

Pressão do próton: um modelo simplificado

Julliana Marinho Paszko* and Mauro Rogério Cosentino†

Centro de Ciências Naturais e Humanas, Universidade Federal do ABC (UFABC),

Av. dos Estados 5001, 09210-580, Santo André, SP.

(Dated: 10 de Agosto de 2018)

Neste trabalho, os autores apresentam um método simplificado para a determinação da pressão do próton, baseando-se em conceitos de mecânica estatística, da cromodinâmica quântica, mais especificamente da liberdade assintótica dos quarks, e utilizando outros conceitos físicos bem estabelecidos. O resultado obtido para a pressão do próton foi de $0,3570 \times 10^{35}$ Pa, o que é consistente com os dados experimentais reportados recentemente.

Palavras-chave: pressão do próton, modelo de sacola MIT, gás de férmions.

I. INTRODUÇÃO

Recentemente foi publicada a primeira medição da distribuição da pressão interna do próton [1], e o resultado encontrado mostrou que ela é a maior pressão conhecida até o momento, da ordem de 10^{35} Pa. Este resultado, a princípio surpreendente, pode ter sua ordem de grandeza calculada a partir de conceitos de mecânica estatística bem estabelecidos, e da liberdade assintótica dos quarks [2, 3].

Utilizaremos uma interpretação particular da liberdade assintótica adotando uma versão simplificada do Modelo de Sacola MIT [4]. Neste modelo, o próton é visto como uma cavidade esférica na qual os quarks constituintes estão confinados, porém livres para se mover. A hipótese da liberdade de movimento dos quarks está baseada no fato de que, a distâncias curtas, a interação da QCD é fraca, então os quarks agem quase como partículas livres. No entanto, conforme a distância entre os quarks aumenta, a interação rapidamente aumenta, levando ao confinamento. Então, uma aproximação seria que, dentro do volume do próton, os quarks são partículas livres, mas os limites do próton agem como uma barreira de potencial, forçando o confinamento.

A seguir, a partir da estatística de Fermi-Dirac, assumiremos que os quarks confinados se comportam como um gás de Fermi, e deduziremos uma expressão para o cálculo da pressão do próton. Apresentaremos na sequência os resultados e discussão das condições assumidas.

II. MODELAGEM DO PRÓTON: LIBERDADE ASSINTÓTICA E O MODELO DE SACOLA MIT

De acordo com o Modelo Padrão, um próton é um bárion composto de 3 quarks, sendo dois *up* e um *down*. A força predominante entre quarks é a denominada força forte, e a teoria que a descreve é a Cromodinâmica Quântica, ou QCD na sigla em inglês. Tanto aos quarks quanto

aos glúons, que são as partículas mediadoras da força forte, são atribuídas cargas denominadas de *cor*.

Até o momento, não foi detectada nenhuma partícula livre com carga de cor, e por isso acredita-se que elas encontram-se em regime de confinamento dentro dos bárions e mésons.

A força forte é grande o suficiente para manter os quarks confinados, porém a curtas distâncias, tem-se o fenômeno da liberdade assintótica. Quanto mais próximos os quarks estão, mais fraco se torna o acoplamento, e consequentemente os quarks interagem muito mais fracamente.

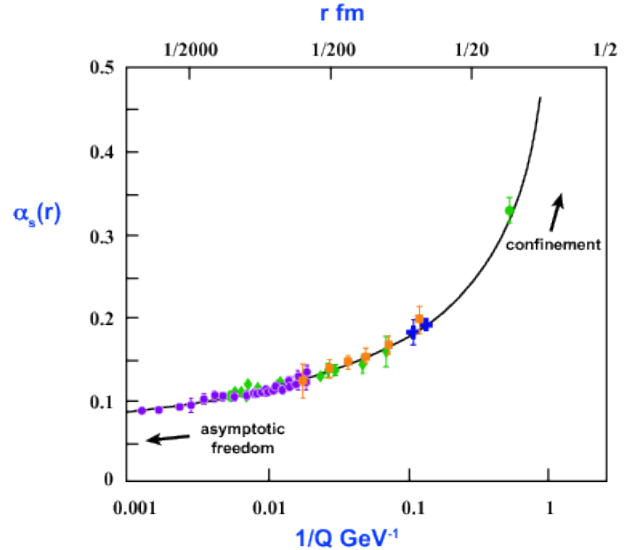


Figura 1. Gráfico da constante de acoplamento α_s em função da distância r [5].

A constante de acoplamento α_s da QCD, ver Fig. 1, varia com a distância r , em que $r = 1/Q$, e Q é a escala de momento que é sentida na interação, exibida em uma escala logarítmica. A curtas distâncias, o acoplamento é fraco, a chamada liberdade assintótica. A longas distâncias, com $r > 1 fm$, o acoplamento se torna forte, levando ao confinamento.

* jullianamarinho@gmail.com

† mauro.cosentino@ufabc.edu.br

Desta forma, podemos considerar a aproximação de que os quarks que constituem o próton se movimentam como partículas livres.

O regime de liberdade assintótica permite o desenvolvimento de cálculos utilizando a teoria de perturbação, e é graças a seu descobrimento que a teoria da QCD pôde se desenvolver aos moldes da QED. Já para o regime de confinamento, a teoria de perturbação não é aplicável, o que dificulta sua demonstração teórica.

Dada essa dificuldade, alguns modelos de confinamento surgiram, dentre eles o modelo de sacola MIT. Neste modelo, os campos que descrevem os quarks e glúons são restringidos a uma determinada região, denominada "sacola". É especificada então uma superfície, e demanda-se que a corrente de cor não passe através dela, e assim, como tanto quarks quanto glúons possuem carga de cor, nenhum deles pode atravessar essa barreira.

Assim, utilizaremos este conceito para simplificar o próton como uma sacola esférica, contendo um gás de quarks livres.

III. GÁS IDEAL DE FÉRMIONS

Sabemos que os quarks são partículas governadas pela estatística de Fermi-Dirac, dado que possuem spin semi-inteiro, mais especificamente spin 1/2. Assim, em nosso modelo, assumiremos que o próton é formado por um gás de férmions não-relativísticos. Para descrevê-lo, utilizaremos o formalismo do ensemble grande canônico [6]. Sua função de partição \mathcal{Z} é dada por

$$\mathcal{Z}(V, T, z) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Q_N, \quad (1)$$

em que V é o volume, T é a temperatura, e

$$Q_N = \sum_E e^{-\beta E} \quad (2)$$

é a função de partição canônica, que é obtida somando sobre todos os valores de energia de um sistema com N partículas. Já $z = \exp(\beta\mu)$ é definido como a fugacidade, com $\beta = \frac{1}{kT}$, e μ é o chamado potencial químico.

Como estamos considerando partículas livres, temos que a energia total E é soma das energias de cada uma dessas partículas, que pode ser escrita como

$$E = \sum_i n_i \epsilon_i, \quad (3)$$

em que ϵ_i é a energia do i -ésimo nível, supondo energias quantizadas, e os n_i 's são o número de partículas naquele nível.

Dessa forma, podemos verificar que o número total N de partículas deve satisfazer a seguinte condição

$$\sum_i n_i = N. \quad (4)$$

Assim, substituindo (3) em (2), temos

$$Q_N = \sum'_{\{n_i\}} \exp\left(-\beta \sum_i n_i \epsilon_i\right), \quad (5)$$

em que o símbolo de somatório com linha $\sum'_{\{n_i\}}$ significa

que a soma deve ser feita sobre todas as configurações $\{n_i\} = \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ dos números de ocupação que satisfazem a condição (4), ou seja, que o número total de partículas permaneça igual a N .

Agora, substituindo (5) em (1), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(V, T, z) &= \sum_{N=0}^{\infty} z^N \sum'_{\{n_i\}} \exp\left(-\beta \sum_i n_i \epsilon_i\right) \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum'_{\{n_i\}} z^N \prod_i (e^{-\beta \epsilon_i})^{n_i} \end{aligned}$$

em que o somatório na exponencial torna-se um produto fora dela. Analogamente,

$$z^N = z^{\sum_i n_i} = \prod_i z^{n_i}.$$

Por fim,

$$\mathcal{Z}(V, T, z) = \sum_{N=0}^{\infty} \sum'_{\{n_i\}} \prod_i (ze^{-\beta \epsilon_i})^{n_i}.$$

Os dois somatórios da expressão anterior equivalem a somar todos os valores de n_i independentemente uns dos outros, e assim temos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(V, T, z) &= \sum_{n_0, n_1, \dots} (ze^{-\beta \epsilon_0})^{n_0} (ze^{-\beta \epsilon_1})^{n_1} \dots = \\ &= \left[\sum_{n_0} (ze^{-\beta \epsilon_0})^{n_0} \right] \left[\sum_{n_1} (ze^{-\beta \epsilon_1})^{n_1} \right] \dots \quad (6) \end{aligned}$$

Como estamos trabalhando com férmions, para cada um dos níveis de energia, o número de ocupação só pode ter dois valores possíveis: ou o nível está ocupado por um férmion, ou por nenhum. Mais explicitamente,

$$n_i = \begin{cases} 0, & \text{nível desocupado} \\ 1, & \text{nível ocupado por um férmion.} \end{cases}$$

Portanto, para as somas da Eq. (6), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(V, T, z) &= (1 + ze^{-\beta \epsilon_0}) (1 + ze^{-\beta \epsilon_1}) \dots \\ &= \prod_i (1 + ze^{-\beta \epsilon_i}). \end{aligned}$$

A conexão do ensemble grande canônico com a termodinâmica é dada pela relação $PV = kT \ln \mathcal{Z}$, ver Ref. [6], e assim temos

$$\frac{PV}{kT} = \ln \mathcal{Z}(V, T, z) = \sum_i \ln(1 + ze^{-\beta \epsilon_i}), \quad (7)$$

em que na última passagem utilizamos a propriedade do logaritmo que torna o produto em um somatório fora da função.

No limite termodinâmico, em que fazemos $V \rightarrow \infty$, os níveis de energia formam um contínuo. Assim, devemos fazer a substituição do somatório pelas integrais no espaço de fase

$$\sum_i \cdots \rightarrow \frac{1}{h^3} \int \cdots d^3q d^3p.$$

O diferencial d^3q , ao ser integrado, resulta no volume V , e o d^3p pode ser substituído por $4\pi p^2 dp$ pela transformação para coordenadas esféricas. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^3} \int \cdots d^3q d^3p &= \frac{V}{h^3} \int \cdots d^3p \\ &= \frac{V}{h^3} \int \cdots 4\pi p^2 dp. \end{aligned} \quad (8)$$

O momento p não-relativístico é

$$p = (2m\epsilon)^{1/2}, \quad (9)$$

e dp , por sua vez, é

$$dp = \frac{1}{2}(2m)^{1/2} \epsilon^{-1/2} d\epsilon. \quad (10)$$

Substituindo as Eqs. (9) e (10) em (8), temos

$$\begin{aligned} \frac{V}{h^3} \int \cdots 4\pi p^2 dp &= \frac{V}{h^3} 4\pi \int \cdots (2m\epsilon)^{1/2} \frac{1}{2} (2m)^{1/2} \epsilon^{-1/2} d\epsilon \\ &= \frac{V}{h^3} 4\pi \frac{1}{2} (2m)^{1/2} 2m \int \cdots (\epsilon) \epsilon^{-1/2} d\epsilon \\ &= \frac{V}{h^3} 2\pi (2m)^{3/2} \int \cdots \epsilon^{1/2} d\epsilon. \end{aligned}$$

Assim, quando aplicada esta substituição da soma pela integral na Eq. (7), temos

$$\frac{PV}{kT} = 2\pi \frac{V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \ln(1 + ze^{-\beta\epsilon}) \epsilon^{1/2} d\epsilon.$$

Agora, faremos a troca de variáveis $x = \beta\epsilon$, substituindo $\epsilon = \frac{x}{\beta}$ e $d\epsilon = \frac{1}{\beta} dx$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{PV}{kT} &= 2\pi \frac{V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty \ln(1 + ze^{-x}) \frac{x^{1/2}}{\beta^{1/2}} \frac{1}{\beta} dx \\ &= 2\pi \frac{V}{h^3} (2m)^{3/2} \frac{1}{\beta^{3/2}} \int_0^\infty \ln(1 + ze^{-x}) x^{1/2} dx. \end{aligned}$$

A seguir, integramos por partes utilizando as substituições $u = \ln(1 + ze^{-x})$ e $dv = x^{1/2} dx$. Consequentemente,

$du = -\frac{ze^{-x}}{1 + ze^{-x}} dx$ e $v = \frac{2}{3} x^{3/2}$. A integral fica

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \ln(1 + ze^{-x}) dx &= uv \Big|_0^\infty - \int_0^\infty v du \\ &= \ln(1 + ze^{-x}) \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^\infty \\ &\quad + \frac{2}{3} z \int_0^\infty \frac{x^{3/2} e^{-x}}{1 + ze^{-x}} dx \\ &= \frac{2z}{3} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x + z} dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{z^{-1} e^x + 1} dx. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{PV}{kT} &= 2\pi \frac{V}{h^3} \frac{(2m)^{3/2}}{\beta^{3/2}} \frac{2}{3} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{z^{-1} e^x + 1} dx \\ &= V \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left[\frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \right] \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{z^{-1} e^x + 1} dx \\ &= V \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{1}{\lambda^3} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{z^{-1} e^x + 1} dx, \end{aligned}$$

em que substituímos o comprimento de onda térmico de de Broglie $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$.

A integral das últimas equações corresponde à função de Fermi-Dirac [6], que é definida por

$$f_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty \frac{x^{\nu-1} dx}{z^{-1} e^x + 1},$$

em que $\Gamma(\nu) = \int_0^\infty x^{\nu-1} e^{-x} dx$ é a função gama. Por fim, obtemos

$$\frac{PV}{kT} = \frac{V}{\lambda^3} f_{5/2}(z).$$

Finalmente calcularemos a energia interna do sistema

$$\begin{aligned} U &= - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln \mathcal{Z} \Big|_{z,V} \\ &= kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{PV}{kT} \right)_{z,V} \\ &= kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{V}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \right) \\ &= \frac{3}{2} kT \left(\frac{V}{\lambda^3} f_{5/2}(z) \right) \\ &= \frac{3}{2} kT \left(\frac{PV}{kT} \right) \\ &= \frac{3}{2} PV. \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$P = \frac{2}{3} \frac{U}{V}. \quad (11)$$

É interessante notar que este resultado é equivalente ao de um gás ideal monoatômico clássico.

IV. DETERMINAÇÃO DA PRESSÃO

A energia interna no modelo em questão pode ser considerada como a energia de repouso do próton,

$$U = m_p c^2,$$

e assim, pela Eq. (11), temos que a pressão interna do próton é dada por

$$P = \frac{2}{3} \frac{m_p c^2}{V}.$$

Para o volume, assumimos que os quarks estão confinados a uma esfera, com o raio igual ao raio do próton. Assim,

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \frac{m_p c^2}{\pi r_p^3} \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_p c^2}{\pi r_p^3}. \end{aligned} \quad (12)$$

Para o raio do próton, cuja medição ainda não possui um consenso, utilizamos o valor encontrado na Ref. [7], mais especificamente o raio CODATA 2014. Na mesma referência, também se encontra o valor da massa do próton. Desta forma, chega-se ao seguinte resultado

$$P = 0,3570 \times 10^{35} \text{ Pa}. \quad (13)$$

V. RESULTADOS E CONCLUSÃO

Discutimos uma modelagem simplificada para o próton, em que, devido ao confinamento dos quarks causado pela força forte, podemos considerá-los aprisionados num volume determinado por uma superfície esférica. Por outro lado, devido à liberdade assintótica a curtas distâncias, consideramos que eles se movem como partículas livres, e aproximamos o próton para um gás quântico de férmions a volume constante.

A partir deste modelo, foi possível calcularmos a pressão do próton, alcançando a mesma ordem de grandeza do valor experimental obtido recentemente [1].

Para desenvolver a estatística de Fermi-Dirac, faz-se necessário assumir um volume tendendo a infinito no limite termodinâmico. Tal consideração é justificada em razão do volume ocupado pelos quarks ser muito menor do que o volume do próton, o que vai de encontro com a hipótese dos quarks serem partículas puntiformes.

Assumimos ainda que o próton é um sistema de gás de Fermi não-relativístico. A princípio, nada impediria que os quarks tivessem altas velocidades dentro do próton. O cálculo, porém, é de maior complexidade, e a expressão da pressão seria $P = \frac{1}{3} \frac{U}{V}$ para o caso ultra-relativístico [8], ou seja, perde-se um fator 2 em relação à Eq. (11), não alterando a ordem de grandeza final.

O resultado encontrado é bastante interessante, pois, a partir de conceitos físicos básicos, pudemos alcançar uma boa concordância com dados experimentais recentes. Atingir a mesma ordem de grandeza valida as aproximações utilizadas para o caso em questão e corrobora o fato de que é possível extrair informações importantes a partir de modelos simples.

-
- [1] V. D. Burkert, L. Elouadrhiri, and F. X. Girod. The pressure distribution inside the proton. *Nature*, 557:396–399, 2018.
 - [2] D. J. Cross and F. Wilczek. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Physical Review Letters*, 30:1343, 1973.
 - [3] H. D. Politzer. Reliable perturbative results for strong interactions. *Physical Review Letters*, 30:1346, 1973.
 - [4] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V.F. Weisskopf. New extended model of hadrons. *Physical Review D*, 9:3471, 1974.
 - [5] Michael R. Pennington. Evolving images of the proton: Hadron physics over the past 40 years. *J. Phys.*, G43:054001, 2016.
 - [6] Beale P.D. Pathria R.K. *Statistical mechanics*. Elsevier, 3ed edition, 2011.
 - [7] M. Tanabashi et al. (Particle Data Group). *Phys. Rev. D*, 98:030001, 2018.
 - [8] Horst Stöcker D. Rischke Walter Greiner, Ludwig Neise. *Thermodynamics and statistical mechanics*. Classical theoretical physics. Springer-Verlag, 1995.