

## Descontinuidade nos potenciais de Liénard-Wiechert e novas leis de conservação

P. H. O. da Silva<sup>1</sup> and V. Perchine<sup>2</sup>

<sup>1)</sup> *Centro de Ciências Naturais e Humanas, Universidade Federal do ABC, Santo André, São Paulo, Brasil*

<sup>2)</sup> *Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC, Santo André, São Paulo, Brasil*

(Dated: 11 de novembro de 2018)

No eletromagnetismo clássico, os potenciais de Liénard-Wiechert fornecem uma maneira de calcular o campo elétrico de uma carga ou um conjunto de cargas movendo-se com uma velocidade arbitrária. Entretanto, o campo elétrico obtido possui uma descontinuidade em  $r = \infty$  no espaço de Minkowski. Com a introdução dos diagramas de Penrose como maneira de definir a estrutura do infinito e o uso da notação de formas diferenciais será discutida a recente descoberta de que, apesar da descontinuidade, ainda existe uma condição de junção que implica em uma conservação de cargas e em um número infinito de leis de conservação.

### I. INTRODUÇÃO

Os potenciais de Liénard-Wiechert foram descritos independentemente por Alfred-Marie Liénard e Emil Wiechert no final do século 19. De forma geral, são os potenciais escalar e vetor que descrevem os efeitos de uma partícula pontual e com carga em movimento, que, por conta disto, possuem uma dependência temporal. A partir desses potenciais é possível calcular os campos elétrico e magnético gerados pela carga.

O campo elétrico por eles gerado possui uma descontinuidade próximo ao infinito, um fato já conhecido há mais tempo. Entretanto, somente com estudos recentes no regime infravermelho em teorias de gauge e gravitação<sup>1</sup>, essa descontinuidade foi associada à existência de um conjunto infinito de leis de conservação.

Tais estudos relacionaram fenômenos antes considerados desconexos, como o efeito de memória gravitacional e eletromagnética, identidades específicas entre amplitudes de espalhamento (os “soft-theorems”) e simetrias assintóticas do espaço-tempo. A relação entre descontinuidade nos potenciais de Liénard-Wiechert e conservação de cargas é um dos fenômenos desse conjunto. Contudo, enquanto os demais são intrinsecamente quânticos, esse é passível de ser analisado dentro do limite clássico, que é o objetivo deste artigo.

Historicamente, as leis de conservações foram obtidas posteriormente à descoberta das simetrias às quais elas estão relacionadas<sup>2</sup>, porém o artigo irá seguir o caminho contrário, abordando as fundamentações para as leis e como elas surgem a partir de um fenômeno clássico. Uma breve discussão sobre as simetrias se encontra na conclusão.

### II. POTENCIAIS PARA UMA CARGA EM MOVIMENTO

Antes de chegar ao seu formato dos potenciais conhecido serão revistos resultados anteriores que reforçam alguns dos seus critérios mais importantes, como a conformidade com a relatividade restrita.

#### A. Potenciais retardados e avançados

Partindo da condição do calibre (ou *gauge*) de Lorenz

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1)$$

obtêm-se as equações diferenciais para os potenciais  $\mathbf{A}$  e  $\phi$ :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{j} \\ \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \end{aligned} \quad (2)$$

cujas soluções são familiares. Porém, antes de apresentá-las, uma pequena modificação precisa ser feita em sua estrutura. Ao lidar com cargas em movimento é preciso estar atento ao fato de que a informação é transmitida na velocidade da luz, não instantaneamente. Como o estado observado é determinado pela configuração do sistema assim que ele emite a informação, existe um termo de correção que representa o tempo percorrido pela partícula com velocidade  $c$  pelo comprimento  $R$  (distância entre a posição de observação  $r$  e a posição  $r'$  da fonte do campo). Essa expressão corrigida é o que é chamado de tempo retardado:

$$t_r \equiv t - \frac{R}{c} \quad (3)$$

Da mesma forma, podemos considerar ainda o tempo avançado. Fisicamente ele não possui um significado, afinal é incoerente dizer que os potenciais atuais do sistema dependem de uma condição futura, mas servem como um instrumento teórico<sup>3</sup>.

$$t_a \equiv t + \frac{R}{c} \quad (4)$$

Com a adição da dependência no tempo retardado ou avançado, as soluções para as equações diferenciais (2) são:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t \pm R/c)}{R} dV' \quad (5)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t \pm R/c)}{R} dV' \quad (6)$$

Que representam uma generalização dos potenciais escalar e vetor. Inclusive, a formulação para o caso estático pode ser obtida a partir desse resultado.<sup>4</sup>

## B. Potenciais de Liénard-Wiechert

Integrar as equações (5) e (6) não é tão trivial, afinal as densidades de carga e corrente estão avaliadas em tempos retardados e avançados e com cargas em movimento.

Uma forma mais intuitiva de lidar com esse problema é definir uma esfera cujo elemento de área  $dS$  está “coletando” a informação da carga em movimento com velocidade  $\mathbf{v}$ .<sup>5</sup>

Nessa situação, a quantidade de carga que atravessará a esfera será menor que  $\rho dV'$ , com a diferença de um termo dependente da velocidade:

$$dq = \rho dV' - \rho \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{R}}{R} dS dt \quad (7)$$

Sabendo que  $dt = dr/c$  e  $dS dr = dV'$  e rearranjando os termos chega-se ao integrando:

$$\frac{\rho dV'}{R} = \frac{dq}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \quad (8)$$

onde  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$  é a velocidade da carga relativa à velocidade da luz. O mesmo pode ser feito com a densidade de corrente. Portanto, as equações se tornam:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \quad (9)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\beta} dq}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \quad (10)$$

com a integral agindo apenas sobre  $dq$ . Finalmente, obtêm-se os potenciais de Liénard-Wiechert<sup>a</sup>:

$$\boxed{\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}} \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\boldsymbol{\beta}}{R - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{R}}} \quad (11)$$

Toda a dedução é válida para velocidades arbitrárias, porém nos interessa o caso da velocidade constante. Define-se agora que a posição de origem do campo é a posição da carga em função do tempo, ou seja, sua trajetória, que será chamada  $\mathbf{w}(t)$ , portanto

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{w}(t) \quad (12)$$

No caso da velocidade constante, temos ainda que  $\mathbf{w}(t) = \mathbf{v}t$ , onde  $\mathbf{v}$  é a velocidade da carga.

<sup>a</sup>Existem muitas formas de deduzir os potenciais de Liénard-Wiechert. Uma dedução geométrica pode ser vista na seção 10.3 de D. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3ed., enquanto L. Landau, *The Classical Theory of Fields*, 4ed a faz usando quadri-vetores no capítulo 8. J. Reitz e F. Milford, *Foundations of Electromagnetic Theory* possui uma dedução mais rigorosa na seção 17.1. Por fim, J. Jackson. *Classical Electrodynamics*, 3ed., apresenta uma solução usando o delta de Dirac na seção 14.1

Com a condição  $\dot{\mathbf{v}} = 0$ , os potenciais resultam no campo elétrico:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \beta^2}{(R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} (\mathbf{R} - R\boldsymbol{\beta}) \quad (13)$$

A solução acima se reduz ao habitual campo de uma carga pontual em repouso quando tomamos  $\mathbf{v} = 0 \rightarrow \boldsymbol{\beta} = 0$ .

## C. Solução para o campo elétrico

Para seguir em frente se faz necessário recorrer à formulação covariante em quatro dimensões. O principal elemento é o tensor eletromagnético (ou tensor anti-simétrico de Faraday)  $F_{\mu\nu}$ , com  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ .

A ação construída para o eletromagnetismo clássico é:

$$S = -\frac{1}{4e^2} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + S_M \quad (14)$$

onde  $S_M$  é a parte da ação que corresponde à matéria.

Em coordenadas esféricas, adotando  $\mathbf{x} = r\hat{x}$  como coordenada radial, a equação (13) para um conjunto de cargas é reescrita como:

$$F_{rt}(\mathbf{x}, t) = \frac{e^2}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k \gamma_k (r - t\hat{x} \cdot \boldsymbol{\beta}_k)}{[\gamma_k^2 (t - r\hat{x} \cdot \boldsymbol{\beta}_k)^2 - t^2 + r^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (15)$$

que é o termo do tensor eletromagnético que corresponde à componente radial do campo elétrico, onde  $\gamma_k^2 = 1/(1 - \beta_k^2)$ .

Essa solução também é geral, válida para potenciais retardados e avançados e é justamente ela que possui uma descontinuidade em  $r = \infty$ . Porém, antes de prosseguir, algumas ferramentas precisam ser apresentadas.

## III. DIAGRAMAS DE PENROSE

Para evitar inconsistências ao lidar com infinitos será conveniente utilizar os diagramas de Penrose. A construção de um diagrama de Penrose para o espaço-tempo de quatro dimensões de Minkowski é feita por meio de uma compactificação conforme<sup>6</sup>, de forma que todos os pontos originalmente no infinito são trazidos para um ponto finito, mantendo as estruturas causais inalteradas. O diagrama obtido pode ser visto na figura 1.

No diagrama, a linha-mundo de uma partícula massiva (como é o caso das cargas em estudo) movendo-se em velocidade constante é representada pela curva cinza, que tem origem no infinito do passado ( $i^-$ ) e termina no infinito do futuro ( $i^+$ ).

Já os raios de luz (representados pela linha cinza ondulada) têm sua origem em  $\mathcal{I}^-$  e chegam até  $\mathcal{I}^+$ . Porém, o interesse maior está nas proximidades do infinito espacial ( $i^0$ ). Como será observado posteriormente, é crucial definir que o futuro de  $\mathcal{I}^-$ , que será chamado de

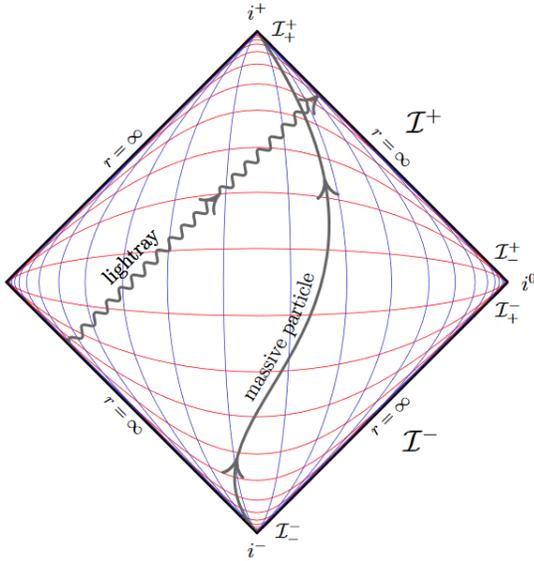


Figura 1: Diagrama de Penrose para o espaço de Minkowski de quatro dimensões. Fonte: Strominger<sup>1</sup>

$\mathcal{I}_+$ , e o passado de  $\mathcal{I}^+$ , que será representado como  $\mathcal{I}_-$ , são as proximidades assintóticas de  $i^0$ , e não exatamente este ponto.

#### IV. FORMAS DIFERENCIAIS

Outra ferramenta a ser utilizada é a notação de formas diferenciais. É uma maneira de reescrever integrandos em uma representação muito mais simples e com algumas vantagens dependendo do uso.

Uma forma diferencial homogênea (como todas que serão apresentadas nesse artigo) é identificada de maneira genérica como uma  $k$ -forma, sendo  $k$  o seu grau. Um exemplo é a que tem o formato  $f dx + g dy + h dz$ , onde  $f$ ,  $g$  e  $h$  são funções diferenciáveis. Esse formato é integrável sobre um caminho, por isso representa uma 1-forma. O formato  $f dx dy + g dy dz + h dz dx$ , integrável sobre uma superfície, é uma 2-forma. E o formato  $f dx dy dz$ , integrável sobre um volume, representa uma 3-forma.

Uma função diferenciável  $f$  tem um tratamento um pouco diferente, onde não há exatamente uma integração e sim a aplicação da função em um ponto. Elas são as 0-formas.

A teoria eletromagnética possui muitos exemplos de formas diferenciais. A lei de Faraday:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \quad (16)$$

mostra o campo elétrico  $\mathbf{E}$  integrado sobre um caminho  $C$ , portanto ele é uma 1-forma. E, de fato, podemos escrever  $E = E_x dx + E_y dy + E_z dz$ , deixando claro o formato a qual ele pertence. Do lado direito da equação, o campo magnético  $\mathbf{B}$  vem acompanhado do diferencial

$dA$  (que pode ser um  $dx dy$ , por exemplo) integrado em uma área, portanto é uma 2-forma.

Identificados os graus, em seguida vem a conveniência da notação em formas que é simplificar os termos, deixando de lado a notação vetorial. Assim, a equação (16) é reescrita como:

$$\oint_C E = -\frac{d}{dt} \int_A B \quad (17)$$

Uma das vantagens da notação de formas diferenciais é que, diferente da representação vetorial, fica muito claro a diferença entre as quantidades físicas a serem estudadas. As intensidades dos campos, por exemplo, são 1-formas (como as intensidades de campo elétrico  $E$  e de campo magnético  $H$ ), enquanto 2-formas representam fluxos (como o de densidade de corrente  $J$  ou de campo magnético  $B$ ).<sup>7</sup>

#### A. Operador estrela de Hodge e o produto externo

Algumas relações comuns em notação vetorial tornam-se inválidas na notação de formas pela diferença entre os graus. Por exemplo, no vácuo a relação entre o campo de deslocamento elétrico  $\mathbf{D}$  e o campo elétrico  $\mathbf{E}$  é dada por:

$$D = \epsilon_0 E \quad (18)$$

Porém  $\mathbf{D}$  é uma 2-forma, enquanto  $\mathbf{E}$  é uma 1-forma. Para relacionar formas de diferentes graus é introduzido o operador estrela de Hodge, que atua da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \star dx &= dy dz \\ \star dy &= dz dx \\ \star dz &= dx dy \end{aligned} \quad (19)$$

Assim, ele transforma 1-formas em 2-formas e vice-versa. O mesmo acontece entre 0-formas e 3-formas:

$$\star 1 = dx dy dz \quad (20)$$

O operador aplicado duas vezes atua como uma identidade:  $\star \star A = A$

Por fim, a relação que antes tinha um problema é resolvida como:

$$D = \epsilon_0 \star E \quad (21)$$

Nas relações 19 e 20, assim como em todos os diferenciais de 2-formas e 3-formas escritos até aqui, existe uma operação chamada de produto externo, denotado pelo símbolo  $\wedge$ . Portanto, uma notação mais rigorosa seria, por exemplo, escrever:  $\star 1 = dx \wedge dy \wedge dz$ .

Sua propriedade mais importante é:

$$A \wedge B = (-1)^{\alpha\beta} B \wedge A \quad (22)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são os graus de  $A$  e  $B$ , respectivamente, o que torna o produto anticomutativo entre duas 1-formas e comutativo entre 1-forma e 2-forma, por exemplo.

Porém, normalmente, o  $\wedge$  é omitido da representação, principalmente quando a integral está escrita explicitamente.

## B. Derivada exterior

Outro operador importante é o de derivada exterior, escrito em coordenadas cartesianas como:

$$d \equiv \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz \quad (23)$$

É fácil verificar como esse operador se transforma ao agir sobre formas de diferentes graus. Aplicado em uma 0-forma ele se torna um gradiente, em 1-forma um rotacional e em 2-formas, um divergente. Por abranger todos esses operadores, a derivada exterior aparece em muitas identidades.

Pela propriedade (22), é possível ver que o produto de diferenciais iguais é zero, por isso operações sobre uma 3-forma ou quaisquer duas aplicações da derivada exterior resultam em 0.

## C. Teorema de Stokes generalizado

Outra poderosa ferramenta que pode ser obtida na notação de formas diferenciais é o teorema de Stokes generalizado. Sendo  $\omega$  uma  $k$ -forma, o teorema é escrito como:

$$\int_M d\omega = \oint_{\partial M} \omega \quad (24)$$

em que  $M$  representa uma região no espaço com dimensão  $(k+1)$  e  $\partial M$  é a sua fronteira.

Assim como o operador de derivada exterior se torna operadores diferentes, o teorema de Stokes generalizado recebe esse nome justamente por abranger outras formulações, dependendo apenas do grau de  $\omega$ .

Se  $\omega$  for uma 2-forma, então  $M$  representa um volume e  $\partial M$  a superfície fechada que o limita. Nesse caso, o teorema se torna análogo ao teorema de Gauss presente no cálculo vetorial.

Se for uma 1-forma,  $M$  é uma superfície e  $\partial M$  é um caminho fechado. E nesse caso, tem-se o análogo ao teorema de Stokes, também do cálculo vetorial.

E, para 0-formas, o teorema de Stokes generalizado torna-se o teorema fundamental do cálculo.

## D. Aplicações gerais de formas diferenciais

Uma das maneiras de construir o tensor eletromagnético é justamente utilizando formas diferenciais.

A partir do quadripotencial  $A = (\phi, \mathbf{A})$ , onde  $\phi$  é o potencial escalar e  $\mathbf{A}$  o potencial vetor, o tensor eletromagnético na forma covariante surge da equação:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (25)$$

Na notação de formas, a relação fica ainda mais simples:

$$F = dA \quad (26)$$

Assim, podemos escrever que, a partir da ação (eq. 14) a equação de movimento é:

$$d \star F = e^2 \star j \quad (27)$$

Integrando os dois lados da equação em um volume  $\Sigma$ , cuja fronteira é limitada por uma esfera  $S^2$ , e depois usando o teorema de Stokes generalizado sobre o lado esquerdo, obtêm-se:

$$\frac{1}{e^2} \int_{S^2} \star F = \int_{\Sigma} \star j = Q_E \quad (28)$$

que é a carga elétrica dentro da esfera ( $S^2$ ).

## V. DESCONTINUIDADE E AS LEIS DE CONSERVAÇÃO

Antes de verificar os limites, é possível aproveitar-se da estrutura do diagrama de Penrose para definir novas coordenadas mais convenientes.

A primeira delas será chamada de coordenada retardada, definida por  $u = t - r$ , e será usada para parametrizar  $\mathcal{I}^+$ . Já a coordenada avançada, definida como  $v = t + r$ , parametriza  $\mathcal{I}^-$ . Essa mudança de coordenadas evita que  $r$  e  $t$  fiquem explícitos nas equações, afinal ambos são infinitos, porém  $t + r$  e  $t - r$  são finitos. Além disso,  $u$  e  $v$  mantêm suas estruturas mesmo depois da compactificação que deu origem ao diagrama de Penrose. Uma visão mais intuitiva dessas coordenadas e dos passos que virão a seguir pode ser encontrada na figura 2.

A equação (15) reescrita em termos das coordenadas retardadas é:

$$F_{rt} = \frac{e^2}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k \gamma_k (r - (u+r)\hat{x} \cdot \boldsymbol{\beta}_k)}{[\gamma_k^2 (u+r-r\hat{x} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - (u+r)^2 + r^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (29)$$

O primeiro passo é fazer o caminho até  $\mathcal{I}^+$ , ou seja, tomar  $r \rightarrow \infty$  mantendo  $u = t - r$  constante. Depois, um segundo limite deve ser tomado para se aproximar de  $\mathcal{I}_-^+$ , que seria  $u \rightarrow -\infty$ , porém apenas com o primeiro limite a função já deixa de depender de  $u$ . Por fim, obtêm-se assintoticamente:

$$F_{rt}|_{\mathcal{I}^+} = \frac{e^2}{4\pi r^2} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{\gamma_k^2 (1 - \hat{x} \cdot \boldsymbol{\beta}_k)^2} \quad (30)$$

Agora, o caso avançado:

$$F_{rt} = \frac{e^2}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k \gamma_k (r - (v-r)\hat{x} \cdot \boldsymbol{\beta}_k)}{[\gamma_k^2 (v-r-r\hat{x} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - (v-r)^2 + r^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (31)$$

Aqui acontece a mesma situação do exemplo anterior, o limite  $r \rightarrow \infty$  com  $v$  constante resulta em:

$$F_{rt}|_{\mathcal{I}^-} = \frac{e^2}{4\pi r^2} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{\gamma_k^2 (1 + \hat{x} \cdot \beta_k)^2} \quad (32)$$

Com isso, é possível perceber que o limite depende do caminho tomado, portanto, a componente radial do campo elétrico apresenta uma descontinuidade nas vizinhanças do infinito espacial para uma carga se movendo no espaço de Minkowski.

Ainda que não haja continuidade, deve haver uma condição de junção relacionando o campo em  $\mathcal{I}_-^+$  e em  $\mathcal{I}_+^-$ .

As equações obtidas no limite são semelhantes, à exceção de um sinal. Então, invertendo  $\hat{x}$  para  $-\hat{x}$  em (32) (o que leva  $F_{rt}|_{\mathcal{I}_-^+}$  para  $F_{rt}|_{\mathcal{I}_+^-}$ ) obtêm-se a condição de junção:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^2 F_{ru}(\hat{x})|_{\mathcal{I}_+^+} = \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 F_{rv}(-\hat{x})|_{\mathcal{I}_+^-} \quad (33)$$

Essa inversão em  $\hat{x}$  indica que agora o vetor radial aponta para a direção diametralmente oposta, ou seja, a igualdade se encontra no seu ponto antipodal.

Em conjunto com as coordenadas retardadas e avançadas, serão inseridas novas coordenadas esféricas  $(z, \bar{z})$  para uma esfera de raio unitário. Essa notação padrão ajudará a generalizar o problema, afinal essa esfera comporta também um infinito (quando  $z = 0$ ), sendo que  $z$  percorre todo o plano complexo.

A figura 2 mostra a parametrização com essas novas coordenadas.

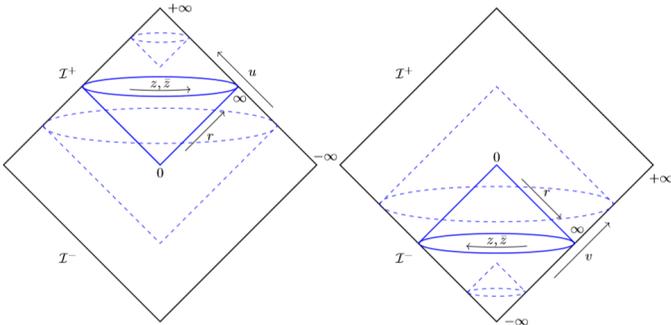


Figura 2: À esquerda, o diagrama para  $\mathcal{I}^+$  parametrizado em  $(u, z, \bar{z})$ ; à direita,  $\mathcal{I}^-$  parametrizado em  $(v, z, \bar{z})$ .<sup>1</sup>

Outro fator conveniente nessas coordenadas é que, na esfera, o ponto  $z$  nas coordenadas avançadas corresponde ao ponto antipodal  $z$  nas coordenadas retardadas.

Para generalizar a condição de junção (33) é conveniente expandir  $F$  em torno de  $\mathcal{I}^\pm$ . Uma forma de fazer isso é considerando o potencial vetor  $\mathbf{A}$ , que pode ter sua componente  $z$  expandida da seguinte forma:

$$A_z(u, r, z, \bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_z^{(n)}(u, z, \bar{z})}{r^n} \quad (34)$$

onde  $(n)$  indica a ordem da expansão, assim como a potência de  $1/r$ . Expandindo dessa forma até a segunda ordem, obtêm-se:

$$F_{ru}^{(2)}(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_-^+} = F_{rv}^{(2)}(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_+^-} \quad (35)$$

Agora temos uma versão mais simples da condição de junção. É possível perceber ainda que, com as coordenadas  $(z, \bar{z})$ , a expressão revela a relação antipodal entre os valores de  $z$  em  $\mathcal{I}^+$  e  $\mathcal{I}^-$ .<sup>b</sup>

## A. Conservação de cargas

Considerando agora uma função arbitrária  $\epsilon$  que obedece à condição de junção (35):

$$\epsilon(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_+^+} = \epsilon(z, \bar{z})|_{\mathcal{I}_+^-} \quad (36)$$

Define-se as cargas avançadas e retardadas como:

$$Q_\epsilon^+ = \frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{I}_+^+} \epsilon \star F \quad Q_\epsilon^- = \frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{I}_+^-} \epsilon \star F \quad (37)$$

Que, pela condição de junção, são iguais, portanto:

$$Q_\epsilon^+ = Q_\epsilon^- \quad (38)$$

Como a igualdade permanece satisfeita para qualquer função  $\epsilon$ , que já é arbitrária, essa igualdade simples implica que existe uma quantidade infinita de leis de conservação, uma para cada função.

Para um exemplo menos trivial, mas com resultado já conhecido, a carga avançada pode ser integrada por partes, dando origem a duas integrais sobre o volume  $\mathcal{I}^+$ . Um terceiro termo surge por conta das duas condições de contorno:

$$Q_\epsilon^+ = \frac{1}{e^2} \left[ \int_{\mathcal{I}^+} d\epsilon \star F + \int_{\mathcal{I}^+} \epsilon d \star F + \int_{\mathcal{I}_+^+} \epsilon \star F \right] \quad (39)$$

Assumindo que as cargas não possuem massa, e por consequência os campos são nulos em  $\mathcal{I}_+^+$ , esse último termo desaparece. O valor na segunda integral pode ser modificado, lembrando da equação (27). Resultando em:

$$Q_\epsilon^+ = \frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{I}^+} d\epsilon \star F + \int_{\mathcal{I}^+} \epsilon \star j \quad (40)$$

O mesmo pode ser feito para os arredores de  $\mathcal{I}^-$ :

$$Q_\epsilon^- = \frac{1}{e^2} \int_{\mathcal{I}^-} d\epsilon \star F + \int_{\mathcal{I}^-} \epsilon \star j \quad (41)$$

<sup>b</sup>Em  $\mathcal{I}_-^+$ ,  $F_{ru}^{(2)}$  está avaliado em  $r \rightarrow \infty$  e  $u \rightarrow -\infty$ , portanto suas coordenadas seriam  $(-\infty, \infty, z, \bar{z})$ , o que foi simplificado para  $(z, \bar{z})$ . O mesmo vale para os arredores de  $\mathcal{I}_+^-$ . Esse é um dos motivos para a escolha das novas coordenadas esféricas.

Em seguida, como não há restrições sobre  $\epsilon$ , podemos considerar um caso particular onde a função é constante em  $\mathcal{I}^+$  e  $\mathcal{I}^-$ , portanto,  $\partial_u \epsilon = \partial_v \epsilon = 0$ .

Com isso,  $d\epsilon$  anula o primeiro termo nas cargas, enquanto o termo que resta representa a soma de cargas em determinada direção (saindo ou entrando no sistema). Por fim, obtêm-se:

$$\sum_{k=1}^m Q_k^{\text{entrando}} = \sum_{k=1}^n Q_k^{\text{saindo}} \quad (42)$$

Implicando que a soma de todas as cargas que entram em um sistema é igual à soma de todas as cargas que saem, um caso bem familiar. Portanto, para o caso particular de um  $\epsilon$  constante a lei de conservação se reduz à conservação de cargas comum.

Agora, considerando um caso onde  $\epsilon$  não é constante e sim, por exemplo,  $\epsilon = Y_{\ell m}$  (um harmônico esférico), constata-se que a condição se mantém com uma lei de conservação para cada par de valores  $(\ell, m)$ .

Como tais funções são utilizadas na expansão multipolar, uma consequência desse resultado é a conservação dos momentos multipolares, ou seja, a quantidade de multipolos saindo do sistema é a mesma do conjunto de multipolos que entra.

## VI. CONCLUSÃO

A partir de definições clássicas do eletromagnetismo foram deduzidos os potenciais de Liénard-Wiechert e a descontinuidade de seus campos foi analisada de forma a deixar explícita a condição de junção que possuem no limite do infinito espacial.

Essa condição, que é uma característica intrínseca dos campos estudados, foi estendida para uma forma generalizada e permitiu a obtenção de um número infinito de leis de conservação, dentre as quais alguns exemplos se reduzem a casos conhecidos do eletromagnetismo, como a conservação de cargas.

Foi mostrado, portanto, a ligação que existe entre a descontinuidade dos potenciais de Liénard-Wiechert e tais novas leis de conservação. Em seguida a essa constatação, o procedimento comum é buscar à quais simetrias elas estão relacionadas.

O estudo do presente artigo representa apenas os primeiros passos para um tópico ainda em discussão envolvendo a chamada “large gauge symmetry”. Indo além

dessa introdução é possível mostrar que as infinitas simetrias ligadas às leis de conservação se resumem em transformações de gauge que tem a função arbitrária  $\epsilon$  como parâmetro.

Habitualmente, as transformações de gauge eram consideradas como meras redundâncias da descrição que não atuam nos estados físicos e não levam a existência de leis de conservação. Contudo, para isso ser verdade, os parâmetros das transformações devem tender a zero no infinito. Se escolher os parâmetros com condições de contorno não triviais na fronteira do espaço-tempo, teremos as chamadas “large gauge transformations” que modificam a análise do espectro físico da teoria e produzem novas leis de conservação.

Recentemente, o estudo dos efeitos destas transformações ajudou a esclarecer a estrutura das divergências infravermelhas nas teorias de gauge<sup>8</sup>, gerou propostas para solução do paradoxo de informação de buracos negros na gravitação quântica<sup>9</sup> e continua sendo uma área ativa de investigação.

## REFERÊNCIAS

- <sup>1</sup>A. Strominger, “Lectures on the Infrared Structure of Gravity and Gauge Theory,” (2017), arXiv:1703.05448 [hep-th].
- <sup>2</sup>T. He, P. Mitra, A. P. Porfyriadis, and A. Strominger, “New Symmetries of Massless QED,” (2014), arXiv:1407.3789 [hep-th].
- <sup>3</sup>D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd ed. (Prentice Hall, 1999).
- <sup>4</sup>L. Landau, *The Classical Theory of Fields*, 4th ed., Vol. 2 (Butterworth-Heinemann, 1980).
- <sup>5</sup>W. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Dover Books on Physics (Dover Publications, 2012).
- <sup>6</sup>P. K. Townsend, “Black Holes,” (1997), arXiv:9707012 [gr-qc].
- <sup>7</sup>K. Warnick and R. Selfridge, “Teaching Electromagnetic Field Theory Using Differential Forms,” *IEEE Transactions on Education* **40**, 53–68 (1997).
- <sup>8</sup>A.-M. R. D. Kapec, M. Perry and A. Strominger, “Infrared Divergences in QED, Revisited,” *Phys. Rev.* **D96** (2017), arXiv:1705.04311 [hep-th].
- <sup>9</sup>M. J. P. S. W. Hawking and A. Strominger, “Soft Hair on Black Holes,” *Phys. Rev. Lett.* **116** (2016), arXiv:1601.00921 [hep-th].