

Teoria de distinguibilidade de partículas idênticas em redes lineares unitárias: experimentos com três e mais fótons

Matheus Eiji Ohno Bezerra*

Universidade Federal do ABC - Centro de Ciências Naturais e Humanas

Santo André, São Paulo, Brasil

(Dated: 24 de Agosto de 2018)

O presente trabalho trata-se da monografia apresentada para o Trabalho de Conclusão de Curso do Bacharelado em Física da Universidade Federal do ABC por Matheus Eiji Ohno Bezerra sob a orientação do Prof. Dr. Valery Shchesnovich. No conhecido experimento de Hong-Ou-Mandel, de interferência de dois fótons, foi constatado que a probabilidade de detecção das duas partículas é influenciada pela distinguibilidade entre elas. Com isso, também foi descoberto o conceito de distinguibilidade parcial, de modo que duas ou mais partículas possuem graus de distinguibilidade de acordo com alguns parâmetros internos que as podem distinguir. Assim, o trabalho trata-se de uma introdução à teoria de distinguibilidade de partículas idênticas (no caso, fótons) em experimentos de propagação em redes lineares unitárias e tem como objetivo uma generalização do efeito de Hong-Ou-Mandel para experimentos com três ou mais fótons únicos. Em pesquisas recentes, foi demonstrado que as probabilidades de detecção em experimentos com mais de dois fótons dependem de uma fase global, chamada de fase coletiva. Utilizando de conceitos da mecânica quântica, álgebra linear, teoria de grupos e teoria de grafos, é possível construir uma teoria que descreva uma interferência genuína de mais partículas, com foco no caso de quatro fótons.

I. INTRODUÇÃO

O efeito de Hong-Ou-Mandel (HOM) [1, 2] é um fenômeno de interferência de dois fótons únicos que é intrinsecamente quântico. No experimento original, dois fótons únicos incidem em um beamsplitter (em português, divisor de feixes) e então são detectadas após passarem pelo, quantificando assim, a probabilidade de detecção dos fótons após passarem pelo beamsplitter. Sabe-se que dois fótons perfeitamente indistinguíveis sempre são detectados juntos, fenômeno conhecido como “photon bunching”. Porém, ao se adicionarem graus de distinguibilidade entre os fótons, foi constatado que, quanto maior for esse grau de distinguibilidade entre eles, mais passam a ter um comportamento de interferência que se aproxima ao de partículas distinguíveis. Esses graus de distinguibilidade podem ser: polarizações, caminhos, frequências ou tempos de chegada diferentes; no caso do experimento original, um delay no tempo de detecção causado por uma pequena diferença entre os caminhos. Por outro lado, minimizando esses graus de distinguibilidade, o comportamento de interferência volta a se aproximar do esperado para fótons indistinguíveis. Assim, a principal descoberta do experimento, foi que a probabilidade de detecção é fortemente influenciada pela distinguibilidade dos fótons [2].

Tal efeito, além de ser um fenômeno fundamental da mecânica quântica, também é importante para diversas aplicações práticas, como informação e computação quântica, metrologia quântica, engenharia de estados quânticos, por isso é extensivamente estudado até os dias de hoje [3–8]. A maior parte dessas aplicações, exigem a utilização de mais do que apenas dois fótons. Assim, é de grande relevância estudar o fenômeno de Hong-Ou-Mandel em experimentos com mais do que duas partículas, a fim de se descobrir um efeito mais geral.

Recentemente, em uma experiência com três fótons, foi demonstrado que a probabilidade de detecção de três fótons depende da fase global entre eles (chamada de fase coletiva) [9]. No artigo foi descrito a realização de um experimento de interferência com três fótons únicos, considerando que estavam em estados puros e sendo constatada interferência. Utilizando a teoria recentemente desenvolvida [10], o principal objetivo será generalizar o estudo de interferência de fótons para um número maior de partículas, em especial para $N=4$ fótons.

II. INTERFERÊNCIA DE DOIS FÓTONS PARCIALMENTE DISTINGUÍVEIS

O primeiro passo para se entender a teoria de distinguibilidade de partículas idênticas em redes lineares unitárias (i.e. uma rede quântica composta por elementos da óptica linear), é estudar a interferência de dois fótons ao passarem por um beamsplitter equilibrado, que é o caso mais simples de uma rede unitária para a interferência de dois fótons. O experimento de Hong-Ou-Mandel [1, 2] foi pioneiro no estudo da teoria de distinguibilidade de fótons em redes lineares, ao se descobrir que a probabilidade de detecção de dois fótons depende do grau de distinguibilidade entre eles. O objetivo desta seção é analisar a teoria por trás desse experimento, a fim de se generalizar o efeito nas seções seguintes.

A. Partículas em uma rede linear unitária 2×2

No caso de um experimento com fótons, uma rede linear unitária é uma rede quântica formada por arranjos de elementos da óptica linear, onde os mais simples são: *beamsplitters* (dispositivo que divide um feixe de luz em dois, no caso de fótons únicos, os transmite ou reflete com determinada taxa de transmissão e reflexão) e *phase-shifters* (dispositivo que modifica a fase de um estado quântico). Denotamos essa rede

* matheus.eiji@aluno.ufabc.edu.br

quântica por U e a representamos como uma matriz unitária, isto é, uma matriz que satisfaz $U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{I}$, onde \mathbb{I} é operador identidade [11, 12]. Consideremos que dois fótons com estados internos $|\Phi_1\rangle$ e $|\Phi_2\rangle$ entram em uma rede linear unitária U nos modos espaciais $|1\rangle_a$ e $|2\rangle_a$ respectivamente. Formalmente, temos:

$$|k\rangle_a |\Phi_k\rangle = a_{k,\Phi_k}^\dagger |0\rangle \quad (1)$$

O modo $|1\rangle_a$ representa a entrada $1a$, o modo $|2\rangle_a$ a entrada $2a$ e a rede U é simplesmente um único beamsplitter, conforme a Fig. 1.

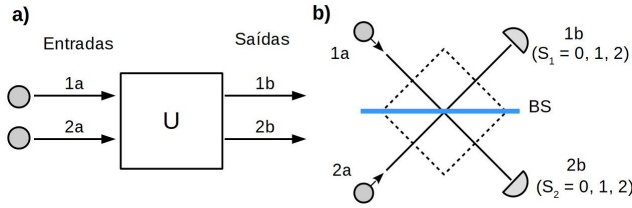


Figura 1. **a)** Representação esquemática da transformação linear que a rede unitária U provoca nos modos espaciais; **b)** representação do arranjo experimental, onde denotamos BS como beamsplitter e s_k o número de fótons que pode ser detectado na saída k_b .

Consideremos o caso em que o beamsplitter é equilibrado, isto é, possui coeficientes de transmissão e reflexão iguais a 0.5. Então a rede unitária mostrada na Fig. 1 é descrita pela seguinte matriz [13, 14]:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Essa matriz unitária atua nos modos espaciais de entrada $|1\rangle_a$ e $|2\rangle_a$ transformando-os nos modos espaciais de saída $|1\rangle_b$ e $|2\rangle_b$. Explicitamente, usando a equação (2), vemos que os estados se transformam linearmente do seguinte modo:

$$\begin{aligned} |1\rangle_a &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_b + |2\rangle_b) \\ |2\rangle_a &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_b - |2\rangle_b) \end{aligned} \quad (3)$$

B. Partículas distinguíveis

Consideremos inicialmente uma partícula com estado interno $|\Phi_1\rangle$ no caminho $1a$ e outra partícula com estado interno $|\Phi_2\rangle$ no caminho $2a$. O estado inicial do sistema é:

$$|\Psi_{in}^D\rangle = |1\rangle_a |\Phi_1\rangle \otimes |2\rangle_a |\Phi_2\rangle \quad (4)$$

Após atravessar o beamsplitter, o estado final é obtido

usando a transformação (3):

$$|\Psi_{fin}^D\rangle = \frac{1}{2} \left(\underbrace{|1\rangle_b |\Phi_1\rangle \otimes |1\rangle_b |\Phi_2\rangle}_{(2,0)} - \underbrace{|2\rangle_b |\Phi_1\rangle \otimes |2\rangle_b |\Phi_2\rangle}_{(0,2)} + \underbrace{|2\rangle_b |\Phi_1\rangle \otimes |1\rangle_b |\Phi_2\rangle - |1\rangle_b |\Phi_1\rangle \otimes |2\rangle_b |\Phi_2\rangle}_{(1,1)} \right) \quad (5)$$

onde denotamos $\mathbf{s} = (s_1, s_2)$ como o arranjo com s_1 partículas na saída $1b$ e s_2 partículas na saída $2b$. No caso, temos $\mathbf{s} \in \{(2,0), (0,2), (1,1)\}$ pois temos apenas duas partículas. Então, a partir de (5), encontramos as probabilidades de detecção multiplicando pelos vetores bra correspondentes, tirando o módulo e elevando ao quadrado. Por fim, obtemos:

$$\begin{aligned} P(1,1) &= \frac{1}{2} \\ P(2,0) &= P(0,2) = \frac{1}{4} \end{aligned} \quad (6)$$

C. Partículas indistinguíveis (bósons)

Para um bóson, encontramos o estado físico inicial simetizando o estado de partículas distinguíveis dado pela equação (4), temos então:

$$\begin{aligned} |\Psi_{in}^B\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + P_{12}) |\Psi_{in}^D\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + P_{12}) (|1\rangle_a |\Phi_1\rangle \otimes |2\rangle_a |\Phi_2\rangle) \\ |\Psi_{in}^B\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle_a |\Phi_1\rangle \otimes |2\rangle_a |\Phi_2\rangle + |2\rangle_a |\Phi_2\rangle \otimes |1\rangle_a |\Phi_1\rangle) \end{aligned} \quad (7)$$

Novamente, encontramos o estado final utilizando a transformação (3) na equação anterior:

$$\begin{aligned} |\Psi_{fin}^B\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\underbrace{|1\rangle_b |\Phi_1\rangle \otimes |1\rangle_b |\Phi_2\rangle + |1\rangle_b |\Phi_2\rangle \otimes |1\rangle_b |\Phi_1\rangle}_{(2,0)} - \underbrace{|2\rangle_b |\Phi_1\rangle \otimes |2\rangle_b |\Phi_2\rangle - |2\rangle_b |\Phi_2\rangle \otimes |2\rangle_b |\Phi_1\rangle}_{(0,2)} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{|2\rangle_b |\Phi_1\rangle \otimes |1\rangle_b |\Phi_2\rangle - |1\rangle_b |\Phi_1\rangle \otimes |2\rangle_b |\Phi_2\rangle}_{(1,1)} - \underbrace{|2\rangle_b |\Phi_2\rangle \otimes |1\rangle_b |\Phi_1\rangle + |1\rangle_b |\Phi_2\rangle \otimes |2\rangle_b |\Phi_1\rangle}_{(1,1)} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

Como são partículas indistinguíveis, consideramos que os seus estados internos são idênticos e então só nos interessam os modos espaciais. Assim, podemos fazer a mudança $|\Phi_1\rangle = |\Phi_2\rangle = |\Phi\rangle$. Desse modo, os termos relativos a $\mathbf{s} = (1,1)$ desaparecem e ficamos com:

$$|\Psi_{fin}^B\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\underbrace{|1\rangle_b |\Phi\rangle \otimes |1\rangle_b |\Phi\rangle}_{(2,0)} - \underbrace{|2\rangle_b |\Phi\rangle \otimes |2\rangle_b |\Phi\rangle}_{(0,2)} \right) \quad (9)$$

então conseguimos encontrar as probabilidades de detecção do mesmo modo que o feito anteriormente:

$$\begin{aligned} P(1, 1) &= 0 \\ P(2, 0) &= P(0, 2) = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

Notamos que $P(1, 1) = 0$, ou seja, os fótons sempre saem juntos, seja na saída 1_b ou 2_B . Tal efeito é conhecido como **photon bunching**. Fisicamente, trata-se de um efeito fundamental e seria o análogo para bósons do princípio da exclusão de Pauli, que ocorre com férmions.

D. Partículas parcialmente distinguíveis e experimento de Hong-Ou-Mandel

Agora, vamos considerar que os estados $|\Phi_1\rangle$ e $|\Phi_2\rangle$ são parcialmente distinguíveis. Assim, vamos decompor o estado interno $|\Phi_2\rangle$ como uma combinação linear de um termo paralelo à $|\Phi_1\rangle$ (i.e. um termo indistinguível ao estado interno $|\Phi_1\rangle$), e outro ortogonal ao mesmo $|\tilde{\Phi}_1\rangle$ (i.e. um termo distinguível ao estado interno $|\Phi_1\rangle$) [5, 15]:

$$|\Phi_2\rangle = r_{12}e^{i\theta_{12}}|\Phi_1\rangle + \sqrt{1-r_{12}^2}|\tilde{\Phi}_1\rangle \quad (11)$$

onde $\langle\Phi_1|\tilde{\Phi}_1\rangle = 0$ e $\langle\Phi_1|\Phi_2\rangle = r_{12}e^{i\theta_{12}}$, com $0 < r_{12} < 1$. O coeficiente r_{12} nos fornece o grau de distinguibilidade entre os estados $|\Phi_1\rangle$ e $|\Phi_2\rangle$, de modo que $r_{12} = 0$ para partículas distinguíveis (i.e. ortogonais) e $r_{12} = 1$ para partículas indistinguíveis. Já θ_{12} é uma fase entre os dois estados. Conseguimos então, encontrar as probabilidades de detecção a partir das equações (8) e (11):

$$\begin{aligned} P(1, 1) &= \frac{1}{2}(1 - r_{12}^2) \\ P(2, 0) &= P(0, 2) = \frac{1}{4}(1 + r_{12}^2) \end{aligned} \quad (12)$$

Das equações (6), (10) e (12), confirmamos que o coeficiente r_{12} nos fornece uma medida de distinguibilidade entre os estados $|\Phi_1\rangle$ e $|\Phi_2\rangle$, de modo que, para $r_{12} = 0$ (caso distinguível) recuperamos o resultado de (6) e para $r_{12} = 1$ (caso indistinguível) recuperamos o resultado de (10). Em termos físicos, o grau de distinguibilidade r_{ij} deve existir em função de graus de liberdade internos, como frequência, polarização, entre outros.

No caso do experimento feito por Hong, Ou e Mandel, foi considerado uma diferença entre os caminhos que os fótons percorrem. Assim, esse delay nos caminhos se manifestou como um grau de distinguibilidade entre os fótons, de modo que se o delay era muito grande, os fótons se comportavam como distinguíveis; se o delay era zero, se comportam como partículas idênticas [1]. Então, a probabilidade (12) fica em função desse delay entre os caminhos, conforme Fig. 2

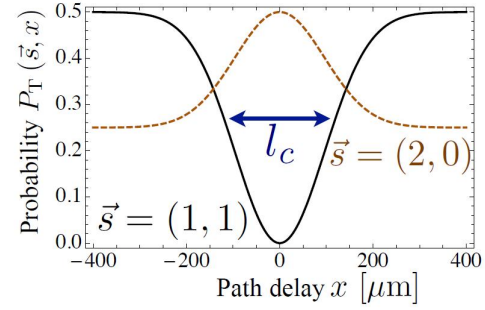


Figura 2. Probabilidades de detecção do experimento de interferência de dois fótons onde a linha contínua representa a detecção $\mathbf{s} = (1, 1)$ e a linha tracejada representa $\mathbf{s} = (2, 0)$. Retirado de [15]. Note que temos $r_{12} = 1$ quando o delay é nulo, obtendo $P(1, 1) = 0$ e $P(2, 0) = 1/2$. Por outro lado, temos $r_{12} = 0$ quando o delay é muito grande, obtendo $P(1, 1) = 1/2$ e $P(2, 0) = 1/4$.

A curva relativa à probabilidade $P(1, 1)$ da Fig. 2 é conhecido como *Mandel dip*, e foi uma grande descoberta na época em que foi feito o experimento.

III. PROBABILIDADES DE DETECÇÃO, FASES COLETIVAS E GRAFOS

A fim de se conseguir generalizar o efeito de Hong-Ou-Mandel para experimentos com mais do que dois fótons, precisamos ter em mãos uma teoria mais geral do que a tratada em [1, 2]. Nesta seção, será explicado como isso deve ser feito, tendo em base a teoria do artigo [10], para na seção seguinte, tratarmos efetivamente do caso de uma interferência de quatro fótons.

A. Probabilidades de Detecção

Conforme [10], de modo análogo ao descrito para o experimento de interferência de dois fótons, podemos considerar que N fótons entram em um multi-porte de N entradas e N saídas (rede linear unitária de dimensão $N \times N$). Neste caso, a matriz unitária U descreve a expansão das entradas $(k_a) = \{1a, 2a, \dots, Na\}$ sobre as saídas $(l_b) = \{1b, 2b, \dots, Nb\}$, de modo análogo ao feito em (3):

$$|k_a\rangle = \sum_{l=1}^N U_{kl}|l_b\rangle \quad (13)$$

Também, denotamos $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_N)$ como o arranjo com s_1 partículas na saída 1_b , s_2 partículas na saída 2_b , sucessivamente até a saída N_b com s_N partículas; além de $s_1 + s_2 + \dots + s_N = N$. Em analogia à Fig. 1a, esquematizamos esse arranjo na Fig. 3.

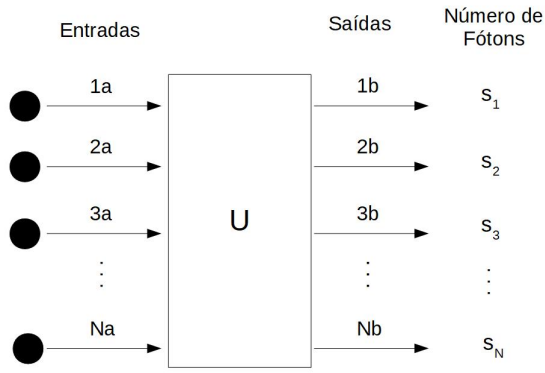


Figura 3. Esquematização do funcionamento de um experimento de N fótons únicos em um multiport U de dimensão $N \times N$

Estamos interessados em experimentos com fótons únicos, isto é, experimentos onde entram apenas um fóton em cada entrada k_a . De acordo com [10], sabemos que a probabilidade de detectar N fótons no arranjo $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_N)$, considerando que apenas um fóton entra em cada entrada é

$$P(\mathbf{s}) = \frac{1}{\mathbf{s}!} \sum_{\sigma \in S_N} \text{per}(U^*(\mathbb{I}) \circ U(\sigma)) \prod_{v \in \text{cyc}(\sigma)} g(v) \quad (14)$$

onde denotamos $\mathbf{s}! \equiv \prod_{l=1}^M s_l!$ e S_N o grupo simétrico de (permutação de) N elementos. Na Eq. (14), $J(\sigma)$ é a função de permutação σ de N objetos, e descreve o estado de indistinguibilidade de fótons. Conforme [10, 16] temos $\langle \Phi_i | \Phi_j \rangle = r_{ij} e^{i\theta_{ij}}$, e então, neste caso (estados puros) a função $J(\sigma)$ assume a seguinte forma:

$$J(\sigma) = \prod_{v \in \text{cyc}(\sigma)} g(v) \\ g(v) = \prod_{j=1}^N \langle \Phi_{k_j} | \Phi_{k_{j+1}} \rangle = \prod_{j=1}^N r_{k_j k_{j+1}} e^{i \sum_{j=1}^N \theta_{k_j k_{j+1}}} \quad (15)$$

onde $v = (k_1, k_2, \dots, k_N)$, com $k_\alpha \in (1, 2, \dots, N)$ representa o ciclo $k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow \dots \rightarrow k_N \rightarrow k_1$. Lembrando que o permanente de uma matriz A é uma operação da seguinte forma:

$$\text{per}(A) = \sum_{\sigma \in S_N} \prod_{k=1}^N A_{k, \sigma(k)} \quad (16)$$

de acordo com [16, 17], conseguimos reescrever a expressão para a probabilidade (14) a partir de (15) e (16) do seguinte modo:

$$P(\mathbf{s}) = \frac{1}{\mathbf{s}!} \sum_{\sigma \in S_N} \text{per}(U^*(\mathbb{I}) \circ U(\sigma)) \prod_{v \in \text{cyc}(\sigma)} g(v) \quad (17)$$

onde “ \circ ” denota o produto de Hadamard $(A \circ B)_{i,j} \equiv (A)_{i,j} (B)_{i,j}$ e a matriz $U(\sigma)$ cujos elementos são $(U(\sigma))_{i,j} \equiv U_{k_{\sigma(i)}, j}$. Por exemplo, no caso do experimento de duas partículas descrito na seção II, a matriz U é descrita pela equação (2).

De acordo com a expressão para $g(v)$ de (15) vemos claramente que a probabilidade (17) vai estar em função de uma

fase total $\sum_{j=1}^N \theta_{k_j k_{j+1}}$. Essa fase é chamada de **fase coletiva** e é o termo relativo à uma interferência de N partículas:

$$\theta_{(k_1, k_2, \dots, k_N)} \equiv \sum_{j=1}^N \theta_{k_j k_{j+1}} = \theta_{k_1 k_2} + \theta_{k_2 k_3} + \dots + \theta_{k_{N-1} k_N} + \theta_{k_N k_1} \quad (18)$$

de modo que a existência de uma interferência é equivalente à existência de uma fase $\theta_{(k_1, k_2, \dots, k_N)}$ independente das fases de $N - S$ fótons, $S = 1, \dots, N - 3$. Nosso objetivo é então analisar tal fase para 4 fótons.

B. Grafos, Fases Coletivas e Grupos

Utilizando a representação de grafos [16], denotamos partículas como vértices e a fase entre duas delas θ_{ij} como uma seta orientada $i \rightarrow j$ entre os vértices “i” e “j”. A fase coletiva, definida na equação (18) e que está associada à interferência de N partículas, é denotada como um caminho fechado passando por N vértices, como mostrado na Fig. 4. Também, como $\langle \Phi_i | \Phi_j \rangle = \langle \Phi_j | \Phi_i \rangle^*$ e $\langle \Phi_i | \Phi_j \rangle = r_{ij} e^{i\theta_{ij}}$ temos $\theta_{ij} = -\theta_{ji}$; em nossa representação, isso é equivalente a dizer que as setas $i \rightarrow j$ e $j \rightarrow i$ se cancelam

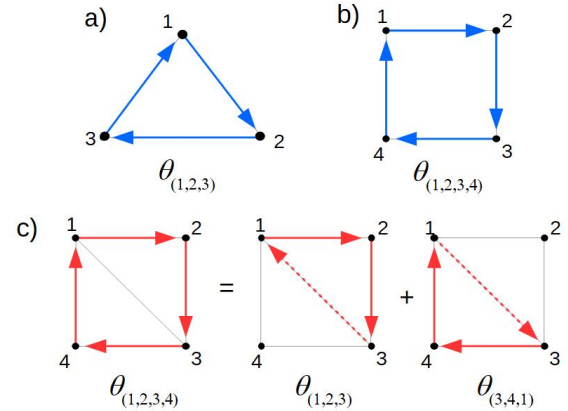


Figura 4. Representação por grafos da fase coletiva: (a) interferência de 3 fótons; (b) interferência de 4 fótons com fase coletiva *independente* da interferência de 3 fótons; (c) interferência de 4 fótons com fase coletiva *dependente* da fase de interferência de 3 fótons;

Vemos de (17), que na expressão para as probabilidades de detecção aparecem elementos matemáticos como ciclos, permutações e grupos. Primeiro, vamos definir **ciclos**: são transformações que, no caso de um ciclo de N elementos, atuam do seguinte modo:

$$C_N = (k_1, k_2, \dots, k_N) : k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow k_2 \rightarrow k_3 \rightarrow \dots \rightarrow k_N \rightarrow k_1 \quad (19)$$

a partir dos ciclos, conseguimos definir **permutações**: são transformações mais gerais que podem ser compostas por um ou mais ciclos:

$$\sigma : (k_1, k_2, \dots, k_N) \cdot (i_1, i_2, \dots, i_N) \cdot \dots \cdot (j_1, j_2, \dots, j_N) \quad (20)$$

As permutações de N objetos são elementos de um conjunto chamado **grupo simétrico**, denotado por S_N . Na Fig. 5 temos um exemplo de uma permutação de seis elementos, isto é $\sigma \in S_6$. Nas subseções seguintes serão abordados em maiores detalhes os grupos S_2 , S_3 e S_4 , que aparecem na expressão para a probabilidade de detecção de 2, 3 e 4 fótons, respectivamente.

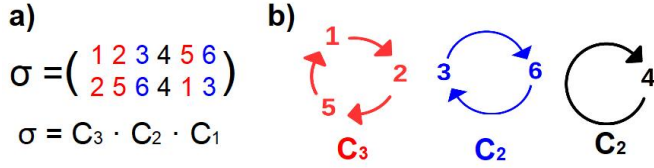


Figura 5. Exemplo de uma permutação de seis elementos $\sigma \in S_6$. (a) Decomposição da permutação σ em ciclos de três, dois e um elemento, respectivamente: C_3 , C_2 e C_1 ; (b) representação de grafos dos ciclos C_3 , C_2 e C_1 da permutação σ

C. $N=2$ partículas

Para o caso de 2 partículas, temos do que foi discutido anteriormente, que $\theta_{12} = -\theta_{21}$ e portanto, a fase coletiva é $\theta_{(1,2)} = \theta_{12} + \theta_{21} = 0$. Em nossa representação, isso é equivalente a dizer que as setas $1 \rightarrow 2$ e $2 \rightarrow 1$ se cancelam. Note que essa fase não aparece nas expressões de probabilidade de detecção dos fótons (12).

Para encontrar a expressão para as probabilidades de detecção de 2 partículas a partir de (17), devemos considerar o grupo de permutação de dois elementos S_2 , que contém ao todo $2! = 2$ ciclos: um 1-ciclo e um 2-ciclo. São eles:

$$\begin{aligned} C_1 &: \mathbb{I} \\ C_2 &: (1, 2) \end{aligned} \quad (21)$$

Então, considerando que os fótons são parcialmente distinguíveis, isto é, tomando $r_{12} \in (0, 1)$; conseguimos encontrar os termos $g(\nu)$ da equação (15) que aparecem na expressão para a probabilidade (17), são eles:

$$\begin{aligned} g(\nu \in C_1) &: g(\mathbb{I}) = 1 \\ g(\nu \in C_2) &: g((1, 2)) = r_{12}^2 \end{aligned} \quad (22)$$

Por fim, tomando a expressão para a matriz unitária U de (2) e os ciclos da equação (21), temos:

$$\begin{aligned} per(U^*(\mathbb{I}) \circ U(\sigma)) &= \frac{1}{2}, \quad \sigma \in \{C_1\} \\ per(U^*(\mathbb{I}) \circ U(\sigma)) &= -\frac{1}{2}, \quad \sigma \in \{C_2\} \end{aligned} \quad (23)$$

Assim, conseguimos recuperar as mesmas expressões para as probabilidades de detecção (12) calculadas anteriormente. Seja por exemplo a probabilidade $P(1, 1)$: substituindo (23) em (17), recuperamos a expressão já conhecida:

$$\begin{aligned} P(1, 1) &= \frac{1}{(1, 1)!} \sum_{\sigma \in S_2} per(U^*(\mathbb{I}) \circ U(\sigma)) \prod_{\nu \in cyc(\sigma)} g(\nu) \\ &= per(U^*(\mathbb{I}) \circ U(\mathbb{I})) \prod_{\nu \in cyc(\mathbb{I})} g(\nu) \\ &\quad + per(U^*(\mathbb{I}) \circ U(1, 2)) \prod_{\nu \in cyc(1, 2)} g(\nu) \\ &= \frac{1}{2}(1 - r_{12}^2) \end{aligned} \quad (24)$$

Para calcular $P(2, 0)$ teríamos que repetir a primeira coluna da matriz (2) na segunda coluna; analogamente para $P(2, 0)$, porém repetindo a segunda coluna. Também conseguimos recuperar as expressões já encontradas antes.

D. $N=3$ partículas

Para o caso de 3 partículas, temos uma fase coletiva $\theta_{(1,2,3)} = \theta_{12} + \theta_{23} + \theta_{31}$ não nula, representada na Fig. 4(a). Neste caso, para a expressão de probabilidade de detecção (17) devemos considerar o grupo de permutação de três elementos S_3 , que contém ao todo $3! = 6$ ciclos: um 1-ciclo, três 2-ciclo e dois 3-ciclo, são eles:

$$\begin{aligned} C_1 &: \mathbb{I} \\ C_2 &: (1, 2), (2, 3), (3, 1) \\ C_3 &: (1, 2, 3)(3, 2, 1) \end{aligned} \quad (25)$$

considerando também que os três fótons são parcialmente distinguíveis: $r_{12}, r_{23}, r_{31} \in (0, 1)$ encontramos os termos $g(\nu)$, de modo análogo ao feito anteriormente:

$$\begin{aligned} g(\nu \in C_1) &: g(\mathbb{I}) = 1 \\ g(\nu \in C_2) &: g((k, k+1)) = r_{k,k+1}^2 \\ g(\nu \in C_3) &: g((1, 2, 3)) = r_{12}r_{23}r_{31}e^{i\theta_{(1,2,3)}} = g^*((3, 2, 1)) \end{aligned} \quad (26)$$

Falta ainda a expressão para a matriz U . Podemos considerar, por exemplo o arranjo descrito em [9], onde

$$U = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \zeta^2 & \zeta \\ 1 & \zeta & \zeta^2 \end{pmatrix} \quad (27)$$

com $\zeta = e^{i2\pi/3}$; e agora já podemos encontrar as probabilidades de detecção a partir de (17), (25) e (26). Para o caso $s = (1, 1, 1)$ [9], a probabilidade fica:

$$P(1, 1, 1) = \frac{1}{9} \left[2 - (r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{31}^2) + 4r_{12}r_{23}r_{31} \cos(\theta_{(1,2,3)}) \right] \quad (28)$$

Tal probabilidade está explicada em [9] e notamos que está em função da fase coletiva $\theta_{(1,2,3)}$, o que é um resultado de extrema importância, uma vez esta fase não aparece na interferência de duas partículas (como discutido anteriormente). Trata-se então de uma interferência conceitualmente diferente da que ocorre com dois fótons. Nosso objetivo será então, verificar se pode existir uma interferência análoga para o caso de 4 fótons.

E. N= 4 partículas

Como dito, o nosso foco é o caso de 4 partículas, onde queremos encontrar uma fase coletiva relativa à interferência de 4 partículas, que seja intrínseca à essa interferência. Isto é, queremos uma fase $\theta_{(1,2,3,4)}$ que não tenha dependência com fases relativas à interferência de 3 partículas, chamamos essa fase de **fase genuína**. Vejamos, por exemplo, o que ocorre quando $\theta_{24} = 0$ e $\theta_{13} \neq 0$:

$$\begin{aligned}\theta_{(1,2,3,4)} &= \theta_{12} + \theta_{23} + \theta_{34} + \theta_{41} \\ &= \theta_{12} + \theta_{23} + \underbrace{(\theta_{31} + \theta_{13})}_0 + \theta_{34} + \theta_{41} \\ &= \underbrace{\theta_{12} + \theta_{23} + \theta_{31}}_{\theta_{(1,2,3)}} + \underbrace{\theta_{13} + \theta_{34} + \theta_{41}}_{\theta_{(1,3,4)}} \\ &= \theta_{(1,2,3)} + \theta_{(1,3,4)}\end{aligned}\quad (29)$$

ou seja, neste caso, a fase $\theta_{(1,2,3,4)}$ não é independente das fases de interferência de 3 partículas, como representado na figura 4(c). Poderíamos fazer o mesmo, considerando $\theta_{13} = 0$ e $\theta_{24} \neq 0$; analogamente, iríamos obter uma fase que não é genuína.

Por outro lado, se impusermos $\langle \Phi_1 | \Phi_3 \rangle = \langle \Phi_2 | \Phi_4 \rangle = 0$, perdemos nossa informação sobre a fase, que pode ser arbitrária, em particular $\theta_{13} = \theta_{42} = 0$. Conforme representado na figura 4(b), vemos que é uma condição suficiente para que a fase coletiva $\theta_{(1,2,3,4)}$ seja independente das fases de interferência de 3 fótons. Neste caso, a fase coletiva depende apenas das fases de duas partículas θ_{ij} , portanto é uma fase genuína. Logo, a nossa condição de existência da fase genuína, para a interferência de 4 fótons é:

$$\langle \Phi_1 | \Phi_3 \rangle = \langle \Phi_2 | \Phi_4 \rangle = 0 \quad (30)$$

Neste caso, para a expressão de probabilidade de detecção (17) devemos considerar o grupo de permutação de quatro elementos S_4 , que contém de início $4! = 24$ ciclos. Porém, ciclos do tipo (1, 3) ou (2, 4) irão gerar termos nulos r_{13} e r_{24} na probabilidade, então devem ser desconsiderados. No fim, restam apenas 9 ciclos: um 1-ciclo, quatro 2-ciclo, dois 2x2-ciclo e dois 4-ciclo. São eles:

$$\begin{aligned}C_1 &: \mathbb{I} \\ C_2 &: (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1) \\ C_{2 \times 2} &: (1, 2)(3, 4), (1, 4)(2, 3) \\ C_4 &: (1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1)\end{aligned}\quad (31)$$

Do mesmo modo que o feito anteriormente, consideramos $r_{12}, r_{23}, r_{34}, r_{41}, \in (0, 1)$ e então encontramos os termos $g(\nu)$:

$$\begin{aligned}g(\nu \in C_1) &: g(\mathbb{I}) = 1 \\ g(\nu \in C_2) &: g((k, k+1)) = r_{k,k+1}^2 \\ g(\nu \in C_{2 \times 2}) &: g((i, j)(k, l)) = r_{ij}^2 r_{kl}^2 \\ g(\nu \in C_4) &: g((1, 2, 3, 4)) = r_{12} r_{23} r_{34} r_{41} e^{i\theta_{(1,2,3,4)}}\end{aligned}\quad (32)$$

O cálculo das probabilidades de detecção para este caso será explicado em maiores detalhes na seção seguinte.

IV. INTERFERÊNCIA DE QUATRO FÓTONS PARCIALMENTE DISTINGUÍVEIS

Nesta seção iremos generalizar o experimento de interferência de dois fótons descrito na seção II, para o caso de quatro fótons, onde utilizaremos da teoria mostrada na seção III. Primeiramente, será descrito um modelo para os estados internos $|\Phi_k\rangle$, definidos em (1) e em seguida os cálculos que levam às probabilidades de detecção dos fótons.

A. Quatro fótons com estados internos gaussianos

Nesta seção será explicado como considerar explicitamente os estados internos $|\Phi_i\rangle$ para o caso de quatro fótons. Consideraremos como graus de liberdade internos: as polarizações de cada fóton e também que cada um deles é descrito por um pulso Gaussiano (com frequências ω_i , larguras Δ_i e tempos τ_i), de modo semelhante ao feito em [9] para o caso de três fótons. Então, o estado interno de cada fóton será de forma $|\Phi_i\rangle = |\varphi_i\rangle|P_i\rangle$ com $i = 1, 2, 3, 4$, onde $|\varphi_i\rangle$ é relativo à um pulso Gaussiano e $|P_i\rangle$ são relativos às polarizações. Na base de frequência, $|\varphi_i\rangle$ é dado por:

$$|\Phi_i\rangle = \underbrace{\int d\omega \varphi_i(\omega) |\omega\rangle}_{|\varphi_i\rangle} \underbrace{(\alpha_{iv} |v\rangle + \alpha_{ih} |h\rangle)}_{|P_i\rangle} \quad (33)$$

$$\varphi_i(\omega) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi} \Delta_i} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{(\omega - \omega_{0i})^2}{2\Delta_i^2} - i\tau_i(\omega - \omega_{0i}) \right) \quad (34)$$

Da equação anterior, conseguimos encontrar a expressão para o produto interno entre dois vetores $|\varphi_i\rangle$ e $|\varphi_j\rangle$:

$$\langle \Phi_i | \Phi_j \rangle = \sqrt{\frac{2\Delta_i \Delta_j}{\Delta_i^2 + \Delta_j^2}} e^{-\xi_{ij}} (\alpha_{iv}^* \alpha_{jv} + \alpha_{ih}^* \alpha_{jh}) \quad (35)$$

com:

$$\begin{aligned}\xi_{ij} &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_{0i}^2}{\Delta_i^2} + \frac{\omega_{0j}^2}{\Delta_j^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_i \Delta_j}{\Delta_i^2 + \Delta_j^2} \right) \left[\left(\frac{\omega_{0i}}{\Delta_i} + \frac{\omega_{0j}}{\Delta_j} \right)^2 - (\tau_i - \tau_j)^2 \right] \right] + \\ &+ i \left[\left(\frac{\Delta_i \Delta_j}{\Delta_i^2 + \Delta_j^2} \right) \left(\frac{\omega_{0i}}{\Delta_i} + \frac{\omega_{0j}}{\Delta_j} \right) (\tau_i - \tau_j) - (\tau_i \omega_{0i} - \tau_j \omega_{0j}) \right]\end{aligned}\quad (36)$$

Os termos relativos à polarização $|P_i\rangle$ devem obedecer a condição de ortogonalidade $\langle \Phi_1 | \Phi_3 \rangle = \langle \Phi_2 | \Phi_4 \rangle = 0$, conforme explicado na seção III. De acordo com o esquematizado na Fig. 6, escrevemos as polarizações dos quatro fótons na base de polarização vertical $|v\rangle$ e horizontal $|h\rangle$, obtendo:

$$\begin{aligned}|P_1\rangle &= |v\rangle \\ |P_2\rangle &= \cos \chi |v\rangle + \sin \chi |h\rangle \\ |P_3\rangle &= |h\rangle \\ |P_4\rangle &= \sin \chi |v\rangle - \cos \chi |h\rangle\end{aligned}\quad (37)$$

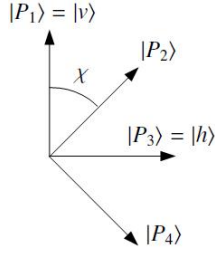


Figura 6. Representação geométrica para os vetores de polarização $|P_1\rangle$, $|P_2\rangle$, $|P_3\rangle$ e $|P_4\rangle$ com as condições de ortogonalidade satisfeitas

Por fim, temos que os estados internos dos quatro fótons são dados por:

$$\begin{aligned} |\Phi_1\rangle &= |\varphi_1\rangle|v\rangle \\ |\Phi_2\rangle &= |\varphi_2\rangle(\sin\chi|h\rangle + \cos\chi|v\rangle) \\ |\Phi_3\rangle &= |\varphi_3\rangle|h\rangle \\ |\Phi_4\rangle &= |\varphi_4\rangle(\cos\chi|h\rangle - \sin\chi|v\rangle) \end{aligned} \quad (38)$$

Da definição de $|\Phi_i\rangle$, encontramos facilmente $\langle\Phi_i|\Phi_j\rangle = \langle\varphi_i|\varphi_j\rangle\langle P_i|P_j\rangle$ a partir de (35) e (38). Por outro lado, sabemos que $\langle\Phi_i|\Phi_j\rangle = r_{ij}e^{i\theta_{ij}}$ e assim conseguimos encontrar os coeficientes θ_{ij} e r_{ij} em função dos parâmetros de distinguibilidade

$$\begin{aligned} r_{12} &= \cos\chi \sqrt{\frac{2\Delta_1\Delta_2}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}} e^{\Re e(\xi_{12})}, \quad \theta_{12} = -\Im m(\xi_{12}) \\ r_{23} &= \sin\chi \sqrt{\frac{2\Delta_2\Delta_3}{\Delta_2^2 + \Delta_3^2}} e^{\Re e(\xi_{23})}, \quad \theta_{23} = -\Im m(\xi_{23}) \\ r_{34} &= \cos\chi \sqrt{\frac{2\Delta_3\Delta_4}{\Delta_3^2 + \Delta_4^2}} e^{\Re e(\xi_{34})}, \quad \theta_{34} = -\Im m(\xi_{34}) + \pi \\ r_{41} &= \sin\chi \sqrt{\frac{2\Delta_4\Delta_1}{\Delta_4^2 + \Delta_1^2}} e^{\Re e(\xi_{41})}, \quad \theta_{41} = -\Im m(\xi_{41}) \end{aligned} \quad (39)$$

Portanto, conseguimos chegar nas relações para $\Re e(\xi_{ij})$ e $\Im m(\xi_{ij})$. Tomando $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 \equiv \Delta$ (para fins de cálculo), chegamos em:

$$\Re e(\xi_{ij}) = \frac{1}{4} \frac{(\omega_{0i} - \omega_{0j})^2}{\Delta^2} + \frac{\Delta^2}{4} (\tau_i - \tau_j)^2 \quad (40)$$

$$\Im m(\xi_{ij}) = \frac{1}{2} (\tau_i - \tau_j)(\omega_{0j} - \omega_{0i}) \quad (41)$$

$$(i, j) \in \Omega \equiv \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\} \quad (42)$$

Das equações (18) e (42), conseguimos encontrar a fase coletiva relativa à interferência de 4 fótons:

$$\theta_{(1,2,3,4)} = \pi + \frac{1}{2} [(\omega_{04} - \omega_{02})(\tau_1 - \tau_3) + (\omega_{03} - \omega_{01})(\tau_4 - \tau_2)] \quad (43)$$

Temos ainda, as seguintes expressões, válidas para os parâmetros $(\omega_{0i} - \omega_{0j})$ e $(\tau_i - \tau_j)$:

$$\sum_{(i,j) \in \Omega} (\omega_{0i} - \omega_{0j}) = 0, \quad \sum_{(i,j) \in \Omega} (\tau_i - \tau_j) = 0 \quad (44)$$

Assumindo que $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 \equiv \Delta$, podemos tomar como parâmetros $(\omega_{0i} - \omega_{0j})$ e $(\tau_i - \tau_j)$, com $(i, j) \in \Omega \equiv \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$. Temos da equação (44) que um dos parâmetros $(\omega_{0i} - \omega_{0j})$ deve ser fixo, e os outros três podem variar; o mesmo ocorre com $(\tau_i - \tau_j)$. Dessa forma temos um total de $3 + 3 = 6$ parâmetros livres. Considerando ainda as expressões para r_{ij} com $\langle\Phi_i|\Phi_j\rangle = \langle\varphi_i|\varphi_j\rangle\langle P_i|P_j\rangle$, temos 4 equações que fixam esses parâmetros. Temos ainda o ângulo χ relativo à polarização, como mostrado na Fig. 6. Portanto, para a fase relativa à interferência, mostrada na equação (43), temos um total de $6 - 4 + 1 = 3$ parâmetros livres e portanto, a fase de interferência é variável.

B. Interferência e probabilidades de detecção

De modo semelhante ao descrito na seção II., devemos considerar que os quatro fótons entram em uma rede linear descrita por uma matriz unitária, conforme esquematizado na figura 7

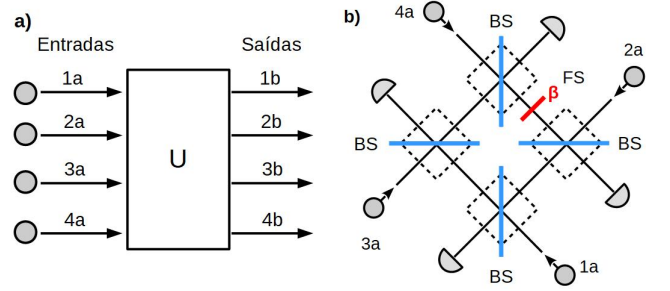


Figura 7. **a)** Representação esquemática da transformação linear que a rede unitária U provoca nos modos espaciais; **b)** representação do arranjo experimental, onde denotamos BS como beamsplitter, FS como phase shifter.

Neste caso, a rede linear é um arranjo não trivial de quatro beamsplitters equilibrados, de modo que, conforme [14] a rede linear é descrita pela seguinte matriz:

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\beta} & e^{i\beta} & 1 & 1 \\ -e^{i\beta} & -e^{i\beta} & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (45)$$

com $\beta \in \{0, \pi, \pi/2\}$. Então, considerando os ciclos da equação (31), de acordo com [16] temos:

$$\begin{aligned} \text{per}(U^*(\mathbb{I}) \circ U(\sigma)) &= \frac{3}{32}, \quad \sigma \in \{C_1, C_{2x2}\} \\ \text{per}(U^*(\mathbb{I}) \circ U(\sigma)) &= -\frac{1}{32}, \quad \sigma \in \{C_2, C_4\} \end{aligned} \quad (46)$$

Por fim, das equações (17), (32) e (46) conseguimos encontrar a probabilidade de detecção de quatro fótons. Em particular, para $\mathbf{s} = (1, 1, 1, 1)$, a probabilidade é função da fase

coletiva $\theta_{(1,2,3,4)}$, conforme mostrado em [16]. Tal probabilidade é dada por:

$$P(1, 1, 1, 1) = \frac{1}{32} \left[3 - (r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{34}^2 + r_{41}^2) + 3(r_{12}^2 r_{34}^2 + r_{14}^2 r_{23}^2) - 2 r_{12} r_{23} r_{34} r_{41} \cos(\theta_{(1,2,3,4)}) \right] \quad (47)$$

V. CONCLUSÕES

Durante o desenvolvimento do projeto, foram abordados os primórdios da teoria de distinguibilidade de partículas idênticas em experimentos de interferência em redes lineares unitárias, por meio do experimento de Hong-Ou-Mandel [1, 2]. A fim de se generalizar o efeito de Mandel para experimentos com mais partículas, foi estudada a teoria do artigo [10], que mostra uma intrínseca relação entre as probabilidades de detecção com a teoria de grupos. Foi abordada a interferência

de 3 partículas mostrada no artigo [9], cujo resultado mais importante para nossos fins é a constatação da dependência das probabilidades de detecção com a fase coletiva. Por fim, foi abordada a interferência de quatro fótons, sendo mostrada que existe uma fase genuína para a interferência de 4 fótons, que depende de no mínimo três parâmetros livres. Trata-se de uma extensão do efeito observado com três fótons e é portanto, o principal resultado do projeto.

VI. AGRADECIMENTOS

A pesquisa foi desenvolvida durante o período de um ano, em um projeto de iniciação científica financiado pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP de título “Teoria de distinguibilidade de partículas idênticas e experimentos com três e mais fótons”, processo 17/06774-9. Por fim, o autor agradece ao orientador Prof. Valery Shchesnovich e à FAPESP pelo auxílio prestado durante todo o período de vigência do projeto.

-
- [1] Hong, C. K., Ou, Z. Y.; Mandel, L. Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference. *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2044 (1987).
- [2] L. Mandel, Coherence and indistinguishability *Opt. Lett.* **16**, 1882 (1991).
- [3] Knill, E.; Laflamme, R.; Milburn, G. J. A scheme for efficient quantum computation with linear optics. *Nature* **409**, p. 46?52 (2001)
- [4] Tamma, V. Sampling of bosonic qubits *International Journal of Quantum Information* **12** (2015)
- [5] Kaufman, A. M. ; *et al*, The Hong-Ou-Mandel effect with atoms. arXiv:1801.04670v1 [quant-ph] (2018).
- [6] Brünner T. ; Dufour, G.; Rodríguez, A.; Buchleitner, A. Signatures of indistinguishability in bosonic many-body dynamics. *Phys. Rev. Lett.* **120**, 210401 (2018)
- [7] Marek P.; *et al*. Direct observation of phase-sensitive Hong-Ou-Mandel Interference. *Phys. Rev. A* **96** 033830 (2017)
- [8] Lopes, R.; *et al*. Atomic Hong?Ou?Mandel experiment. *Nature* **520** 66?68 (2015)
- [9] Menssen, A. J. *et al*. Distinguishability and many-particle interference. *Phys. Rev. Lett.* **118**, 153603 (2017).
- [10] Shchesnovich, V. S., Partial indistinguishability theory for multiphoton experiments in multiport devices. *Phys. Rev. A* **91**, 013844 (2015).
- [11] Gard, B. T.; *et al*, An introduction to boson-sampling. *World Scientific Publishing Co*, Book: From Atomic to Mesoscale - Chapter 8 (2015).
- [12] Holbrow C. H. ; Galvez, E.; Parks, M. E.; Photon quantum mechanics and beam splitters. *American Journal of Physics* **70**, 260 (2002)
- [13] Shchesnovich, V. S.; Boson-Sampling with non-interacting fermions. *International Journal of Quantum Information*, **13**, 1550013 (2015).
- [14] Zukowski, M. ; Zeilinger, A. ; Horne, M. A. ; Realizable higher-dimensional two-particle entanglement via multiport beam splitters *Phys. Rev. A* **55**, 2564 (1997).
- [15] Tichy, M. C.; Interference of Identical Particles: from Entanglement to Boson-Sampling. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **47**, 103001 (2014).
- [16] Shchesnovich, V. S.; Bezerra, M. E. O., Collective phases of identical particles interfering on linear multiports. ArXiv: 1707.03893 [quant-ph] (2018).
- [17] Tichy, M. A.; Sampling of partially distinguishable bosons and the relation to the multidimensional permanent. *Phys. Rev. A* **91**, 022316 (2015)