E}(X)$, então, para algum $Z \subset X$, $x \in \mathcal{E}(Z)$.

Condição 10 (Expansão positiva)**.** Para todos X e $Y \subseteq O$ e todo $x \in O$, se $x \in \mathcal{E}(X) \cap \mathcal{E}(Y)$, então $x \in \mathcal{E}(X \cup Y)$.

Condição 11 (Expansão positiva finita)**.** Para todos $X_0, \dots$ e $X_{n-1} \subseteq O$ e todo $x \in O$, se $x \in \bigcap\{\mathcal{E}(X_0), \dots, \mathcal{E}(X_{n-1})\}$, então $x \in \mathcal{E}(\bigcup\{X_0, \dots, X_{n-1}\})$.

Condição 12 (Expansão negativa)**.** Para todos X e $Y \subseteq O$ e todo $x \in O$, se $x \notin \mathcal{E}(X) \cup \mathcal{E}(Y)$, então $x \notin \mathcal{E}(X \cup Y)$.

Condição 13 (Expansão negativa finita)**.** Para todos $X_0, \dots$ e $X_{n-1} \subseteq O$ e todo $x \in O$, se $x \notin \bigcup\{\mathcal{E}(X_0), \dots, \mathcal{E}(X_{n-1})\}$, então $x \notin \mathcal{E}(\bigcup\{X_0, \dots, X_{n-1}\})$.

Condição 14 (Coerência)**.** Para todos X e $Y \subseteq O$ e todos x e $y \in O$ tais que x e $y \in X \cap Y$, se $x \in \mathcal{E}(X)$, então, se $y \in \mathcal{E}(Y)$, também $x \in \mathcal{E}(Y)$.

Condição 15 (Soma)**.** Para todos X e $Y \subseteq O$, ou $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(X)$, ou $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(Y)$ ou $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(X) \cup \mathcal{E}(Y)$.

Destas tantas condições, três são classicamente conhecidas da literatura: a condição de contração positiva, a condição de coerência e a condição de expansão positiva, — respectivamente, as condições α, β e γ de Chernoff ([3]; [8]). As três primeiras condições — a condição de indiferença, a condição de decisão duas a duas e a condição de determinação —, como se observou já na introdução, definem quão decidido um agente deveria ser.

O que fazemos, nesta seção, e explorar como essas condições relacionam-se entre si e com outras que intuitivamente poder-se-iam desejar. Como se verá a partir das proposições a seguir demonstradas, elas todas formam um sistema bastante bem integrado, de modo que nossas intuições a respeito da racionalidade de escolhas, ao que parece, de fato se justificam mutuamente.

Proposição 3.1. *Se uma função de escolha satisfaz a condição de determinação, então satisfaz a condição de decisão duas a duas; e, se satisfaz esta, então satisfaz a condição de indiferença.*

Demonstração. Trivial. □

Proposição 3.2. *Se uma função de escolha satisfaz a condição de contração positiva, então satisfaz a condição de estabilidade.*

Demonstração. Seja $X \subseteq O$. Por definição, $\mathcal{E}(X) \subseteq X$, e desse fato, pela condição de contração positiva, segue imediatamente que, se $x \in \mathcal{E}(X)$, então $x \in \mathcal{E}(\mathcal{E}(X))$. □

Proposição 3.3. *Se uma função de escolha satisfaz a condição de contração positiva, então satisfaz a condição de expansão negativa.*

Demonstração. Suponha o antecedente, sejam X e Y e x tais que $x \notin \mathcal{E}(X) \cup \mathcal{E}(Y)$, e suponha, por absurdo, que $x \in \mathcal{E}(X \cup Y)$. Porque $x \in \mathcal{E}(X \cup Y)$, por definição $x \in X \cup Y$ e, portanto, também por definição, ou $x \in X$ ou $x \in Y$. Suponha, sem perda de generalidade, que $x \in X$. Ora, porque por definições $X \subseteq X \cup Y$ e por suposição $x \in \mathcal{E}(X \cup Y)$, pela condição de contração positiva segue desses fatos que $x \in \mathcal{E}(X)$ — mas isto contradiz a suposição de que $x \notin \mathcal{E}(X) \cup \mathcal{E}(Y)$ (ou, mais precisamente, o fato de que, por definição, assim sendo em particular $x \notin \mathcal{E}(X)$). □

Proposição 3.4. *Se uma função de escolha satisfaz as condições de contração positiva e negativa, então satisfaz a condição de constrição.*

Demonstração. Suponha o antecedente, sejam X e Y quaisquer, e suponha que $\mathcal{E}(X \cup Y) \neq \varnothing$. Há três possibilidades: ou, para todo $x \in \mathcal{E}(X \cup Y)$, $x \in X$ somente; ou, para todo $x \in \mathcal{E}(X \cup Y)$; $x \in Y$ somente; ou, então, para alguns $x \in \mathcal{E}(X \cup Y)$, $x \in X$ e, para alguns $x \in \mathcal{E}(X \cup Y)$, $x \in Y$. No primeiro caso, segue trivialmente pelas condições de contração positiva e negativa que $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(X)$; e similarmente que $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(Y)$ no segundo caso. No terceiro caso, segue das condições de contração positiva e negativa que $\mathcal{E}(X) = X \cap \mathcal{E}(X \cup Y)$, e similarmente que $\mathcal{E}(Y) = Y \cap \mathcal{E}(X \cup Y)$, — e, portanto (porque por definições $(X \cap \mathcal{E}(X \cup Y)) \cup (Y \cap \mathcal{E}(X \cup Y)) = \mathcal{E}(X \cup Y)$), que $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(X) \cup \mathcal{E}(Y)$. □

Proposição 3.5. *Se uma função de escolha satisfaz a condição de constrição, então satisfaz a condição de contração positiva.*

Demonstração. Suponha o antecedente, e sejam X e Y e x tais que $X \subseteq Y$, $x \in X$ e $x \in \mathcal{E}(Y)$. Ora, por definições, $Y = X \cup (Y \setminus X)$, — e, portanto, pela condição de constrição, porque por suposição $\mathcal{E}(Y) \neq \varnothing$, ou $\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X)$, ou $\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(Y \setminus X)$ ou $\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X) \cup \mathcal{E}(Y \setminus X)$. A segunda possibilidade está excluída pelos fatos de que por suposição $x \in X$ e de que, por definições, $X \cap (Y \setminus X) = \varnothing$. Em qualquer das duas outras possibilidades, segue trivialmente que $x \in \mathcal{E}(X)$. □

Proposição 3.6. *Se uma função de escolha satisfaz a condição de constrição, então satisfaz a condição de contração negativa.*

Demonstração. Suponha o antecedente, e sejam X e Y tais que $X \subseteq Y$ e $X \cap \mathcal{E}(Y) \neq \varnothing$. Ora, por definições, $Y = X \cup (Y \setminus X)$, — e, pela condição de constrição, porque por suposição $X \cap \mathcal{E}(Y) \neq \varnothing$ (e, portanto, também $\mathcal{E}(Y) \neq \varnothing$), ou $\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X)$, ou $\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(Y \setminus X)$ ou $\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X) \cup \mathcal{E}(Y \setminus X)$. A segunda possibilidade está excluída pelos fatos de que por suposição existe $x \in X$ tal que $x \in \mathcal{E}(Y)$ e de que, por definições, $X \cap (Y \setminus X) = \varnothing$. Em qualquer das duas outras possibilidades, segue trivialmente que se $x \notin \mathcal{E}(Y)$, então $x \notin \mathcal{E}(X)$. □

Proposição 3.7. *Se uma função de escolha satisfaz as condições de determinação e de constrição, então satisfaz a condição de expansão positiva.*

Demonstração. Suponha o antecedente, e seja x tal que, para alguns X e Y, $x \in \mathcal{E}(X) \cap \mathcal{E}(Y)$. Então, em particular, $x \in \mathcal{E}(X)$ e $x \in \mathcal{E}(Y)$. Ora, pela condição de determinação $\mathcal{E}(X \cup Y) \neq \varnothing$, e, portanto, pela condição de constrição, ou $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(X)$, ou $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(Y)$ ou $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(X) \cup \mathcal{E}(Y)$. Em qualquer dos casos, $x \in \mathcal{E}(X \cup Y)$. □

Proposição 3.8. *Se uma função de escolha satisfaz as condições de determinação e de constrição (e, portanto, as condições de contração positiva e negativa), então satisfaz a condição de coerência.*

Demonstração. Suponha o antecedente, e sejam X eY e x e y tais que x e $y \in X \cap Y$, $x \in \mathcal{E}(X)$ e $y \in \mathcal{E}(Y)$. Porque $x \in \mathcal{E}(X)$ e porque a possibilidade de que $\mathcal{E}(X \cup Y) = \varnothing$ é excluída pela condição de determinação, pela condição de constrição ou $x \in \mathcal{E}(X \cup Y)$ (caso $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(X)$, ou caso $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(X) \cup \mathcal{E}(Y)$) — e, portanto, porque por suposição em particular $x \in Y$ e porque por definição $Y \subseteq X \cup Y$, pela condição de contração positiva $x \in \mathcal{E}(Y)$ —; ou, então, $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(Y)$: mas, nesse caso, porque em particular $y \in X$ — e, portanto, $X \cap \mathcal{E}(Y) \neq \varnothing$ —, porque por definição $X \subseteq X \cup Y$, e, ademais, porque por suposição $x \in \mathcal{E}(X)$, segue pela condição de contração negativa (lida contrapositivamente) que $x \in \mathcal{E}(Y)$. □

Proposição 3.9. *Se uma função satisfaz as condições de determinação e de constrição, então satisfaz a condição de soma.*

Demonstração. Trivial. □

Proposição 3.10. *Uma função de escolha satisfaz a condição de expansão positiva se e somente se satisfaz a condição de expansão positiva finita.*

Demonstração. A condição de expansão positiva finita segue trivialmente da condição de expansão positiva. Já a condição de expansão positiva finita segue da condição de expansão positiva por simples indução. □

Proposição 3.11. *Se uma função de escolha satisfaz a condição de expansão negativa, então satisfaz a condição de anulação.*

Demonstração. Suponha o antecedente, sejam X e Y tais que $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(Y) = \varnothing$, e suponha, por absurdo, que $\mathcal{E}(X \cup Y) \neq \varnothing$. Então, existe x tal que $x \in \mathcal{E}(X \cup Y)$. Ora mas, então, pela condição de expansão negativa (lida contrapositivamente), $x \in \mathcal{E}(X) \cup \mathcal{E}(Y)$, e, portanto, por definição, ou $x \in \mathcal{E}(X)$ ou $x \in \mathcal{E}(Y)$, — o que contradiz a suposição de que $\mathcal{E}(X) = \mathcal{E}(Y) = \varnothing$. □

Proposição 3.12. *Se uma função de escolha satisfaz a condição de expansão negativa, então satisfaz a condição de decomposição.*

Demonstração. Suponha o antecedente, seja $X \subseteq O$ tal que X tem ao menos um subconjunto próprio, e seja x tal que $x \in \mathcal{E}(X)$. Então consequente segue trivialmente da condição de expansão negativa e do fato de que $X = \{x\} \cup X \setminus \{x\}$. $\square$

Proposição 3.13. *Uma função de escolha satisfaz a condição de expansão negativa se e somente se satisfaz a condição de expansão negativa finita.*

Demonstração. Semelhante à proposição anterior, a condição de expansão negativa finita segue trivialmente da condição de expansão negativa, enquanto a condição de expansão finita segue da condição de expansão positiva por simples indução. $\square$

Proposição 3.14. *Se uma função de escolha satisfaz as condições de determinação e de coerência, então satisfaz a condição de contração positiva.*

Demonstração. Suponha o antecedente, e sejam X e Y e x tais que $X \subseteq Y$, $x \in X$ e $x \in \mathcal{E}(Y)$. Pela condição de determinação, $\mathcal{E}(X) \neq \varnothing$; portanto, existe y tal que $y \in \mathcal{E}(X)$. Porque $y \in \mathcal{E}(X)$, por definição $y \in X$; ademais, porque $X \subseteq Y$, $X \cap Y = X$, e, por suposições, $x \in X$ e $x \in \mathcal{E}(Y)$ (e, portanto, x e $y \in X \cap Y$). Desses fatos segue imediatamente, pela condição de coerência, que $x \in \mathcal{E}(X)$. $\square$

Proposição 3.15. *Se uma função de escolha satisfaz as condições de determinação e de coerência, então satisfaz a condição de expansão positiva.*

Demonstração. Suponha o antecedente, e sejam X e Y e x tais que $x \in \mathcal{E}(X) \cap \mathcal{E}(Y)$. Pela condição de determinação existe algum y tal que $y \in \mathcal{E}(X \cup Y)$. Ora, por definições, $y \in X \cup Y$ e, portanto, $y \in X$ ou $y \in Y$. Suponha, sem perda de generalidade, que $y \in X$. Também por definições, se $x \in \mathcal{E}(X) \cap \mathcal{E}(Y)$, então em particular $x \in \mathcal{E}(X)$, e, portanto, $x \in X$; ademais, $X \cap (X \cup Y) = X$, e, portanto, x e $y \in X \cap (X \cup Y)$. Disso e dos fatos de que $x \in \mathcal{E}(X)$ e $y \in \mathcal{E}(X \cup Y)$ segue imediatamente, pela condição de coerência, que $x \in \mathcal{E}(X \cup Y)$. $\square$

Proposição 3.16. *Se uma função de escolha satisfaz as condições de contração positiva e de coerência, então satisfaz a condição de contração negativa.*

Demonstração. Suponha o antecedente, e sejam X e Y e x tais que $X \subseteq Y$, $X \cap \mathcal{E}(Y) \neq \varnothing$, $x \in X$ e $x \notin \mathcal{E}(Y)$. Porque $X \cap \mathcal{E}(Y) \neq \varnothing$, existe y tal que $y \in X$ e $y \in \mathcal{E}(Y)$, — e, assim sendo, pela condição de contração positiva, $y \in \mathcal{E}(X)$. Suponha pois, por absurdo, que $x \in \mathcal{E}(X)$. Porque $X \subseteq Y$, $X \cap Y = X$, e, portanto, x e $y \in X \cap Y$. Ora, desses fatos segue imediatamente, pela condição de coerência, que $x \in \mathcal{E}(Y)$, — o que contradiz a suposição de que $x \notin \mathcal{E}(Y)$. Portanto, $x \notin \mathcal{E}(X)$. □

Proposição 3.17. *Se uma função de escolha satisfaz a condição de soma, então satisfaz a condição de constrição.*

Demonstração. Trivial. □

Proposição 3.18. *Se uma função de escolha satisfaz a condição de soma, então satisfaz a condição de expansão positiva.*

Demonstração. Suponha o antecedente, e sejam X e Y e x tais que $x \in \mathcal{E}(X) \cap \mathcal{E}(Y)$. Então, em particular, $x \in \mathcal{E}(X)$ e $x \in \mathcal{E}(Y)$. Ora, pela condição de soma, ou $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(X)$, ou $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(Y)$ ou $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(X) \cup \mathcal{E}(Y)$. Em qualquer dos casos, $x \in \mathcal{E}(X \cup Y)$. □

Proposição 3.19. *Se uma função de escolha satisfaz a condição de soma (e, portanto, as condições de contração positiva e negativa), então satisfaz a condição de coerência.*

Demonstração. Suponha o antecedente, e sejam X e Y e x e y tais que x e $y \in X \cap Y$, $x \in \mathcal{E}(X)$ e $y \in \mathcal{E}(Y)$. Porque por suposição $\mathcal{E}$ satisfaz a condição de soma, ou $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(X)$, ou $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(Y)$ ou $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(X) \cup \mathcal{E}(Y)$. Em qualquer dos casos, porque $\mathcal{E}(X) \neq \varnothing$ e $\mathcal{E}(Y) \neq \varnothing$, também $\mathcal{E}(X \cup Y) \neq \varnothing$. Assim sendo, ou $x \in \mathcal{E}(X \cup Y)$ (caso $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(X)$, ou caso $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(X) \cup \mathcal{E}(Y)$) — e, portanto, porque por suposição em particular $x \in Y$ e porque por definição $Y \subseteq X \cup Y$, pela condição de contração positiva $x \in \mathcal{E}(Y)$ —; ou, então, $\mathcal{E}(X \cup Y) = \mathcal{E}(Y)$: mas, nesse caso, porque em particular $y \in X$ — e, portanto, $X \cap \mathcal{E}(Y) \neq \varnothing$ —, porque por definição $X \subseteq X \cup Y$, e, ademais, porque por suposição $x \in \mathcal{E}(X)$, segue pela condição de contração negativa (lida contrapositivamente) que $x \in \mathcal{E}(Y)$. □

Proposição 3.20. *Se uma função de escolha satisfaz as condições de indiferença e de soma, então satisfaz a condição de determinação.*

Demonstração. Segue por simples indução no número de elementos de $X \cup Y$. □

Proposição 3.21. *Uma função de escolha satisfaz as condições de indiferença e de soma se e somente se satisfaz as condições de determinação e de coerência.*

Demonstração. Suponha, primeiro, que $\mathcal{E}$ satisfaz as condições de indiferença e de soma. Então segue imediatamente de proposições anteriores que ela satisfaz as condições de determinação e de coerência.

Suponha, agora, que $\mathcal{E}$ satisfaz as condições de determinação e de coerência. Então segue de proposições anteriores que, além da condição de indiferença, ela satisfaz a condição de contração positiva — portanto, também a negativa —, e, consequentemente, a condição de soma. □

4 Teoria das preferências reveladas

Definição 4.1 (Preferências reveladas)**.** As preferências *reveladas* pela função de escolha $\mathcal{E}$ para O são a relação $R_{\mathcal{E}} = \{\langle x, y\rangle \in O \times O : \text{ para algum } X \subseteq O,\ x \in \mathcal{E}(X) \text{ e } y \in X\}$.

Definição 4.2 (Preferências duas a duas reveladas)**.** As preferências *duas a duas reveladas* pela função de escolha $\mathcal{E}$ para O são a relação $R^2_{\mathcal{E}} = \{\langle x, y\rangle \in O \times O : x \in \mathcal{E}(\{x, y\})$.

A necessidade da distinção de preferências simplesmente reveladas e duas a duas reveladas justifica-se pelo fato de que preferências, sendo relações binárias, deveriam poder, em princípio ao menos, ser observadas prioritariamente nas escolhas de um agente a respeito de pares de alternativas. Esta intuição leva-nos ao conceito de *binaridade* de funções de escolha [8].

Definição 4.3 (Binaridade)**.** Uma função de escolha $\mathcal{E}$ para O é *binária* se $R_{\mathcal{E}} = R^2_{\mathcal{E}}$.

Por fim, põe-se a questão, já apresentada na introdução deste trabalho, da normalidade das funções de escolha [8].

Definição 4.4 (Função de escolha gerada por preferências)**.** A função de escolha para O *gerada* pelas preferências R a respeito das opções O são a função $\mathcal{E}_R$ tal que, para todo $X \subseteq O$, $\mathcal{E}(X) = \{x \in X : \text{para todo } y \in X, xRy\}$. (Note-se que $\mathcal{E}_R$ de fato satisfaz a definição de função de escolha.)

Definição 4.5 (Normalidade)**.** Uma função de escolha $\mathcal{E}$ para O é *normal* se $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{R_{\mathcal{E}}}$.

Proposição 4.1. *Se uma função de escolha satisfaz a condição de indiferença, então as preferências reveladas por ela, sejam elas reveladas ou reveladas duas a duas, são totais e reflexivas; e, se satisfaz a condição de decisão duas a duas, são completas.*

Demonstração. Trivial. □

Proposição 4.2. *Se uma função de escolha satisfaz a condição de contração positiva, então ela é binária.*

Demonstração. Suponha-se o antecedente, e sejam x e y quaisquer.

Suponha-se, primeiro, que $xR_{\mathcal{E}}y$. Então, por definição, existe X tal que x e $y \in X$ e $x \in \mathcal{E}(X)$. Ora, desse fato, porque $\{x, y\} \subseteq X$, e da condição de contração positiva segue-se imediatamente que $x \in \mathcal{E}(\{x, y\})$ e, portanto, por definição, que $xR^2_{\mathcal{E}}y$.

Supondo-se que $xR^2_{\mathcal{E}}y$, segue-se trivialmente das definições que $xR_{\mathcal{E}}y$. □

Proposição 4.3. *Se uma função de escolha satisfaz as condições de determinação e de contração negativa e é binária, então as preferências reveladas por ela são transitivas.*

Demonstração. Suponha-se o antecedente, e sejam x, y e z tais que $xR_{\mathcal{E}}y$ e $yR_{\mathcal{E}}z$. Porque por suposição $\mathcal{E}$ é binária, por definições segue-se que $x \in \mathcal{E}(\{x,y\})$ e $y \in \mathcal{E}(\{y,z\})$.

Considere-se, pois, $\mathcal{E}(\{x,y,z\})$. Se $x \in \mathcal{E}(\{x,y,z\})$, a proposição segue-se imediatamente por definição. Suponha-se, pois, por absurdo, que $x \notin \mathcal{E}(\{x,y,z\})$. Dessa feita, há quatro possibilidades: ou $\mathcal{E}(\{x,y,z\}) = \varnothing$; ou $\mathcal{E}(\{x,y,z\}) = \{y\}$; ou $\mathcal{E}(\{x,y,z\}) = \{y,z\}$, ou $\mathcal{E}(\{x,y,z\}) = \{z\}$.

A primeira possibilidade violaria a condição de determinação. Porque $x \in \mathcal{E}(\{x,y\})$ e $\{x,y\} \subseteq \{x,y,z\}$, nos casos da segunda e da terceiras possibilidades, porque $\{x,y\} \cap \mathcal{E}(\{x,y,z\}) \neq \varnothing$, a condição de contração negativa seria violada; e, porque $y \in \mathcal{E}(\{y,z\})$ e $\{y,z\} \subseteq \{x,y,z\}$, no caso da quarta possibilidade, porque $\{y,z\} \cap \mathcal{E}(\{x,y,z\}) \neq \varnothing$, a condição de contração negativa também seria violada. □

Proposição 4.4. *Se uma função de escolha satisfaz a condição de expansão positiva e é binária, então ela é normal.*

Demonstração. Suponha-se o antecedente e suponha-se, por absurdo, que $\mathcal{E}$ não é normal. Então, existe X tal que $\mathcal{E}(X) \neq \mathcal{E}_{R_{\mathcal{E}}}(X)$. Portanto, ou existe x tal que ou $x \in \mathcal{E}(X)$ mas $x \notin \mathcal{E}_{R_{\mathcal{E}}}(X)$, ou $x \notin \mathcal{E}(X)$ mas $x \in \mathcal{E}_{R_{\mathcal{E}}}(X)$. A primeira possibilidade está patentemente excluída por definições. No segundo caso, porque $x \in \mathcal{E}_{R_{\mathcal{E}}}(X)$, por definição $xR_{\mathcal{E}}y$ para todo $y \in X$, e, portanto, também por definição, porque por suposição $\mathcal{E}$ é binária, para todo $y \in X$, $x \in \mathcal{E}(\{x,y\})$. Sejam, pois, $x_0, \ldots, x_{n-1}$ os elementos de X. Porque por definição $X = \bigcup\{x, x_i\}_{i \in n}$, e porque por suposição $\mathcal{E}$ satisfaz a condição de expansão positiva (e, portanto, como já se demonstrou, também a condição de expansão positiva finita), segue-se que $x \in \mathcal{E}(X)$. □

Proposição 4.5. *Se uma função de escolha é normal, então, se as preferências reveladas por ela são totais e completas, então satisfaz a condição de comparação duas a duas; e, se são uma ordenação, então ela satisfaz a condição de determinação.*

Demonstração. Segue trivialmente das definições. $\square$

Proposição 4.6. *Se uma função de escolha é normal, então ela é binária.*

Demonstração. Suponha-se o antecedente e suponha-se, por absurdo, que $\mathcal{E}$ não é binária. Então, existem x e y tais que ou $xR_{\mathcal{E}}y$ mas $x \not R^2_{\mathcal{E}}\, y$, ou $x \not R_{\mathcal{E}}\, y$ mas $xR^2_{\mathcal{E}}y$. O segundo caso é impossível por definições. No primeiro caso, por definições existe X tal que $y \in X$ e $x \in \mathcal{E}(X)$ (o que, a propósito, implica que $xR_{\mathcal{E}}x$) mas $x \notin \mathcal{E}(\{x, y\})$. Porque, porém, $xR_{\mathcal{E}}x$ e $xR_{\mathcal{E}}y$, por definição $x \in \mathcal{E}_{R_{\mathcal{E}}}(\{x, y\})$ — o que contradiz a suposição de que $\mathcal{E}$ é normal. $\square$

Proposição 4.7. *Se uma função de escolha é normal, então ela satisfaz a condição de contração positiva.*

Demonstração. Suponha-se o antecedente. Sejam X e Y e x tais que $X \subseteq Y$, $x \in X$ e $x \in \mathcal{E}(Y)$. Por definição, portanto, $xR_{\mathcal{E}}y$ para todo $y \in Y$, e assim também para todo $y \in X$. Disso se segue, por definição, que $x \in \mathcal{E}_{R_{\mathcal{E}}}(X)$ — e, portanto (porque por suposição $\mathcal{E}$ é normal), que $x \in \mathcal{E}(X)$. $\square$

Proposição 4.8. *Se uma função de escolha é normal, então ela satisfaz a condição de expansão positiva.*

Demonstração. Suponha-se o antecedente. Sejam X e Y e x tais que $x \in \mathcal{E}(X) \cap \mathcal{E}(Y)$. Por definições, portanto, $xR_{\mathcal{E}}y$ para todo $y \in X$ e para todo $y \in Y$, e assim também para todo $y \in X \cup Y$. Disso se segue, por definição, que $x \in \mathcal{E}_{R_{\mathcal{E}}}(X \cup Y)$ — e, portanto (porque por suposição $\mathcal{E}$ é normal), que $x \in \mathcal{E}(X \cup Y)$. $\square$

Proposição 4.9. *Se uma função de escolha é normal e as preferências reveladas por ela são totais e reflexivas, então ela satisfaz a condição de indiferença; e, se além disso são completas e transitivas, então satisfaz a condição de determinação.*

Demonstração. Segue trivialmente das definições. □

Proposição 4.10. *Se uma função de escolha é normal e as preferências reveladas por ela são transitivas, então ela satisfaz a condição de contração negativa.*

Demonstração. Suponha-se o antecedente. Sejam X e Y e x tais que $X \subseteq Y$, $X \cap \mathcal{E}(Y) \neq \varnothing$ e $x \in \mathcal{E}(X)$. Por definição, portanto, $xR_{\mathcal{E}}y$ para todo $y \in X$, e, em especial para todo $y \in X \cap \mathcal{E}(Y)$. Ora, por definições, se $y \in X \cap \mathcal{E}(Y)$, em particular $y \in \mathcal{E}(Y)$ e, portanto, para todo $z \in Y$, $yR_{\mathcal{E}}z$. Sejam, pois, y e z quaisquer tais que $y \in \mathcal{E}(Y)$ e $z \in Y$. Desses fatos, das definições e da suposição de que $R_{\mathcal{E}}$ é transitiva segue-se trivialmente que, para todo $z \in Y$, $xR_{\mathcal{E}}z$, — e, portanto, por definição, que $x \in \mathcal{E}_{R_{\mathcal{E}}}(Y)$. Assim sendo, porque por suposição $\mathcal{E}$ é normal, $x \in \mathcal{E}(Y)$. □

Proposição 4.11. *Se uma função de escolha é normal e as preferências reveladas por ela são transitivas, então ela satisfaz a condição de coerência.*

Demonstração. Suponha o antecedente, e sejam X e Y e x e y tais que x e $y \in X \cap Y$, $x \in \mathcal{E}(X)$ e $y \in \mathcal{E}(Y)$. Por definições, portanto, $xR_{\mathcal{E}}z$ para todo $z \in X$ (y incluso) e $yR_{\mathcal{E}}z$ para todo $z \in Y$. Porque $xR_{\mathcal{E}}y$, $yR_{\mathcal{E}}z$ para todo $z \in Y$ e $R_{\mathcal{E}}$ é por suposição transitiva, segue-se trivialmente que $xR_{\mathcal{E}}z$ para todo $z \in Y$. Disso se segue, por defini, por definição, que $x \in \mathcal{E}_{R_{\mathcal{E}}}(Y)$ — e, portanto (porque por suposição $\mathcal{E}$ é normal), que $x \in \mathcal{E}(Y)$. □

Proposição 4.12. *Uma função de escolha satisfaz as condições de indiferença e de soma se e somente se é normal e as preferências reveladas por ela são uma ordenação.*

Demonstração. Suponha o antecedente.

Suponha, primeiro, que $\mathcal{E}$ satisfaz as condições de indiferença e de soma. Então segue de proposições anteriores que ela satisfaz a condição de determinação — e que, portanto, as preferências reveladas por ela são totais e completas — , e ademais que é normal (portanto, binária) e satisfaz a condição de contração negativa — e que, portanto, as preferências reveladas por ela são transitivas.

Suponha, agora, que $\mathcal{E}$ é normal e que as preferências reveladas por ela são uma ordenação. Então segue de proposições anteriores que $\mathcal{E}$ satisfaz a condição de determinação — e, portanto, também a condição de indiferença —, e ademais, que satisfaz as condições de contração positiva e negativa — e, portanto, também a de soma. □

Proposição 4.13. *Uma função de escolha satisfaz as condições de determinação e de coerência se e somente se é normal e as preferências reveladas por ela são uma ordenação.*

Demonstração. Segue trivialmente de proposições anteriores. □

Proposição 4.14. *As preferências reveladas por uma função de escolha podem ser uma ordenação e ela não satisfazer a condição de expansão positiva nem ser binária.*

Demonstração. Eis um exemplo. Seja $O = \{a, b, c\}$ e seja $\mathcal{E}$ tal que satisfaz a condição de indiferença e tal que $\mathcal{E}(\{a, b\}) = \{a, b\}$, $\mathcal{E}(\{b, c\}) = \{b\}$, $\mathcal{E}(\{a, c\}) = \varnothing$ e $\mathcal{E}(\{a, b, c\}) = \{a\}$.

Porque $\mathcal{E}$ satisfaz a condição de indiferença, $xR_{\mathcal{E}}x$ para todo $x \in O$. A abrangência e completude de $R_{\mathcal{E}}$ são patentes. Ademais, porque $a \in \mathcal{E}(\{a, b\})$, $b \in \mathcal{E}(\{b, c\})$ e $a \in \mathcal{E}(\{a, b, c\})$, $aR_{\mathcal{E}}b$, $bR_{\mathcal{E}}c$ e $aR_{\mathcal{E}}c$, $R_{\mathcal{E}}$ é transitiva. No entanto, porque $b \in \mathcal{E}(\{a, b\})$ e $b \in \mathcal{E}(\{b, c\})$ mas $b \notin \mathcal{E}(\{a, b, c\})$, $\mathcal{E}$ não satisfaz a condição de expansão positiva; e, patentemente, $R_{\mathcal{E}} \neq R^2_{\mathcal{E}}$. □

5 Conclusão

Como se mostrou, embora a normalidade de uma função de escolha e o fato de as preferências por ela reveladas serem uma ordenação seja equivalente a essa função de escolha satisfazer todas as condições de racionalidade apresentadas na seção três, por si só o fato de as preferências por ela reveladas serem uma ordenação não implica sequer que ela satisfaria uma condição tão fraca quanto a binaridade, nem tampouco uma condição mais forte, como a condição de expansão positiva. Isso mostra, a nosso ver, que a normalidade da função de escolha é uma condição *robusta* de racionalidade do comportamento de escolha de agentes, que, portanto, mereceria ser estudada e discutida de modo mais aprofundado e pormenorizado do que nos parece ter sido até hoje na literatura da teoria da escolha racional.

Referências

[1] BINMORE, K. *Rational decisions*. Princeton: Princeton University, 2009.

[2] BOSSERT, W.; SUZUMURA, K. *Consistency, choice, and rationality*. Cambridge: Harvard University, 2010.

[3] CHERNOFF, H.; MOSES, L. E. *Elementary decision theory*. Mineola: Dover, 1986.

[4] GINTIS, H. *Game theory evolving*. Princeton: Princeton University, 2009.

[5] JECH, T. *Set theory*. Berlim: Springer, 2003.

[6] PARMIGIANI, G.; INOUE, L. *Decision theory*. Chichester: Willey & Sons, 2009.

[7] ROSSI, F; VENABLE, K. B.; WALSH, B. *A short introduction to preferences*. s/l: Morgan & Claypool, 2011.

[8] SEN, A. *Rationality and freedom*. Cambridge: Harvard University, 2002.